

МЕХАНИКА

УДК 539.3

doi: 10.31429/vestnik-15-3-32-38

КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ НА ОСНОВАНИИ ПАСТЕРНАКА

Леоненко Д. В.

FLUCTUATIONS OF SANDWICH BEAM ON AN PASTERNAK'S FOUNDATION

D. V. Leonenko

Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus
e-mail: leoden@tut.by

Abstract. The free and forced vibrations of elastic three-layer beam on an elastic foundation under the dynamic action of the loads are considered. Reaction of foundation was described on the foundation of Pasternak's model. To describe the kinematics of a package asymmetric in thickness, the hypotheses of a broken line are accepted: the Bernoulli hypotheses are valid in thin bearing layers; in a compressible in the thickness of the filler, Tymoshenko's hypothesis is fulfilled. The work of the filler in the tangential direction is taken into account. In a rigid compressible filler, the exact relations of the theory of elasticity with a linear approximation of the displacements of its points from the transverse coordinate are valid. Conditions for the continuity of displacements are used on the boundaries of the layers. Deformations are small. Analytical deciding a problem are received and their numeric analysis are conducted.

Keywords: vibrations, foundation of Pasternak, three-layered bar, eigenfrequency.

Введение

В настоящее время трехслойные конструкции прочно заняли свои ниши в строительстве, машиностроении, авиа- и ракетостроении. Теория расчета слоистых конструкций начала зарождаться в начале 40-х годов XX столетия. К настоящему времени создано достаточно много различных моделей поведения трехслойных элементов и разработано методик их расчета. Но в то же время остается ряд нерешенных задач.

В монографии [1] рассмотрены методы расчета многослойных конструкций при статических, динамических и температурных воздействиях и методы расчета на устойчивость. Колебания трехслойных цилиндрических оболочек в упругой среде, с учетом только радиальных сил инерции, исследовано в статье [2]. Статическое и динамическое деформирование трехслойных пластин рассмотрено в статьях [3–7]. Трехслойные стержни, в том числе и на упругом основании, исследованы в работах [8, 9]. Статика и динамика круговой трехслойной пластины, скрепленной с основанием Пастернака, рассмотрены в статьях [10, 11]. Здесь рассмотрены свобод-

ные и вынужденные колебания трехслойного стержня, лежащего на основании Пастернака.

Постановка задачи

Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли, в жёстком заполнителе справедливы точные соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией перемещений его точек от поперечной координаты z . На границах контакта слоёв используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоёв несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые.

Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя. Распределенная поверхностная нагрузка $q(x, t)$ действует перпендикулярно внешней плоскости первого слоя (рис. 1). На нижнюю поверхность второго несущего слоя действует реакция упругого основания $q_r(x, t)$. Через $w_k(x, t)$ и $u_k(x, t)$ обозначены прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоёв; h_k и ρ_k — толщина и плотность

Леоненко Денис Владимирович, д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор кафедры строительной механики Белорусского государственного университета транспорта; e-mail: leoden@tut.by.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (Т18Р-090).

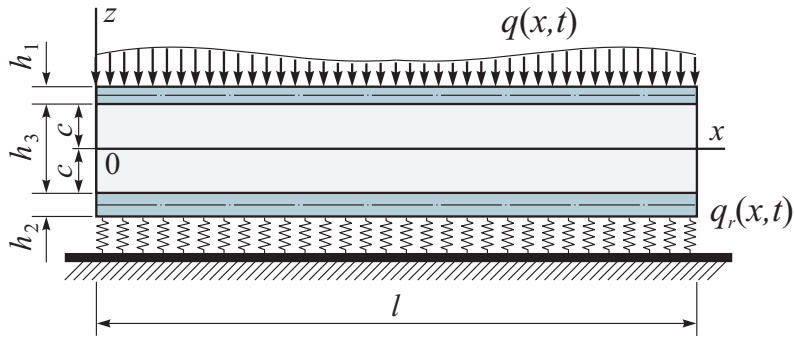


Рис. 1. Расчетная схема трёхслойного стержня

k -го слоя ($k = 1, 2, 3$ — номер слоя), $h_3 = 2c$; b_0 — ширина стержня.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x, t)$, $u_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ и $u_2(x, t)$ следующими соотношениями:

– в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x},$$

$$w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1);$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x},$$

$$w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

– в заполнителе

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left(1 - \frac{z}{c} \right) \left(\frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c),$$

где z — расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, например

$$w_{1,x} \equiv \frac{\partial w_1}{\partial x}.$$

Уравнения движения трёхслойного стержня следуют из принципа Лагранжа с учетом работы сил инерции

$$\delta A - \delta W = \delta A_I, \quad (1)$$

где δA — вариация работы внешних сил; δW — вариация работы внутренних сил упругости; δA_I — вариация работы сил инерции.

При определении работы внешних сил считаем, что к внешней поверхности первого несущего слоя приложена произвольная поперечная нагрузка $q(x, t)$ (см. рис. 1), а к торцам стержня — некоторые усилия и моменты. Тогда

$$\delta A = b_0 \int_0^l [q \delta w_1 - q_r \delta w_2] dx. \quad (2)$$

Вариация работы сил упругости

$$\delta W = b_0 \int_0^l \left[\sum_{k=1}^3 \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta \varepsilon_{xx}^{(k)} dz + 2 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta \varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} \delta \varepsilon_{zz}^{(3)} dz \right] dx. \quad (3)$$

Вариация работы сил инерции

$$\delta A_I = b_0 \sum_{k=1}^3 \int_0^l \int_{h_k} \left[\rho_k \left(w^{(k)},_{tt} \delta w^{(k)} + u^{(k)},_{tt} \delta u^{(k)} \right) \right] dz dx. \quad (4)$$

В зависимости от свойств деформируемого основания связь между реакцией и прогибом может быть различной. Рассмотрим случай безынерционного основания в рамках модели Пастернака [12]. В нашем случае стержень прикреплен к основанию вторым слоем,

поэтому выполняется следующее соотношение:

$$q_r = -\kappa_0 w_2 + t_f w_{2,xx}. \quad (5)$$

Подстановка вариации работы внешней нагрузки (2), работы внутренних усилий (3) и работы сил инерции (4) в (1) приводит к уравнению, которое должно тождественно выполняться при произвольных значениях варьируемых величин. Это возможно, если коэффициенты при независимых вариациях приравнять нулю. Применяя закон Гука, соотношения Коши и выражение (5), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно четырёх неизвестных функций $w_1(x, t)$, $u_1(x, t)$, $w_2(x, t)$ и $u_2(x, t)$. Оставляя в ней из инерционных только те члены, которые учитывают инерцию движения вдоль координатных осей и инерцию вращения нормалей в несущих слоях, выпишем уравнения движения рассматриваемого трёхслойного стержня в следующем виде:

$$\begin{aligned} & a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + \\ & + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + \\ & + a_7 w_{2,xxx} + m_1 u_{1,tt} = 0; \\ & - a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - \\ & - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + \\ & + 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 u_{2,tt} = 0; \\ & - a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + \\ & + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\ & + a_{15} w_{1,xxx} - a_{16} w_{2,xxx} + a_8 w_1 - \\ & - a_8 w_2 + m_1 w_{1,tt} - m_3 w_{1,xtt} = q; \\ & - a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - \\ & - a_{12} w_{1,xx} + (a_{14} - t_f) w_{2,xx} - a_{16} w_{1,xxx} + \\ & + a_{13} w_{2,xxx} - a_8 w_1 + (a_8 + \kappa_0) w_2 + \\ & + m_2 w_{2,tt} - m_4 w_{2,xtt} = 0, \quad (6) \end{aligned}$$

где a_i — жесткостные параметры слоёв стержня, m_k — инерционные коэффициенты.

В качестве граничных принимаются условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жёсткие опоры. Соответствующие ограничения для перемещений в сечениях $x = 0$; l имеют вид

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (7)$$

Начальные условия движения будут ($t = 0$)

$$\begin{aligned} & u_k(x, 0) = u_{k0}(x); \quad u_{k,t}(x, 0) = u_{k0,t}(x); \\ & w_k(x, 0) = w_{k0}(x); \quad w_{k,t}(x, 0) = w_{k0,t}(x), \quad (8) \\ & (k = 1, 2) \end{aligned}$$

где $u_{k0}(x)$, $u_{k0,t}(x)$, $w_{k0}(x)$, $w_{k0,t}(x)$ — заданные начальные перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоёв.

Решение начально-краевой задачи (6)–(8) проводится методом Бубнова–Галеркина. Для этого искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ и нагрузка $q(x, t)$ представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющих принятым граничным условиям (7):

$$\begin{aligned} & u_1(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m1}(t); \\ & u_2(x, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \cos \frac{\pi m x}{l} T_{m2}(t); \\ & w_1(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m3}(t); \\ & w_2(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} T_{m4}(t); \\ & q(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{\pi m x}{l} q_m(t), \quad (9) \end{aligned}$$

где $q_m(t)$ — коэффициенты разложения нагрузки в ряд

$$q_m(t) = \frac{2}{l} \int_0^l q(x, t) \sin \frac{\pi m x}{l} dx.$$

Подстановка выражений (9) в (6) приводит к системе уравнений для определения функций времени $T_{mi}(t)$ ($i = 1, 2, 3, 4$), которая в матричном виде будет иметь вид

$$[B] \{T\} + [M] \{T, tt\} = \{Q\}. \quad (10)$$

Здесь $[B]$ — квадратная матрица четвертого порядка, составленная из коэффициентов B_{mij} ; $[M]$ — диагональная матрица четвертого порядка с элементами M_{mij} ; $\{T\}$ и $\{T, tt\}$ — векторы, сформированные из искомых функций времени T_{mi} и их вторых производных;

$\{Q\}$ — вектор, элементы которого Q_{mk} составлены из коэффициентов разложения нагрузки в ряд:

$$[B] = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & b_8 & b_9 \\ b_4 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{pmatrix};$$

$$\{T\} = \begin{pmatrix} T_{m1} \\ T_{m2} \\ T_{m3} \\ T_{m4} \end{pmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q_m \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$[M] = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{44} \end{pmatrix};$$

$$\psi_{33} = m_1 + m_3 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2;$$

$$\psi_{44} = m_2 + m_4 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2,$$

$$\{T, tt\} = \begin{pmatrix} T_{m1,tt} \\ T_{m2,tt} \\ T_{m3,tt} \\ T_{m4,tt} \end{pmatrix}.$$

Здесь коэффициенты b_i зависят от параметра m и вычисляются через коэффициенты a_i следующим образом:

$$b_1 = a_1 + a_4 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2; \quad b_2 = -a_1 + a_5 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2;$$

$$b_3 = a_2 \frac{\pi m}{l} + 2a_6 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^3;$$

$$b_4 = a_3 \frac{\pi m}{l} - a_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^3; \quad b_5 = a_1 + a_9 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2;$$

$$b_6 = -a_{10} \frac{\pi m}{l} + a_6 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^3;$$

$$b_7 = a_{17} \frac{\pi m}{l} + 2a_7 \left(\frac{\pi m}{l} \right)^3;$$

$$b_8 = -a_{11} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 + a_{15} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^4 + a_8;$$

$$b_9 = a_{12} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 - a_{16} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^4 - a_8;$$

$$b_{10} = -(a_{14} - t_f) \left(\frac{\pi m}{l} \right)^2 + a_{13} \left(\frac{\pi m}{l} \right)^4 + a_8 + \kappa_0.$$

Систему (10) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^4 B_{mkj} T_{mj} + M_{mkk} T_{mk,tt} = Q_{mk} \quad (11)$$

$$(k = 1, \dots, 4).$$

Т. к. матрица $[M]$ диагональная, то от второй суммы осталось только одно k -е слагаемое. Для замыкания задачи к системе (11) необходимо добавить начальные условия (8).

Собственные колебания

Предполагается, что внешняя нагрузка $q(x, t) = 0$. При этом условии начально-краевая задача (6)–(8) будет описывать собственные колебания трёхслойного стержня со сжимаемым заполнителем, находящимся на упругом основании. Система уравнений движения (11) принимает вид ($Q_{mk} = 0$)

$$\sum_{j=1}^4 B_{mkj} T_{mj} + M_{mkk} T_{mk,tt} = 0 \quad (12)$$

$$(k = 1, \dots, 4).$$

Ее решение

$$T_{mk}(t) = A_{mk} \sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \quad (13)$$

где A_{mk} — амплитуда; ω_m — частота и α_{mk} — начальная фаза колебаний.

Подстановка выражения (13) в систему (12) приводит к обобщенной задаче на собственные значения:

$$[B] \{A\} = \omega^2 [M] \{A\}, \quad (14)$$

где A — вектор, сформированный амплитудами A_{mk} .

Обращение в уравнении (14) матрицы $[M]$, так как она не является вырожденной, осуществляет переход к стандартной задаче на собственные значения:

$$[R] \{A\} = \omega^2 \{A\}; \quad [R] = [M]^{-1} [B]; \quad (15)$$

$$([R] - \omega^2 E) \{A\} = 0.$$

Система уравнений (15) однородна относительно амплитуд A_{mk} . Нулевое решение в рассматриваемом случае означает отсутствие колебаний. Для нахождения нетривиального решения необходимо потребовать равенство нулю определителя системы. Это приводит к алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно ω_m^2 . Решив его, получим четыре вещественных неотрицательных корня. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра m оказывается

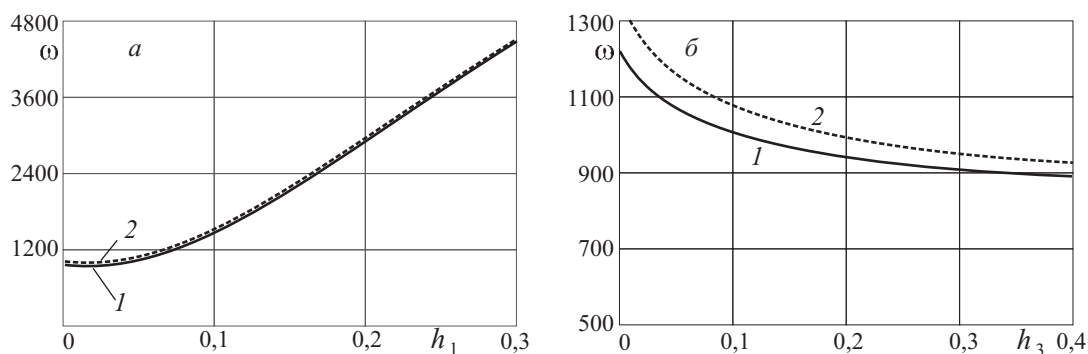


Рис. 2. Зависимость минимальной частоты от толщины первого несущего слоя (а) и заполнителя (б)

четырёхчастотным. Следовательно, вместо решения (13) нужно принять

$$T_{mk}(t) = \sum_{i=1}^4 A_{mki} \sin(\omega_{mi}t + \alpha_{mi}). \quad (16)$$

Численное исследование проводилось для трёхслойного стержня, набранного из материалов Д16Т-фторопласт-Д16Т [13].

На рис. 2 показано изменение минимальной частоты ω_{11} в зависимости от толщины слоев стержня (а — внешнего несущего слоя, б — заполнителя). Кривые соответствуют основаниям: 1 — Винклера, 2 — Пастернака. Учет сдвигов в основании Пастернака (1, 2) частоты изменяет незначительно. При увеличении толщины несущего слоя частоты растут. Увеличение толщины заполнителя приводит к сближению частот и их уменьшению.

Вынужденные колебания

Функции времени $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^4 \delta_{mki} \zeta_{mi} \left(\sum_{i=1}^4 \delta_{mik}^2 = 1 \right), \quad (17)$$

где δ_{mki} — амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции $\zeta_{mi}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\begin{aligned} \zeta_{mi,tt} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} &= q'_{mi}(t), \\ q'_{mi} &= \sum_{k=1}^4 Q_{mk} \delta_{mki} / \sum_{k=1}^4 M_{mkk} \delta_{mki}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Общее решение уравнения (18) примет вид

$$\begin{aligned} \zeta_{mi}(t) &= A_{mi} \cos(\omega_{mi}t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi}t) + \\ &+ \frac{1}{\omega_{mi}} \int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau)) q'_{mi}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

В случае действия на стержень динамической поверхностной равномерно распределенной нагрузки q_0 коэффициенты разложения ее в ряд

$$\begin{aligned} q_m &= \frac{2}{l} \int_0^l q_0 \sin \frac{\pi m x}{l} dx = \\ &= \frac{2q_0}{\pi m} (\cos \pi m - 1). \end{aligned} \quad (19)$$

Соответствующие параметрам (19) функции времени

$$\begin{aligned} \zeta_{mi}(t) &= \frac{2q_0 \delta_{m3i} (1 - \cos(\omega_{mi}t))}{\pi m \omega_{mi}^2 \sum_{k=1}^4 M_{mkk} \delta_{mki}^2} \times \\ &\times (\cos \pi m - 1). \end{aligned} \quad (20)$$

Искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ описываются формулами (9), с учетом выражений для функций времени (17) и (20).

На рис. 3 показано изменение максимальных прогибов (а) и горизонтальных перемещений (б) во внешнем несущем слое рассматриваемого трёхслойного стержня в зависимости от коэффициента жесткости основания Пастернака κ_0 при различных сдвиговых коэффициентах t_f (МПа·м): 1 — $t_f = 0$ (основание Винклера), 2 — $t_f = 4$, 3 — $t_f = 8$,

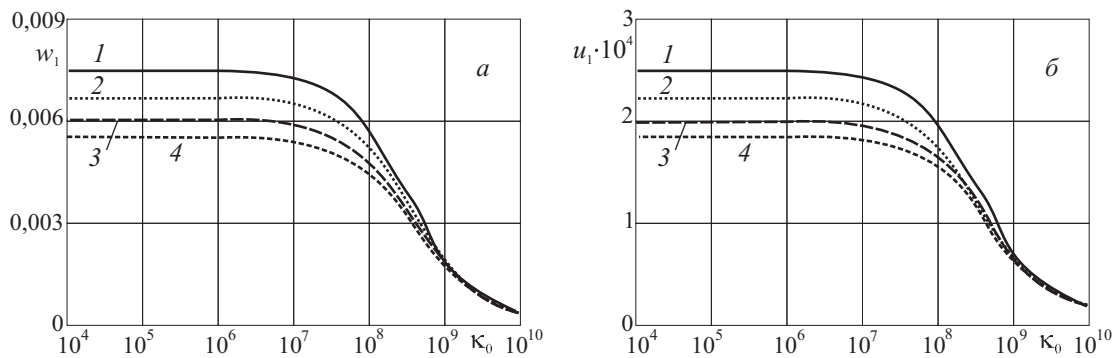


Рис. 3. Изменение максимальных прогиба (а) и горизонтального перемещения (б) в трёхслойном стержне в зависимости от коэффициента t_f

$4 - t_f = 12$. Нагрузка $q = 1$ МПа действует на всю внешнюю поверхность первого слоя. Резкое уменьшение перемещений наблюдается при основаниях средней жесткости $10^6 < \kappa_0 < 10^9$. При принятом росте коэффициента сдвига основания перемещения уменьшаются с каждым шагом примерно на 10 %.

Заключение

Приведенные в работе аналитические и численные результаты, позволяют сделать вывод о существенном влиянии на параметры колебаний упругих оснований средней жесткости. При колебании элементов на основаниях малой жесткости их влиянием в ряде случаев можно пренебречь.

Литература

1. Болотин В. В., Новичков Ю. Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
2. Леоненко Д. В. Радиальные собственные колебания упругих трехслойных цилиндрических оболочек // Механика машин, механизмов и материалов. 2010. № 3(12). С. 53–56.
3. Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В. Свободные колебания в нейтронном потоке круговой трехслойной пластины, скрепленной с упругим основанием // Проблемы машиностроения и автоматизации. 2012. № 2. С. 92–97.
4. Starovoitov E. I., Leonenko D. V. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation // International Applied Mechanics. 2011. Vol. 47, № 5. P. 580–589.
5. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В. Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2000. № 6. С. 91–98.

6. Havaladar S., Sharma R. Experimental investigation of dynamic characteristics of multilayer PU foam sandwich panels // Journal of Minerals and Materials Characterization and Engineering. 2013. Vol. 1. № 5. P. 201–206.
7. Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В. Деформирование трехслойной круговой пластины на упругом основании // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 1. С. 16–22.
8. Starovoitov E. I., Leonenko D. V., Yarovaya A. V. Vibration of sandwich rod under local and impulsive forces // International Applied Mechanics. 2005. Vol. 41. № 7. P. 809–816.
9. Козел А. Г. Математическая модель деформирования круговой трехслойной пластины на основании Пастернака. Проблемы физики, математики и техники. Сер.: Математика. 2017. № 1(30). С. 42–46.
10. Старовойтов Э. И., Журавков М. А., Леоненко Д. В. Трехслойные стержни в терморадационных полях. Минск: Беларуская навука, 2017. 275 с.
11. Леоненко Д. В. Колебания круговых трехслойных пластин на упругом основании Пастернака // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 1. С. 59–63.
12. Пастернак П. Л. Основы нового метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели. М.: Стройиздат, 1954. 56 с.
13. Старовойтов Э. И. К описанию термомеханических свойств некоторых конструкционных материалов // Проблемы прочности. 1988. № 4. С. 11–16.

References

1. Bolotin, V. V., Novichkov, Yu. N. *Mechanics of layered structures*. Mashinostroenie, Moscow, 1980. (In Russian)

2. Leonenko, D. V. Radial natural vibration of the elastic three-layered cylindrical shells. *Mechanics of Machines, Mechanisms and Materials*, 2010, no. 3 (12), pp. 53–56. (In Russian)
3. Starovoitov, E. I., Leonenko, D. V. The free vibration of sandwich circular plate in neutron flux on elastic foundation. *Engineering and Automation Problems*, 2012, no. 2, pp. 92–97. (In Russian)
4. Starovoitov, E. I., Leonenko, D. V. Impact of thermal and ionizing radiation on a circular sandwich plate on an elastic foundation. *International Applied Mechanics*, 2011, vol. 47, no. 5, pp. 580–589. DOI: 10.1007/s10778-011-0481-y
5. Gorshkov, A. G., Starovoitov, E. I., Yarovaya, A. V. Harmonic loading of layered viscoelastoplastic systems. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela* [News of the Russian academy of sciences. Mechanics of solid], 2000, no. 6, pp. 91–98. (In Russian)
6. Havaldar, S., Sharma, R. Experimental investigation of dynamic characteristics of multi-layer PU Foam sandwich panels. *J. of Minerals and Materials Characterization and Engineering*, 2013, vol. 1, no. 5, pp. 201–206.
7. Kozel A. G. Mathematical model of deformation of the circular three-layer plate on the basis of Pasternak. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki* [Problems of Physics, Mathematics and Technics], 2017, no. 1(30), pp. 42–46. (In Russian)
8. Starovoitov, E. I., Leonenko, D. V., Yarovaya, A. V. Vibration of sandwich rod under local and impulsive forces. *International Applied Mechanics*, 2005, vol. 41, no. 7, pp. 809–816.
9. Rabboh, S., Bondok, N., Mahmoud, T., El Kholy, H. The effect of functionally graded materials into the sandwich beam dynamic performance. *Materials Sciences and Applications*, 2013, no. 4, pp. 751–760.
10. Starovoitov, E. I., Zhuravkov, M. A., Leonenko, D. V. *Three-layer bars in a thermoradiative fields*. Belaruskaja navuka, Minsk, 2017. (In Russian)
11. Leonenko, D. V. Vibrations of circular three-layer plates on en Pasternak elastic foundation. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2014, no. 1, pp. 59–63. (In Russian)
12. Pasternak, P. L. *Fundamentals of a new method for calculating foundations on an elastic base with the help of two bed coefficients*. Strojizdat, Moscow, 1954. (In Russian)
13. Starovoitov, E. I. Description of the thermomechanical properties of some structural materials. *Strength of Materials*, 1988, vol. 20, iss. 4, pp. 426–431.