

## М Е Х А Н И К А

УДК 539.3

doi: 10.31429/vestnik-15-3-25-31

# ВЛИЯНИЕ МИКРОСТРУКТУРЫ ОСНОВАНИЯ НА СИЛЫ ТРЕНИЯ ПРИ ДВИЖЕНИИ ПЛОСКОГО ШТАМПА

Беляк О. А., Суворова Т. В.

INFLUENCE OF THE FOUNDATION MICROSTRUCTURE ON FRICTIONAL FORCES  
DURING THE MOTION OF A FLAT PUNCH

O. A. Belyak, T. V. Suvorova

Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, 344006, Russia  
e-mail: o\_bels@mail.ru

*Abstract.* A mathematical model describing the contact interaction of a semi-infinite medium with a microstructure and a rigid flat punch is considered. The contact tangents and normal stresses are related by the Coulomb-Amonton friction law. The microstructure of a semi-infinite medium is described by equations of the heterogeneous two-phase Bio medium. The boundary problem describing the present problem is reduced to the integral equation of the first kind with a logarithmic kernel. The solution of the integral equation is based on the iterative algorithm. Formulas describing the stress-strain state in the contact region are obtained. The influence of the microstructure of a semi-infinite medium and the speed of the punch movement on the stress-strain state in the contact region is studied.

*Keywords:* contact problem, friction, two-phase medium, integral equations.

### Введение

В настоящее время в связи с созданием новых нетрадиционных композитных материалов трибологического назначения актуальной является задача изучения влияния микроструктуры контактирующих тел на силы трения, возникающие в трибосистеме. Одним из направлений конструирования композитов является использование компонентов, имеющих вязко-упругие свойства и свойства вязкой жидкости [1]. В связи с этим в данной работе рассматривается модельная контактная задача о движении плоского штампа при наличии сил трения по двухфазному основанию, обладающему свойствами вышеописанного композита. Для описания внутренней микроструктуры основания, состоящего из упругого скелета и наполнителя, обладающего свойствами вязко-упругого тела и вязкой аморфной жидкости использованы, как определяющие, уравнения гетерогенной двухфазной среды Био [2, 3].

Предполагается, что в области контакта нормальные и касательные контактные напряжения связаны законом Кулона–Амонтона. Штамп движется с невысокой по-

стойкой скоростью в условиях отсутствия поворота под действием приложенных касательных и нормальных усилий. С помощью интегрального преобразования Фурье краевая задача сводится к решения интегрального уравнения первого рода. Изучены свойства ядра этого интегрального уравнения, которое предлагается решать приближенно методом итераций. Проведен численный анализ контактных напряжений, исследованы их зависимости от пористости, содержания разных фаз, скорости движения штампа.

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим контактную задачу о скольжении штампа с плоским основанием со скоростью  $\mathbf{V}$  по границе гетерогенного полупространства, под действием приложенной силы  $\mathbf{P} = \{P_1, P_2, 0\}$ . Сила  $\mathbf{P}$  приложена к штампу так, чтобы обеспечить равномерное движение, то есть штамп находится в состоянии предельного равновесия и имеет место полный контакт с поверхностью гетерогенного полупространства. Вид внешней силы  $\mathbf{P}$  позволяет рассматривать задачу в двумерной постановке. Для учета внутренней микроструктуры

Беляк Ольга Александровна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Ростовский государственный университет путей сообщения; e-mail: o\_bels@mail.ru.

Суворова Татьяна Виссарионовна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Ростовский государственный университет путей сообщения; e-mail: suvorova\_tv111@mail.ru.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-08-00260-а).

основания, состоящего из вязко-упругой пористой матрицы, поры которой заполнены вязкой аморфной жидкостью, как определяющие используем уравнения гетерогенной двухфазной среды, описываемой уравнениями Био – Френкеля [2, 3], имеющими в перемещениях вид

$$\begin{aligned} A \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} + 2N \nabla \nabla \mathbf{u} + Q \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} &= \\ = \rho_{11} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} + b \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right), \\ Q \nabla \nabla \mathbf{u} + R \nabla \nabla \mathbf{v} &= \\ = \rho_{12} \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22} \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} - b \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \right). \\ \sigma_{ij}^s &= Ae\delta_{ij} + 2Ne_{ij} + Q\varepsilon\delta_{ij}, \\ \sigma^f &= Qe + Re, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $A, N, Q, R$  – механические характеристики двухфазной среды [2],  $e_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  – тензоры деформации, соответствующие векторам перемещений твердой фазы и жидкой фазы  $\mathbf{v}\{v_1, v_2\}$ ;

$$\begin{aligned} e_{ij} &= (u_{i,j} + u_{j,i})/2, \quad \varepsilon_{ij} = (v_{i,j} + v_{j,i})/2, \\ e &= \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \varepsilon = \nabla \cdot \mathbf{v}, \quad \Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij}\sigma^f, \\ \sigma_{ij}^s &– тензор напряжений, действующий на вязко-упругий скелет,  $\sigma^f$  – давления, действующие на жидкость в порах. \end{aligned}$$

Будем считать, что граница гетерогенного полупространства и штамп непроницаемы для жидкости. Нормальные и касательные контактные напряжения связаны законом Амонтона–Кулона, где  $k_{tr}$  – коэффициент трения  $\sigma_{12} = k_{tr}\sigma_{22}$ ,  $|x_1 - Vt| \leq 1$ . Результатом воздействия нормальной составляющей силы  $\mathbf{P}$  является поступательное перемещение штампа параллельно оси  $Ox_2$  на глубину  $\delta$ . В такой постановке граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} x_2 = 0 : u_2 &= v_2; \\ \sigma_{12} = \sigma_{22} &= 0, \quad |x_1 - Vt| > 1; \\ \sigma_{12} &= k\sigma_{22}, \quad |x_1 - Vt| \leq 1. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Эта постановка является обобщением аналогичных задач для упругой среды. Задачи о воздействии штампа на упругое основание при учете сил трения рассматривались в [4, 5], действие движущейся осциллирующей нагрузки на гетерогенное основание изучалось в работе [6, 7].

## 2. Нахождение контактных напряжений

Применим к формулам (1.1)–(1.2) преобразование Фурье и перейдем в подвижную систему координат с началом в центре штампа, как это сделано в [6, 7]. Формулы (1.1)–(1.2) далее будем рассматривать в подвижной системе координат в безразмерном виде, при этом линейные размеры отнесены к полуширине штампа, а напряжения – к модулю сдвига упругой матрицы,

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\alpha, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1, \\ \mathbf{V}(\alpha, x_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Решения системы (1.1) запишем в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\alpha, x_2) &= \mathbf{G}(\alpha) \mathbf{E}_p(x_2) \mathbf{C}, \\ \mathbf{V}(\alpha, x_2) &= \mathbf{G}_0(\alpha) \mathbf{E}_p(x_2) \mathbf{C}, \\ \mathbf{G} &= \begin{vmatrix} -i\alpha & -i\alpha & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_2 & i\alpha \end{vmatrix}, \\ \mathbf{E}_p(z) &= \begin{vmatrix} e^{s_1 x_2} & 0 & 0 \\ 0 & e^{s_2 x_2} & 0 \\ 0 & 0 & e^{s_3 x_2} \end{vmatrix}, \quad (2.2) \\ x_2 &\leq 0, \end{aligned}$$

$$s_i = |\alpha| w_i; \quad w_i = \sqrt{1 - (V/V_i)^2}, \quad i = 1, 2, 3, \\ V_i – скорости распространения двух продольных и поперечной волн в гетерогенной среде.$$

Сформируем векторы для удовлетворения граничных условий  $\boldsymbol{\sigma}_0 = \{\sigma_{12}, \sigma_{22}, u_2 - v_2\}$ ,  $\mathbf{q}_0 = \{k_{tr}P, P, 0\}$ . Вектор произвольных постоянных  $\mathbf{C}$  при учете формул (2.2) находится из условий

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{C} &= \mathbf{Q}_0(\alpha), \\ \mathbf{D}(\alpha) &= \begin{vmatrix} (1 - m_1)s_1 & (1 - m_2)s_2 & i(1 - m_3)\alpha \\ -2i\alpha s_1 & 2i\alpha s_2 & \alpha^2 + s_3^2 \\ 2s_1^2 - \alpha^2 m_3 & 2s_2^2 - \alpha^2 m_4 & 2i\alpha s_3 \end{vmatrix}, \quad (2.3) \\ m_{i+2} &= q_{11} + q_{12} - 2q_{33} + (q_{12} + q_{22})m_i; \\ i &= 1, 2. \end{aligned}$$

$$\mathbf{Q}_0(\alpha, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{q}_0(x_1, x_2) e^{i\alpha x_1} dx_1.$$

На основании (2.1)–(2.3) получаем вид матрицы Грина, удобный для дальнейших преобразований

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Re}_2} \mathbf{B}(\alpha, x_2) \mathbf{Q}_0(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (2.4)$$

$$\mathbf{v}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\text{Re}_2} \mathbf{B}_0(\alpha, x_2) \mathbf{Q}_0(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha,$$

$$\mathbf{B}(\alpha, x_2) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} -iB_{11}/\alpha & -iB_{12}/\alpha \\ B_{21} & B_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha) = & (2\gamma_{13}(g_1 s_2 - g_2 s_1) + \\ & + 2s_1 s_2 s_3 (m_1 - m_2))\alpha^2 + \\ & + (g_1 s_2 (m_2 - 1) - g_2 s_1 (m_1 - 1))\gamma_0, \\ \gamma_0 = & 2s_i^2 - (V/V_i)^2, \end{aligned}$$

Так как при трибологических испытаниях скорости движения удовлетворяют соотношению  $V \ll V_s$ , где  $V_s$  — скорость сдвиговых волн в вязкоупругом скелете, имеет место квазистатический процесс. В соответствии с этим преобразуем формулы (2.4), представляя величины с малыми параметрами в виде рядов Тейлора, в результате решение задачи сводится к решению интегрального уравнения первого рода с разностным ядром

$$\int_{-1}^1 k(x - \xi) \sigma_{22}(\xi) d\xi = \delta, \quad (2.5)$$

где  $\delta$  — вертикальная осадка штампа.

Ядро интегрального уравнения, отвечающее квазистатическому процессу, имеет вид

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{ik_{tr}K_1(V)}{\alpha} + \frac{K_2(V)}{|\alpha|} \right) e^{it\alpha} d\alpha, \quad (2.6)$$

$$V \ll V_s,$$

Следует отметить, что функции  $K_1(V)$ ,  $K_2(V)$  зависят только от механических харак-

теристик вязкоупругой матрицы и жидкости:

$$\begin{aligned} K_1(V) &= i(r_1 + r_2 + 2r_3)/\Delta_0, \\ r_1 &= \gamma_{13}(\tilde{r}_1 w_2 - \tilde{r}_2 w_1), \\ r_2 &= (m_2 - 1)\tilde{r}_1 w_2 - (m_1 - 1)\tilde{r}_2 w_1, \\ r_3 &= w_1 w_2 w_3 (m_1 - m_2), \\ \Delta_0 &= 2r_1 + (2 - V^2/V_3^2)r_2 + 8r_3, \\ K_2(V) &= V^2/V_3^2(m_1 - m_2)/\Delta_0, \\ r_i &= r_i(A, N, P, Q, R, m), \quad i = 1, 2, \\ w_j &= \sqrt{1 - (V/V_i)^2}, \quad j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Используем значения интегралов [8]

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{t} dt &= i\pi \operatorname{sgn} x, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ixt}}{|t|} dt &= -2(C + \ln|x|), \end{aligned} \quad (2.8)$$

$C$  — постоянная Эйлера [8].

При учете (2.8) в выражении ядра (2.6) выделим логарифмическую составляющую

$$k(x - \xi) = -0,5 \operatorname{sgn}(x - \xi) k_{tr} K_1(V) - (C + \ln|x - \xi|) K_2(V)/\pi. \quad (2.9)$$

Для решения интегрального уравнение (2.6) с учетом (2.8)–(2.9) применим итерационный процесс, сходимость которого для интегральных уравнений первого рода показана в работе [9]. Последовательность нахождения итераций можно записать в виде

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_n(x) &= \tilde{\sigma}_{n-1}(x) + \\ &+ \left( \delta - K_2(V)/\pi \int_{-1}^1 \ln|x - \xi| \tilde{\sigma}_{n-1}(\xi) d\xi \right) / \varphi(x), \\ \varphi(x) &= \int_{-1}^1 \ln|x - \xi| d\xi = \\ &= 2 - \ln(1 - x)^{1-x}(1 + x)^{1+x}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Найденное решение описывают напряжения в области контакта.

### 3. Результаты численного анализа

Проведен численный эксперимент по расчету нормальных и касательных контактных

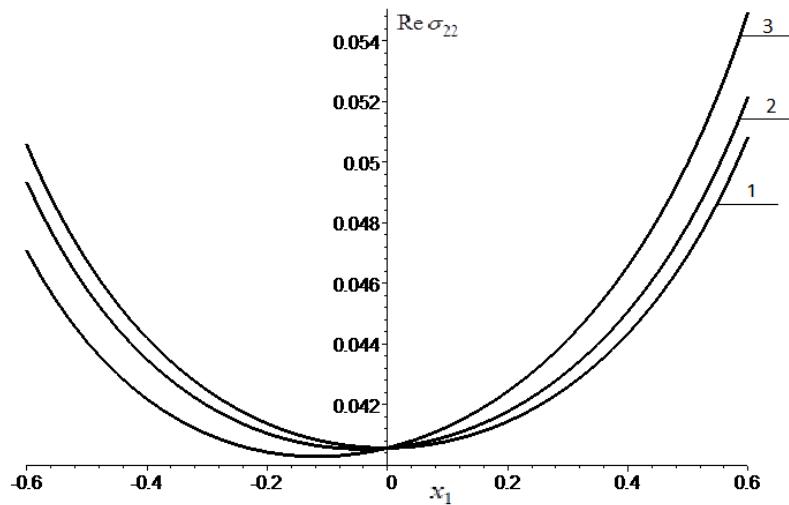


Рис. 1. Распределение действительной части нормальных контактных напряжений для различных значений коэффициента трения

напряжений для двухкомпонентного композиционного материала, с матрицей на основе ароматического полиамида фенилона с наполнителями и содержанием наполнителя — цилиндрового масла.

Воспользуемся приемом вычисления коэффициентов уравнений (1.1) по известным модулям объемного сжатия вязкоупругой матрицы  $K_s$ , пористой среды с незаполненными порами  $K_b$ , флюида  $K_f$  [10]. Расчеты проводились при следующих данных:

$$\begin{aligned} K_s &= 3,2 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad K_b = 3,0 \cdot 10^9 \text{ Па}, \\ K_f &= 2,0 \cdot 10^9 \text{ Па}, \quad \rho_s = 1,2 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ \rho_f &= 0,93 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \end{aligned}$$

Модуль объемного сжатия двухкомпонентной среды восстанавливался из значения мгновенного модуля Юнга, полученного методом на-ноиндентирования при коэффициенте Пуассона, равном 1/3. Вязкость полимера учитывалась в рамках модели частотно-независимого внутреннего трения, что приводит к возникновению малой комплексной части в коэффициентах уравнения (1.1)  $N, A, Q, R$ .

На рис. 1, 2 приведены графики действительной части нормальных и касательных контактных напряжений. Плоский штамп движется по границе  $x_2 = 0$  гетерогенного полупространства со скоростью  $V = 1,5 \text{ м/с}$ . Пористость среды:  $m = 0,05$ . Коэффициент трения принимался равным:  $k_{tr} = 0,1$  (кривая 1),  $k_{tr} = 0,3$  (кривая 2),  $k_{tr} = 0,5$  (кривая 3). Зависимость нормальных напряжений

от параметра  $k_{tr}$  незначительна, в отличие от касательных напряжений, которые нелинейно и значительно зависят от коэффициента трения. Распределение напряжений под штампом не является симметричным, что характерно и для контактных задач теории упругости при учете сил трения. Следует отметить, что в точке в  $x_1 = 0$  отсутствует зависимость нормальных напряжений от коэффициента трения.

Исследована зависимость контактных напряжений как от скорости движения штампа по поверхности полупространства, так и от массовой доли флюида-наполнителя. На рис. 3 представлена зависимость нормальных контактных напряжений (действительная часть) от коэффициента трения и скорости движения штампа по поверхности полупространства. Пористость среды  $m = 0,05$ .

При возрастании пористости контактные напряжения, как нормальные, так и касательные, возрастают, их зависимость от коэффициента трения и скорости движения штампа имеет более выраженный характер, это иллюстрирует рис. 4.

Чувствительность нормальных и касательных контактных напряжений для различных коэффициентов трения при возрастании скорости движения штампа уменьшается, это иллюстрирует рис. 5.

## Выводы

Проведенный численный анализ результатов показал, что при учете силы трения в

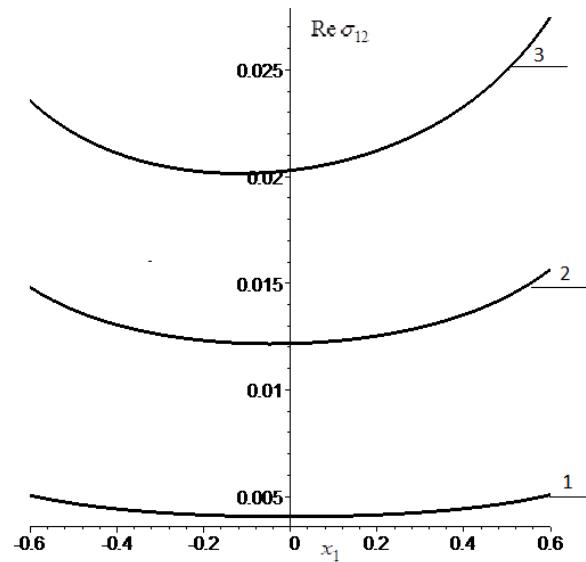


Рис. 2. Распределение действительной части касательных контактных напряжений при различных коэффициентах трения

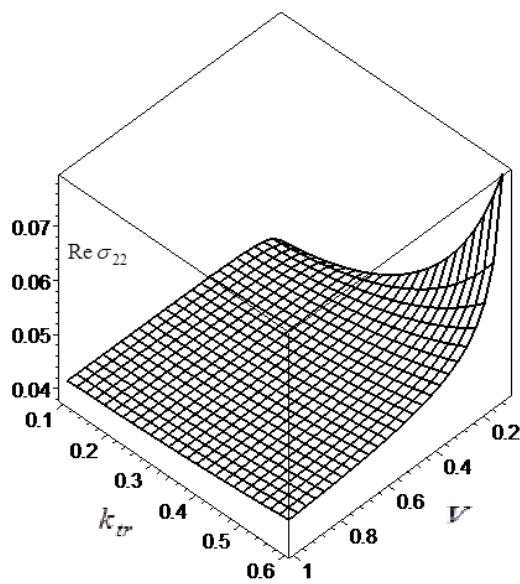


Рис. 3. Зависимость нормальных контактных напряжений от коэффициента трения  $k_{tr}$  и скорости движения штампа  $V$ , при пористости  $m = 0,05$

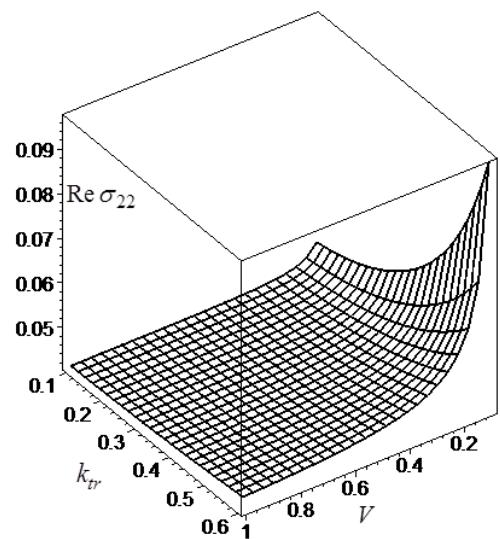


Рис. 4. Зависимость нормальных контактных напряжений от коэффициента трения  $k_{tr}$  и скорости движения штампа  $V$  при пористости  $m = 0,1$

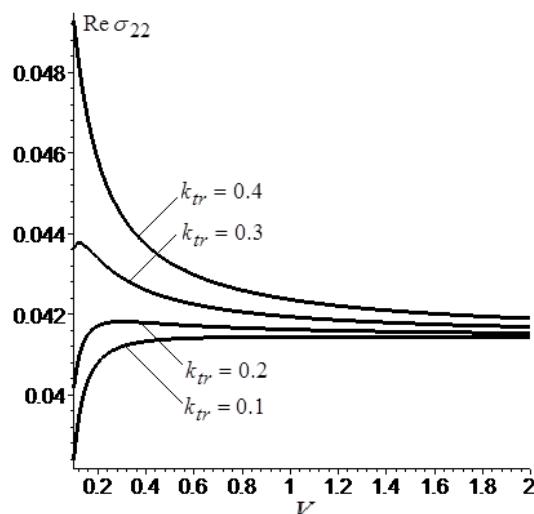


Рис. 5. Зависимость действительной части нормальных контактных напряжений при различных коэффициентах трения при пористости  $m = 0,05$

области контакта существенное влияние на контактные напряжения оказывают коэффициент трения, состав двухфазной пористой среды, механические характеристики составляющих компонентов, процентное содержание флюида, насыщающего поры композита, скорость движения штампа.

## Литература

1. Колесников И.В. Системный анализ и синтез процессов, происходящих в металлоополимерных узлах трения фрикционного и антифрикционного назначения. М.: ВИНИТИ РАН, 2017. 384 с.
2. Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. № 82. Вып. 6. С. 103–134.
3. Ковтун А.А. Об уравнениях Био и их модификациях // Ученые записки СПбГУ. 2011. № 444. Вып. 44. С. 3–26.
4. Горячева И.Г., Степанов Ф.И., Торская Е.В. Скольжение гладкого индентора при наличии трения по вязкоупругому полупространству // Прикл. математика и механика. 2015. Т. 79. Вып. 6. С. 853–863.
5. Колоскова Е.М., Чебаков М.И. Контактные задачи для трехслойной полосы при наличии сил трения // Прикл. математика и механика. 2012. Т. 76. Вып. 5. С. 795–802.
6. Беляк О.А., Суворова Т.В., Усошина Е.А. Математическое моделирование задачи о динамическом воздействии массивного объекта на неоднородное гетерогенное основание // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 1. С. 93–99.
7. Suvorova T.V., Dobrynin N.F., V.M. Ermakov V.I. Kushtin V.I. Novakovich The impact of structure and water saturation of the subgrade of the railway on its deformation during high-speed movement // International Journal of Applied Engineering Research. 2016. Vol. 11. No. 23. P. 11448–11453.
8. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. М.: Наука, 1977. 288 с.
9. Дмитриев В.И., В.И. Сальников Р.В. Итерационный метод решения интегральных уравнений первого рода // Труды факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова 2003. № 15: Прикладная математика и информатика. С. 5–10.
10. Chao-Lung Yeh, Lo Wei-Cheng, Jan Chyan-Deng An assessment of characteristics of acoustic wave propagation and attenuation through eleven different saturated soils // American Geophysical Union, Fall Meeting. 2006. No. 12. P. 31.

## References

1. Kolesnikov, I.V. *System analysis and synthesis of processes occurring in metal-polymeric knots of friction of frictional and antifriction purposes*. VINITI RAS, Moscow, 2017, 384 p. (In Russian)
2. Bio, M.A. Mechanics of deformation and propagation of acoustic waves in a porous medium. *Mekhanika. Period. sb. perevodov inostr. statey* [Mechanics: Coll. of sci. works], 1963, no. 82, iss. 6, pp. 103–134. (In Russian)
3. Kovtun, A.A. On the equations of Biot and their modifications. *Uchenyye zapiski SpbGU* [Scientists St. Petersburg State University notes], 2011, no. 444, iss. 44, pp. 3–26. (In Russian)

4. Goryacheva, I.G., Stepanov, F.I., Torskaya, E.V. Slipping smooth indenter under friction by a viscoelastic halfspace. *Prikladnaya matematika i mehanika* [Applied mathematics and mechanics], 2015, vol. 79, iss. 6, pp. 853–863. (In Russian)
5. Kolosova, E.M., Chebakov, M.I. Contact problems for a three-layer strip in the presence of frictional forces. *Prikladnaya matematika i mehanika* [Applied mathematics and mechanics], 2012, vol. 76, iss. 5, pp. 795–802. (In Russian)
6. Belyak, O.A., Suvorova, T.V., Usoshina, E.A. Mathematical modeling of the problem of the dynamic effect of a massive object on an inhomogeneous heterogeneous base. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2014, no. 1, pp. 93–99. (In Russian)
7. Suvorova, T.V., Dobrynin, N.F., Ermakov, V.M., Kushtin, V.I., Novakovich, V.I. The impact of structure and water saturation of the subgrade of the railway on its deformation during high-speed movement. *Int. J. of Applied Engineering Research*, 2016, vol. 11, no. 23, pp. 11448–11453.
8. Brychkov, Yu.A., Prudnikov, A.P. *Integral transformations of generalized functions*. Nauka, Moscow, 1977, 288 p. (In Russian)
9. Dmitriyev, V.I., Sal'nikov, R.V. An iterative method for solving integral equations of the first kind. *Prikladnaya matematika i informatika* [Applied Mathematics and Informatics], 2003, no. 15, pp. 5–10. (In Russian)
10. Chao-Lung Yeh, Lo Wei-Cheng, Jan Chyan-Deng An assessment of characteristics of acoustic wave propagation and attenuation through eleven different saturated soils. *American Geophysical Union, Fall Meeting*, 2006, no. 12, p. 31.

---

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2018

© Беляк О. А., Суворова Т. В., 2018

Статья поступила 5 июня 2018 г.