

МЕХАНИКА

УДК 534.286

doi: 10.31429/vestnik-15-3-39-51

ПРОСТАЯ АКУСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
НЕКОНСОЛИДИРОВАННЫХ МОРСКИХ ОСАДКОВ
С ВНУТРЕННИМ И ВЯЗКИМ ТРЕНИЕМ

Лисютин В. А.

A SIMPLE ACOUSTIC MODEL OF UNCONSOLIDATED MARINE SEDIMENTS
WITH INTERNAL FRICTION AND VISCOUS DISSIPATION

V. A. Lisytin

Sevastopol State University, Sevastopol, Russia
e-mail: vlisiutin@mail.ru

Abstract. The main object of research in the shallow water acoustics is the sea floor and marine sediments. An unconsolidated, saturated marine sediment consists of a more or less loose assemblage of mineral grains in contact, with seawater in the pores. In the layer of unconsolidated marine sediments, elastic waves of two types can propagate: longitudinal and shear. The acoustic properties of these waves are phase velocities, attenuation coefficients and their frequency dependences. It has been shown experimentally that in dry granular media the attenuation coefficient is directly proportional to the frequency. In saturated media, deviations from this law are noted, whence it follows that there are two physical mechanisms of dissipation – internal friction and viscous dissipation. In the article, marine sediments are considered as an environment in which there are no elastic bonds between the granules. The propagation and attenuation of the longitudinal and transverse waves is explained by a special intergranular interaction, nonlinear at the microscopic level. The model of the elementary volume of such a medium in the dry state is represented as a generalized Kelvin-Voigt element, consisting of a spring and a springpot, an element combining the conservative properties of the spring and the dissipative properties of the dashpot. Applying the mathematical apparatus of fractional derivatives, we derive a generalized wave equation describing the elementary volume of the medium. Harmonic substitution leads to a dispersion relation for the longitudinal and shear waves. The resulting dispersion relation includes only internal friction. Then, the equations of motion for the longitudinal and transverse waves are corrected, so that the motion of the solid phase and fluid is considered separately. In this case, part of the fluid is considered to be coupled with the solid phase, and some – mobile. The term “percolation porosity” is defined. Harmonic substitution in new, two-phase wave equations gives new dispersion relation, including internal friction and viscous dissipation. The presented theory is called “GS + ED”. The results of the GS+ED theory are compared with the experimental data taken from the open sources. It is shown that the GS+ED theory gives a best fit, compared to the theories of GS and Biot-Stoll. An estimate is made of the contribution of internal friction and viscous dissipation to the total attenuation in the propagation of longitudinal and transverse waves. Frequency ranges are defined in which internal or viscous friction is manifested. Evaluation is given for two cases – when the medium represents dense marine sediments and when the medium is a suspension.

Keywords: unconsolidated marine sediments, intergranular friction, viscous dissipation, phase velocity dispersion, attenuation coefficient, loss tangent.

Введение

Основным объектом исследования в акустике мелкого моря является дно и морские осадки [1, 2]. Морское дно шельфовой части Черного моря не только вмещает значительные природные и культурные ресурсы, но и является накопителем антропогенных биоло-

гических и иных видов загрязнений. Основной природный ресурс дна мелкого моря — песок, бесконтрольная добыча которого наносит непоправимый вред всей прибрежной части Крыма: культурный — погребенные археологические артефакты, ожидающие своего

Лисютин Виктор Александрович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики Севастопольского государственного университета; e-mail: vlisiutin@mail.ru.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и города Севастополь в рамках научного проекта № 18-42-920001\18.

обнаружения, рекреационный — экологическое «здоровье» флоры и фауны всего моря.

Дистанционный метод исследования ресурсов, структуры и состояния дна моря может быть реализован с помощью измерения частотных зависимостей коэффициента отражения от дна при его акустическом профилировании [3]. Необходимое условие адекватного истолкования результатов такого исследования — знание связи между акустическими и физическими характеристиками морских осадков.

Наибольший интерес представляет верхний пористый «промежуточный» слой дна толщиной несколько метров, состоящий из неконсолидированных морских осадков типа песка, ила, глины, смеси разнообразных обломочных материалов. Промежуточный слой является водонасыщенным, а в случае загрязнения органикой — еще и газонасыщенным. Здесь будут оседать и всевозможные загрязнения и располагаться полезные либо вредные артефакты. В такой среде могут распространяться упругие волны двух типов: продольная (компрессионная) и поперечная (сдвиговая) [1, 2, 4, 5]. Акустическими характеристиками этих волн являются фазовые скорости, коэффициенты затухания и их частотные зависимости.

Используемый гидроакустическими системами профилирования дна частотный диапазон заключается в границах от сотен герц до 50 кГц с хорошим запасом [3]. Внутри этого диапазона оказывается область, в которой регистрируется наибольшая дисперсия скорости звука в осадках.

В сухих гранулированных средах, горных породах, почвах, как установлено экспериментально, коэффициент затухания (α , дБ/м = $8,69 \times \alpha$, Нп/м) пропорционален первой степени частоты, $\alpha \sim \omega^1$. Измерения в водонасыщенных средах обнаруживают отклонения от этой зависимости в средах с высокой гидравлической проницаемостью, например, в крупнозернистых песках [4]. Такая частотная зависимость затухания предполагает как минимум два физических механизма потерь. Основной механизм получил название «внутреннее (internal) трение», второй — вязкая диссипация при движении поровой жидкости относительно гранул [4]. Внутреннее трение дает линейную зависимость затухания от частоты, вязкое — отклонения от линейной зависимости.

До конца прошлого века в акустике морских осадков господствовала теория Био–Столла, которая предполагает существование «упругого скелета» в осадках и рассматривает колебания скелета и флюида по отдельности — т.е. является двухфазной. Теория Био–Столла учитывает два вида потерь — вязкое и внутреннее трение. Чтобы ввести в свою теорию внутреннее трение, Р.Д. Столл полагает модули упругости скелета комплексными и подбирает соотношение между вещественными и мнимыми частями так, чтобы удовлетворить экспериментальным данным [5]. При этом на частоте согласования соотношение между вещественной и мнимой частью упругих модулей оказывается верным, а на других частотах — нарушенным, причем на высоких частотах доминирует вязкое затухание, $\alpha \sim \omega^{1/2}$, что не соответствует экспериментальным данным.

В начале нынешнего века, М. Buckingham, отрицая существование «скелета», разработал GS (Grain Shearing) теорию, объясняющую и распространение, и затухание упругих волн в осадках трением между частицами. Межгранулярное трение придает среде продольную и поперечную жесткость, но и в то же время вызывает потери энергии [6]. В GS теории осадки рассматриваются как однофазная среда и вязкие потери не учитываются. Частотная зависимость коэффициента затухания оказывается $\sim \omega^1$, что соответствует экспериментальным данным только на высоких частотах.

Появление GS теории вызвало оживленную дискуссию, сравнение с результатами теории Био–Столла и с данными измерений [7, 8]. Эксперименты показали, что относительное движение флюида все-таки оказывает влияние, в большей степени на дисперсию скорости, в меньшей — на частотную зависимость затухания. Итогом обоснованной критики GS теории явилась VGS (Viscous Grain Shearing) теория, где вязкое трение «симулируется» подобным жидкости реологическим элементом [9]. Однако такой подход не позволяет осуществлять «инверсии» — восстанавливать физические параметры среды по измеренным акустическим характеристикам.

Возникшая конкуренция между VGS и теорией Био–Столла мотивировала развитие последней. Chotiros N., M. Isakson и M. Kimura [10–12] предложили «расширенные Био» модели, согласно которым модули

упругости скелета полагаются зависящими от частоты. Внутреннее трение либо не учитывается вообще, либо задается в виде постоянной комплексной добавки к (комплексным) модулям упругости. Результат расширенной Био (ЕВ) теории — увеличенная дисперсия скорости, однако на высоких частотах затухание $\alpha \sim \omega^{1/2}$, что снова противоречит экспериментам.

К настоящему времени показано и подтверждено экспериментально, что гранулированные среды из-за повышенной, по сравнению с основным материалом, мягкости контактирующих поверхностей являются нелинейными [13]. Как следствие, все теории, основанные на представлении о «упругом скелете» в неконсолидированной среде, выглядят несостоятельными.

1. Постановка задачи

Практическая значимость теории оценивается балансом между ее адекватностью и «робастностью», часто для решения конкретной задачи. В нашем случае эта задача — вычисление частотных зависимостей коэффициента отражения звука от слоистого дна.

Полная двухфазная теория распространения упругих волн в пористой среде дает три компоненты поля: две продольные волны, быструю и медленную, и сдвиговую. В этом случае граничные условия становятся очень громоздкими, в особенности для слоистого дна [5].

Целесообразно упростить теорию, оставив две компоненты поля — продольную (p) и, если нужно, сдвиговую (s) волны, но так, чтобы теория включала в себя все физически измеряемые параметры пористой среды, а частотные зависимости фазовых скоростей $c_{p,s}(f)$ и затухания $\alpha_{p,s}(f)$ соответствовали бы измеренным.

Не слишком удачный пример такого подхода продемонстрировал K.L. Williams. Упростив теорию Био–Столла, он разработал “EDFM” (Effective Density Fluid Model), где дно рассматривается как жидкость, внутреннее трение не учитывается, а дисперсия возникает за счет изменения эффективной плотности среды [2 §10.2]. Теория EDFM показывает «неправильное» затухание — на высоких частотах $\alpha \sim \omega^{1/2}$, что противоречит измерениям. Несмотря на свои недостатки, теория EDFM оказалась вполне востребованной [2, 14].

Еще один важный параметр среды — тангенс угла потерь β , входящий в волновое число

$$k_{p,s} = \frac{\omega}{c_{p,s}} - i\alpha_{p,s} = \frac{\omega}{c_{p,s}}(1 - i\beta_{p,s})$$

и связанный со скоростью и затуханием формулой

$$\beta = \frac{\alpha c}{\omega} = -\frac{\text{Im}(k)}{\text{Re}(k)}.$$

Если коэффициент затухания $\alpha \sim \omega^1$, $\beta = \text{const}$.

Целью настоящей статьи является представление квазидвухфазной теории, основанной на «подходящем» феноменологическом уравнении состояния, первоначально включающей только внутреннее трение, но включающей затем вязкое трение с помощью замены равновесной плотности на «эффективную». Математически компактную модель однофазной среды можно построить, используя аппарат дробных производных [15, 16].

Предложенная ниже теория позволяет рассчитывать «входной нормальный импеданс» слоистого дна на любой частоте и при любом угле падения и легко вычислять коэффициент отражения в «акустическом» приближении [2].

2. Однофазная модель среды

Рассмотрим двухкомпонентную среду с пористостью P , состоящую из минеральных частиц и флюида. Среду считаем однородной изотропной и безграничной. Равновесная плотность ρ_m и равновесный (суспензионный) объемный модуль упругости K_m такой среды определяются формулами [2]

$$\rho_m = P\rho_f + (1 - P)\rho_g, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{K_{m(ean)}} = \frac{P}{K_f} + \frac{1 - P}{K_g}, \quad (2.2)$$

где $\rho_{f,g}$, $K_{f,g}$ — плотности и модули упругости флюида и твердой фазы соответственно. Скорость звука в такой среде — суспензии будет постоянна и согласно формуле Вуда равна $c_0 = \sqrt{\frac{K_m}{\rho_m}}$. Если бы частички твердой фазы между собой как-то взаимодействовали (через посредство скелета или трения), то скорость поперечной волны определялась бы формулой $c_{0s} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_m}}$, где μ , Па — сдвиговая упругость или «сдвиговый коэффициент трения».

Предположим пока, что движения флюида нет, но между гранулами среды имеется взаимодействие, условно называемое микротрение. Условно потому, что физическая природа микротрения при малых деформациях является в настоящее время дискуссионным вопросом [13].

Следуя вначале [15, 16], представим модель элементарного объема среды в виде обобщенного элемента Кельвина–Фойгта — соединенных параллельно пружины и «прумпфера» (springpot) — элемента, сочетающего консервативные свойства пружины и диссипативные свойства демпфера. Пружина представляет чистую (вещественную) упругость среды K_m , прумпфер — межгранулярное взаимодействие, законы которого предполагают вязко-упруго-пластичный характер деформации контактов между гранулами.

Уравнение состояния прумпфера имеет вид

$$\sigma(t) = M\tau^n \frac{\partial^n \varepsilon}{\partial t^n},$$

где $M = K_m + 4/3\mu$ — модуль плоской волны, τ — константа, отражающая баланс между накоплением и диссипацией энергии, n — порядок дробной производной, определяющий величину показателя в степенном законе частотной зависимости затухания, $0 < n < 1$. Тогда механическое напряжение σ на границе элементарного объема среды связано с деформацией уравнением состояния [15, 16]

$$\sigma(t) = K_m \varepsilon(t) + M\tau^n \frac{\partial^n \varepsilon(t)}{\partial t^n}, \quad (2.3)$$

где $\varepsilon = \Delta V/V = \operatorname{div} \mathbf{u}$ — относительная объемная деформация среды, \mathbf{u} — вектор смещения частиц среды.

Рассмотрим плоскую продольную волну вида $u_x = U_0 \exp(i\omega t - ik_p x)$. Подставляя $\varepsilon = \operatorname{div} \mathbf{u}$ в (2.3), взяв компоненту дивергенции от полученного выражения и применяя уравнение движения в виде

$$\rho_m \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \sigma,$$

получим дробное волновое уравнение для продольной компоненты вектора смещения

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = K_m \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + M\tau^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}. \quad (2.4)$$

Подставив гармоническую зависимость, получаем дисперсионное уравнение

$$k_p = \omega \sqrt{\frac{\rho_m}{K_m + \gamma(i\omega t_0)^n}}, \quad (2.5)$$

где $\gamma = \gamma_p + 4/3\gamma_s = (\tau/t_0)^n M$ — эквивалентная «жесткость» неконсолидированной среды с межгранулярным взаимодействием, Па; γ_p , γ_s — продольная и поперечная компоненты эквивалентной жесткости; $t_0 = 1$ с — константа, восстанавливающая правильную физическую размерность. Величина γ может быть определена только с помощью инверсии экспериментальных данных. Можно показать, что (2.5) совпадает с дисперсионным уравнением GS теории [6].

Рассмотрим теперь распространение плоской сдвиговой волны вида $u_y = U_0 \exp(i\omega t - ik_s x)$. Поскольку сдвиг в неконсолидированной среде не приводит к изменению объема, консервативную часть среды (пружину) следует удалить, оставив только консервативно-диссипативный прумпфер. Тогда уравнение состояния единичного объема принимает вид

$$\sigma(t) = \mu\tau^m \frac{\partial^m \varepsilon(t)}{\partial t^m}.$$

Проделив аналогичные (2.3)–(2.5) преобразования, имеем для сдвиговой волны «диффузионное» уравнение

$$\rho_m \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = \mu\tau^m \frac{\partial^m}{\partial t^m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_y. \quad (2.6)$$

Подставив в (2.6) гармоническую зависимость, получаем дисперсионное уравнение для сдвиговой волны

$$k_s = \omega \sqrt{\frac{\rho_m}{\gamma_s(i\omega t_0)^m}}, \quad (2.7)$$

где $\gamma_s = (\tau/t_0)^m \mu$ — сдвиговая жесткость неконсолидированной среды. Уравнение (2.7) совпадает с соответствующим уравнением GS теории.

Вещественные фазовые скорости $c_{p,s}$ и коэффициенты затухания $\alpha_{p,s}$ могут быть получены из волновых чисел как

$$c_{p,s} = \frac{\omega}{\operatorname{Re}(k_{p,s})}, \quad \alpha_{p,s} = -\operatorname{Im}(k_{p,s}), \quad \text{Нп/м.}$$

3. Подключение вязкой диссипации

Рассмотрим снова плоскую продольную волну, распространяющуюся вдоль оси OX в пористой флюидонасыщенной среде. Ось цилиндрических непересекающихся «трубчатых» пор радиусом a ориентирована вдоль направления распространения волны.

Будем считать, что пористость среды, измеренная в лаборатории — P . Пористость P измеряется в соответствии с определением ($P = V_f/V_{\text{media}}$), как объем жидкости, который вмещает единичный объем среды. При лабораторных измерениях песок высыпают в жидкость, которая будет заполнять весь внутрипоровый объем. В реальной среде часть общего объема пор может не входить в лабиринт взаимосвязанных пор, образуя изолированные полости, где течение отсутствует. Долю общего объема среды, образуемую порами, в которых возможно течение («течение Био» [5, 13]), будем называть перколяционной пористостью и обозначать φ . Таким образом, массовая доля жидкости равная $(P - \varphi)\rho_f$ движется вместе с долей твердой фазы, равной $(1 - P)\rho_g$, и только доля жидкости $\varphi\rho_f$ движется отдельно.

Допуская теперь возможность раздельного движения флюида и твердой фазы, изменим уравнение движения и перепишем (2.4) в виде

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}((1-P)\rho_g u_{xg} + (P-\varphi)\rho_f u_{xg} + \varphi\rho_f U_{xf}) = K_m \frac{\partial^2 u_{xg}}{\partial x^2} + M\tau^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^2 u_{xg}}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

где u_{xg} — смещение твердой и связанной с ней жидкой фазы, U_{xf} — смещение подвижной жидкости. Выделение в левой части (3.1) ρ_m дает

$$\rho_m \ddot{u}_{xg} - \varphi\rho_f(\ddot{u}_{xg} - \ddot{U}_{xf}) = K_m \frac{\partial^2 u_{xg}}{\partial x^2} + M\tau^n \frac{\partial^n}{\partial t^n} \frac{\partial^2 u_{xg}}{\partial x^2}. \quad (3.2)$$

Подставив гармоническую зависимость $u_{xg} = \exp(i\omega t - ik_p x)$, получаем дисперсионное уравнение

$$k_p = \omega \sqrt{\frac{\rho_m - \varphi\rho_f(1 - U_{av})}{K_m + \gamma(i\omega t_0)^n}}, \quad (3.3)$$

где U_{av} — средняя по поперечному сечению поры амплитуда колебаний жидкости.

Решая уравнение Навье–Стокса [17], можно вычислить величину

$$1 - U_{av} = 1 - \frac{2J_1(i^{3/2}w)}{i^{3/2}wJ_0(i^{3/2}w)} = F_C(w), \quad (3.4)$$

где $J_{0,1}$ — функции Бесселя,

$$w = \sqrt{\frac{a^2 \rho_f}{\eta}} \omega, \quad (3.5)$$

a — радиус пор, η — динамическая вязкость жидкости, Па·с.

Тогда дисперсионное уравнение для продольной волны приобретает вид

$$k_p = \omega \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{K_m + \gamma(i\omega t_0)^n}}, \quad (3.6)$$

где

$$\rho_{eff} = \rho_m - \varphi\rho_f F_C(w). \quad (3.7)$$

Совершив аналогичные преобразования с (2.6) с соответствующей заменой осей, получаем и дисперсионное уравнение для сдвиговой волны

$$k_s = \omega \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{\gamma_s(i\omega t_0)^m}}. \quad (3.8)$$

Вещественная часть второго слагаемого в (3.7) — «дефекта плотности» $\Delta\rho = \varphi\rho_f F_C(w)$ характеризует инерционное взаимодействие фаз и управляет дисперсией фазовой скорости, мнимая часть характеризует вязкие силы и управляет затуханием.

Будем называть представленную теорию GS+ED (Grain Shearing + Effective Density).

Как видно из (2.5) и (3.6), низкочастотная граница фазовой скорости продольной волны будет определяться формулой

$$c_{p0} = \sqrt{\frac{K_m + \gamma}{\rho_m}}. \quad (3.9)$$

Если учитывать только внутреннее трение, то акустические характеристики продольной волны определяются уравнением (2.5). Если учитывать только вязкую диссипацию, то

$$k_p = \omega \sqrt{\frac{\rho_{eff}}{K_m + \gamma}}.$$

Эти уравнения понадобятся при сопоставлении теории с экспериментом.

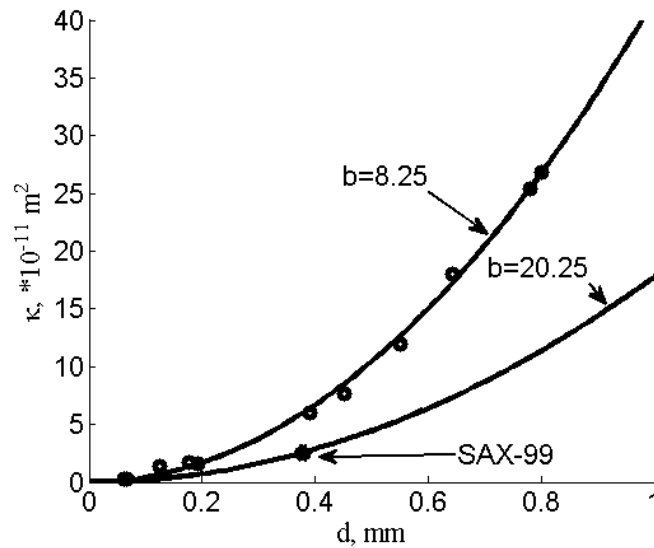


Рис. 1. Зависимость проницаемости от диаметра гранул среды

4. Сопоставление результатов GS+ED теории с экспериментальными данными

Входными параметрами GS+ED теории, определяющими фазовую скорость и коэффициент затухания, являются модуль межгранулярной жесткости γ и показатель стресс-релаксации n . Эти параметры определяются инверсией экспериментальных данных. Форма дисперсионной кривой, т.е. отклонение коэффициента затухания от закона $\alpha \sim \omega^1$, определяется перколяционной пористостью — внутренним параметром теории, связывающим акустические и физические характеристики среды.

Выразим пористость φ через проницаемость, сравнив закон Дарси

$$\varphi u_{av} = -\frac{\kappa}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}$$

с формулой Пуазейля [2]

$$u_{av} = -\frac{a^2}{b\eta} \frac{\partial p}{\partial x},$$

что дает

$$\varphi = \frac{b\kappa}{a^2}, \quad (4.1)$$

где b — структурный коэффициент, зависящий от геометрии порового пространства, для круглых труб $b = 8$ (точно), для шариков

$b \approx 8,25$, для гранул песка $b \approx 15 \div 20$ и должен уточняться экспериментально. Проницаемость κ зависит от диаметра гранул и пористости и должна измеряться физическим прибором — пермеаметром.

Хотя поры между гранулами песка отчетливо видны в микроскоп, трудно подобрать точное определение для характерного размера пор. Поэтому, инвертируя (4.1) при $b = 8$, будем считать, что a_0 — это радиус трубчатых пор, соответствующий измеренным пористости P и проницаемости κ . Тогда $a_0 = \sqrt{\frac{8\kappa}{P}}$. Это значение будет служить начальным приближением параметра a . Наилучшая величина a может быть определена по частоте перегиба дисперсионных кривых.

А. Turgut и Т. Yamamoto [18] для случая непересекающихся пор с различными размерами дают обобщенную форму соотношения (4.1)

$$\frac{b\kappa}{\varphi a^2} = \chi, \quad \chi = \exp(\sigma^2), \quad (4.2)$$

где σ — среднеквадратичное отклонение размера пор в случае нормального закона распределения. Зная a , инвертируя (4.2), можно восстановить перколяционную пористость

$$\varphi = \frac{b\kappa}{\chi a^2}.$$

Для определения структурного коэффициента b воспользуемся соотношением

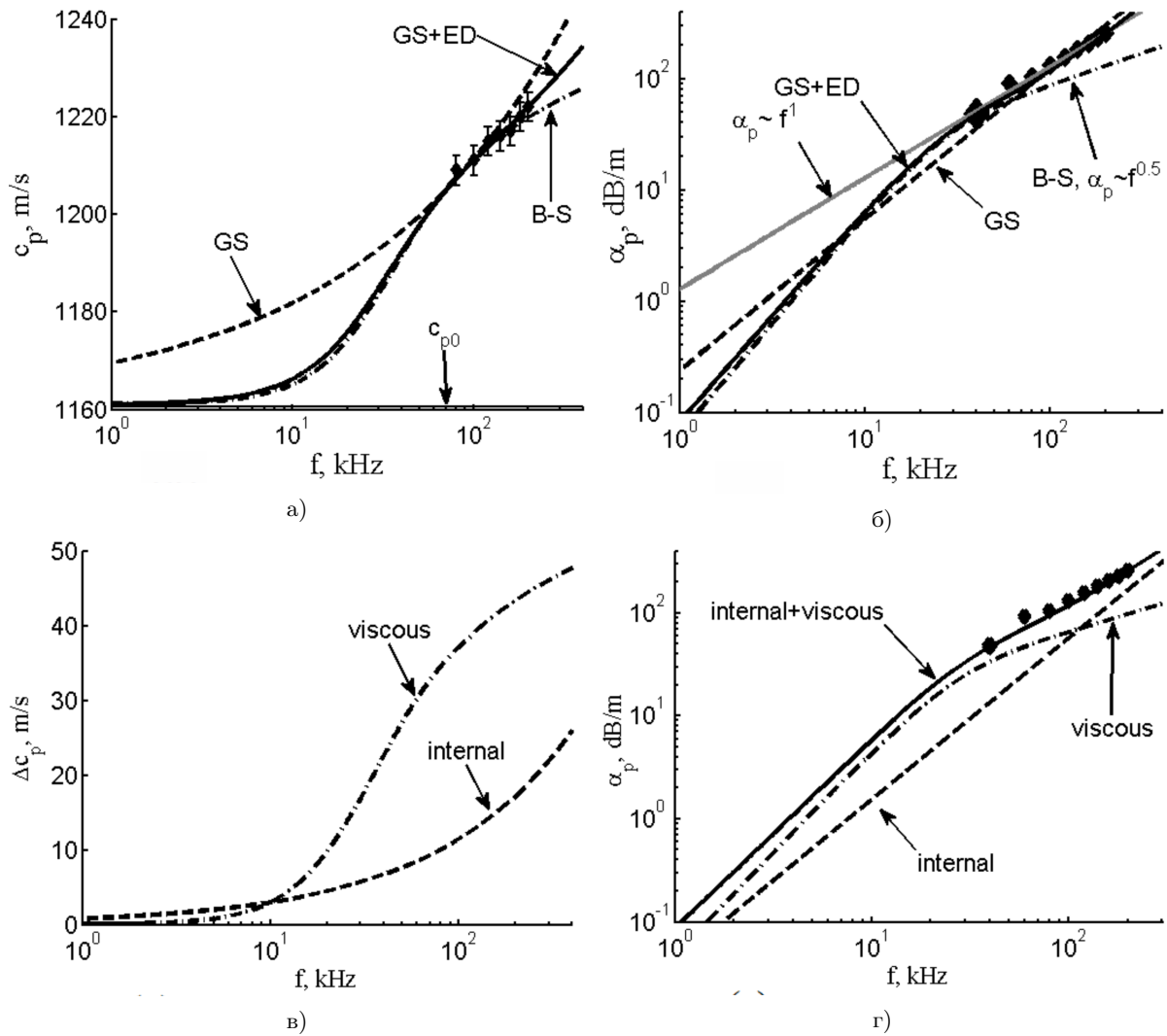


Рис. 2. Частотные зависимости фазовой скорости и коэффициента затухания (а), (б), компонент дисперсионной добавки скорости и затухания (в), (г). Эксперимент «стеклянные шарики в силиконовом масле»

Козени–Кармана [2] в виде

$$\kappa = \frac{1}{36b} \frac{P^3}{(1-P)^2} d^2, \quad (4.3)$$

где d — средний диаметр гранул. На рис. 1 показан график зависимости измеренной проницаемости от диаметра гранул. Для этого из открытой печати взяты результаты измерений проницаемости среды из шариков различного размера (на рис. 1 — кружки), полученные в ходе экспериментов, которые будут проанализированы ниже (другие фигуры). Поскольку пористость среды из шариков зависит не от размера, а только от плотности упаковки, то, принимая случайную упаковку,

считаем $P = P_0 = 0,37$. Проведенная по (4.3) линия дает для шариков $b \approx 8,25$.

Проанализируем вначале результаты тестового для всякой теории эксперимента «стеклянные шарики в силиконовом масле». Данные взяты из [8]. Этот интересный эксперимент был специально осуществлен для проверки GS и Био–Столла теорий. Поскольку вязкость силиконового масла в 100 раз больше чем у воды, ожидалось, что переходная область, где зависимость затухания меняется с $\alpha \sim f^2$ на $\alpha \sim f^{1/2}$ сдвинется в сторону более высоких частот и окажется внутри диапазона измерений.

Входные параметры следующие: $d = 0,4$ мм, $\rho_g = 2500$ кг/м³, $K_g = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_f = 968$ кг/м³, $K_f = 9,68 \cdot 10^8$ Па, $\eta = 98 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $P = 0,36$, $\kappa = 8,3 \cdot 10^{-11}$ м², $a_0 = 5,25 \cdot 10^{-5}$ м.

Графики частотных зависимостей фазовой скорости и затухания приведены на рис. 2а, 2б. Здесь же показаны и дисперсионные кривые теории Био–Столла (штрихпунктир, В-S).

Результаты инверсии следующие: $a = a_0$, $\gamma = 3,8 \cdot 10^4$ Па, $n = 0,58$, $b = 8,25$, $\chi = 1,1$, $\varphi = 0,28$.

Если справедлива теория Био–Столла, ниже релаксационной частоты $f_r = \frac{\eta}{a^2 \rho_f}$, $f_r = 36$ кГц, характер затухания должен быть $\alpha \sim f^2$, выше $\alpha \sim f^{1/2}$. Как видно из рис. 2б, изменение частотной зависимости затухания отсутствует, из чего в [8] был сделан вывод, что теория Био–Столла не подтверждается и внутреннее трение вносит определяющий вклад в общее затухание. С другой стороны, не подтверждается и GS теория — соответствующая линия пересекает экспериментальные тренды $c_p(f)$ и $\alpha_p(f)$, т.е. только внутренним трением объяснить экспериментальные дисперсионные кривые невозможно. Графики GS+ED теории показывают очень хорошее соответствие, плавно следуя за экспериментальными точками.

На рис. 2в, 2г показаны частотные зависимости двух компонент дисперсии и затухания — внутреннее (internal) и вязкое трение. Дисперсионные добавки скорости $\Delta c_p = c_p - c_{p0}$ (рис. 2в) и компоненты затухания (рис. 2г) вычислялись, полагая в формуле (3.6) поочередно: $\rho_{eff} = \rho_m$ — только внутреннее трение; $n = 0$ — только вязкое трение. Сопоставление графиков показывает, что только суммарным влиянием внутреннего и вязкого трения можно объяснить экспериментальные дисперсионные кривые.

Инверсия возвращает низкое значение межгранулярной жесткости и высокое значение показателя стресс-релаксации. Физически это можно объяснить смазкой поверхности гранул вязким маслом, которое способствует относительному скольжению шариков на низких частотах, но препятствует вытеснению флюида из межгранулярной щели на высоких частотах.

Проанализируем результаты измерений, полученные в ходе эксперимента SAX-99 [9]

и имеющие для акустики мелкого моря наибольшую практическую значимость. Фазовые скорости и затухание для продольной волны измерялись различными системами на разных частотах, для сдвиговой — только на одной частоте.

Входные параметры следующие [9]: $d = 0,379$ мм, $\rho_g = 2690$ кг/м³, $K_g = 3,2 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_f = 1023$ кг/м³, $K_f = 2,395 \cdot 10^9$ Па, $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $P = 0,385$, $\kappa = 2,5 \cdot 10^{-11}$ м², $a_0 = 2,65 \cdot 10^{-5}$ м.

Алгоритм инверсии был несколько изменен. Теперь цель инверсии — не наилучшее визуальное соответствие графиков $c_p(f)$ и $\alpha_p(f)$ с экспериментальными точками, а наилучшее соответствие между точками и графиком тангенса потерь $\beta_p(f)$. Поскольку тангенс потерь зависит и от скорости, и от затухания, этот параметр более объективно отражает изменение входных параметров.

Графики приведены на рис. 3. Результаты инверсии следующие: $a = 0,95a_0$, $\gamma = 1,013 \cdot 10^8$ Па, $n = 0,084$, $\gamma_s = 1,65 \cdot 10^7$ Па, $m = 0,064$, $b = 20,25$, $\chi = 3,3$, $\varphi = 0,24$.

Чтобы наилучшим образом соответствовать данным $\beta_p(f)$ приходится немного отклонить теоретическую линию $c_p(f)$ вверх от середины экспериментального тренда, зато линия $\alpha_p(f)$ проходит прямо по экспериментальным точкам. Как видно из дисперсионных кривых продольной волны, инерционно-вязкое взаимодействие оказывает существенное влияние только в определенном диапазоне частот.

Для сдвиговой волны ситуация иная. Во всем частотном диапазоне определяющее влияние имеет внутреннее трение. Дисперсионная «добавка» фазовой скорости за счет инерционно-вязкого взаимодействия не превышает 5 м/с, что оказывается меньше погрешности измерения скорости сдвиговой волны. Таким образом, если возможность распространения сдвиговой волны все-таки надо учитывать, то инерционно-вязкой дисперсией можно пренебречь и считать тангенс потерь постоянным и равным $\beta_s = 0,05$.

Для продольной волны по относительно малому вкладу сил внутреннего и вязкого трения можно выделить пять диапазонов частот.

1) Очень низкие частоты. Вязкое трение много меньше внутреннего, затухание $\alpha_p \sim f^1$, слабая дисперсия за счет роста $\text{Re}(i\omega)^n$. Мягкая, сжимаемая среда вследствие легкого вытеснения флюида.

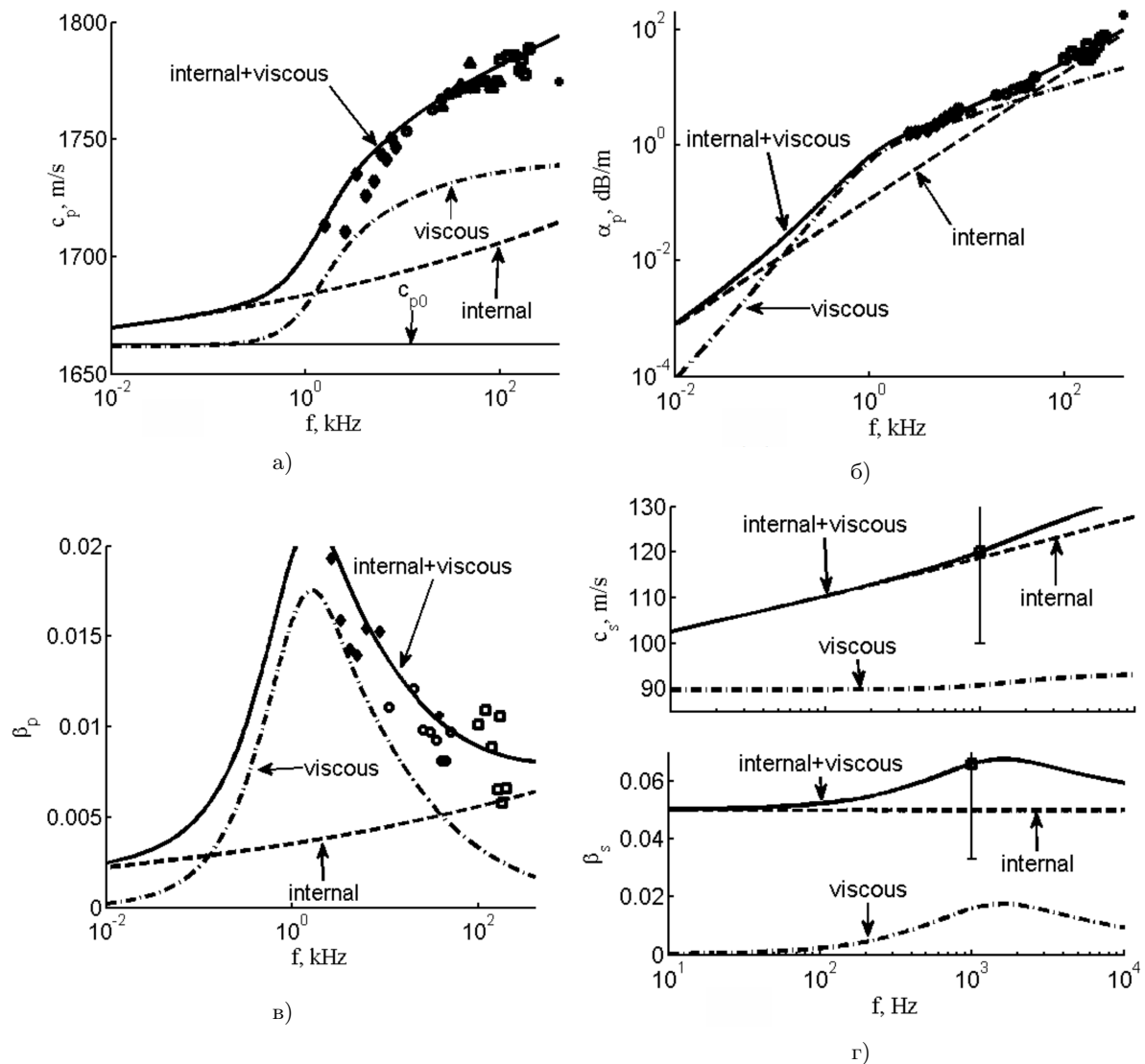


Рис. 3. Частотные зависимости фазовой скорости (а), коэффициента затухания (б), тангенса потерь продольной волны (в), фазовой скорости и тангенса потерь сдвиговой волны (г). Эксперимент SAX-99

2) Частоты ниже релаксационной. Этот участок — в окрестности первой точки пересечения графиков внутреннего и вязкого трения на рис. 3б, 3в. Здесь вязкое трение равно внутреннему. Фазовая скорость начинает возрастать, характер затухания меняет зависимость с $\alpha_p \sim f^1$ к $\alpha_p \sim f^2$.

3) Частота в окрестности релаксационной (максимум $\beta_p(f)$). Здесь величина дисперсии $\partial c_p / \partial f$ максимальна, $\alpha_p \sim f^2$, вязкие силы превышают внутреннее трение.

4) Частота выше релаксационной. Этот участок — в окрестности второй точки пересечения графиков внутреннего и вязкого трения. Величина дисперсии фазовой скорости

$\partial c_p / \partial f$ резко уменьшается, характер затухания меняет зависимость от $\alpha_p \sim f^2$ к $\alpha_p \sim f^{1/2}$ и затем к $\alpha_p \sim f^1$. Вязкие силы быстро уменьшаются и становятся меньше сил внутреннего трения.

5) Высокие частоты, верхняя граница области интересов акустики даже «очень мелко» моря. Здесь слабая дисперсия, затухание $\alpha_p \sim f^1$, определяется силами внутреннего трения.

Таким образом, учитывая, что песчаное дно с диаметром гранул $d = 0,379$ мм является широко распространенным на Крымском побережье Черного моря, диапазон частот,

где сказываются силы вязкого трения, следует принять от 500 Гц до 60 кГц.

Рассмотрим результаты третьего эксперимента, выявляющие возможности теории GS+ED несколько с другой стороны. Актуальным и в настоящее время остается вопрос о распространении звука в концентрированных суспензиях, где, кроме вязкого трения, постепенно проявляется и трение между частицами. Данные взяты из [19]. Дисперсионные кривые представлены на рис. 4. Как видно, зависимость $\alpha_p(f)$ здесь не следует «правильному» закону $\alpha_p \sim f^1$ — т.е. среда представляет собой не уплотненные горным давлением донные осадки, а, скорее, высококонцентрированную суспензию, характерную для вод мутных рек, каналов с быстрым течением. Авторами [19] эти среды названы «глинистый ил» (clayey silt) и «песчаный ил» (sandy silt). Действительно, из таких суспензий часто состоят воды мелких рек Китая. Здесь ставится обратная задача: располагая только приведенными в статье [19] рисунками, оценить по дисперсионным кривым концентрацию (пористость), размер частиц и соотношение между силами внутреннего и вязкого трения.

Второе важное отличие рассматриваемой среды от плотных осадков морского дна — здесь большей скорости соответствует и большее затухание.

На первом этапе инверсии задаемся типичными для упомянутых сред размерами гранул и пористостями [2]. Далее алгоритм инверсии строится следующим образом. Перегиб дисперсионной кривой будем формировать, изменяя a_0 (работает формула (3.5) и (3.4)), затем, варьируя перколяционную пористость, подбираем угол наклона $\alpha_p(f)$, устанавливая тем самым правильный баланс между внутренним и вязким трением. Здесь же уточняется размер гранул и пористость, поскольку увеличение размера гранул приводит к росту вязких сил и росту скорости. Результаты инверсии следующие. Глинистый ил: $d = 33,5$ мкм, $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $P = 0,59$, $a_0 = 7,9 \cdot 10^{-6}$ м, $K_m = 2,66 \cdot 10^9$ Па, $\gamma = 0,117 \cdot 10^9$ Па, $n = 0,0206$, $b = 8,25$; $\chi = 13,22$, $\varphi = 0,046$.

Песчаный ил: $d = 71,8$ мкм, $\eta = 1 \cdot 10^{-3}$ Па·с, $P = 0,485$, $a_0 = 11 \cdot 10^{-6}$ м, $K_m = 4,57 \cdot 10^9$ Па; $\gamma = 0,075 \cdot 10^9$ Па, $n = 0,031$, $b = 8,25$; $\chi = 2,5$, $\varphi = 0,2$. Приве-

дены только необходимые, связанные друг с другом параметры.

Как видно из результатов инверсий, в обоих случаях во всем диапазоне частот определяющий вклад вносит вязкое трение, $K_m \gg \gamma$, $n \ll 1$, однако внутренним трением и в этом случае пренебрегать нельзя, иначе «правильные» частотные зависимости $\alpha_p(f)$ не получаются — см. рис. 4г, график $\alpha_p(f)$ специально проведен через первую и последнюю экспериментальные точки.

Выводы

Теория GS+ED задумана как корректная альтернатива EDFM теории, применительно к решению задачи о вычислении коэффициента отражения звука от дна [14]. Теория GS+ED проста и пригодна для описания акустических характеристик продольных и поперечных волн в достаточно широком классе неконсолидированных сред — от плотных морских осадков (прежде всего) до концентрированных суспензий. Достоинством теории является возможность варьирования показателя ε в степенном законе затухания $\alpha_p \sim f^\varepsilon$ в широких пределах — от $\varepsilon = 1$, что типично для донных уплотненных осадков, до $\varepsilon = 2$ и $\varepsilon = 0,5$, что характерно для суспензий.

Теория GS+ED состоит из двух компонент: формулы (3.6) для продольной и (3.8) для поперечной волн. Физическая природа явлений, заложенных в основу вывода формулы (3.8) для поперечной компоненты поля, сомнений не вызывает. Сдвиг в неконсолидированной среде не сопровождается изменением объема — упругих связей между частицами среды нет, распространение поперечной волны возможно только за счет межгранулярного взаимодействия.

Иная ситуация для продольной волны. Следует отметить, что при выводе формулы (3.1) для упрощения результата допущена «неточность». Поскольку жидкость подвижна, некоторая ее часть будет выжиматься из рассматриваемого объема, вместо K_m в (3.1) следовало бы писать K_u — объемный модуль более мягкой среды,

$$K_u^{-1} = \frac{1}{p} \frac{\Delta V_u}{V_u} = \frac{1}{K_m} + \frac{1}{p} \frac{\Delta V_f}{V_u},$$

где ΔV_f — объем выжатой из среды жидкости. Здесь полагалось $\Delta V_f = 0$, поэтому

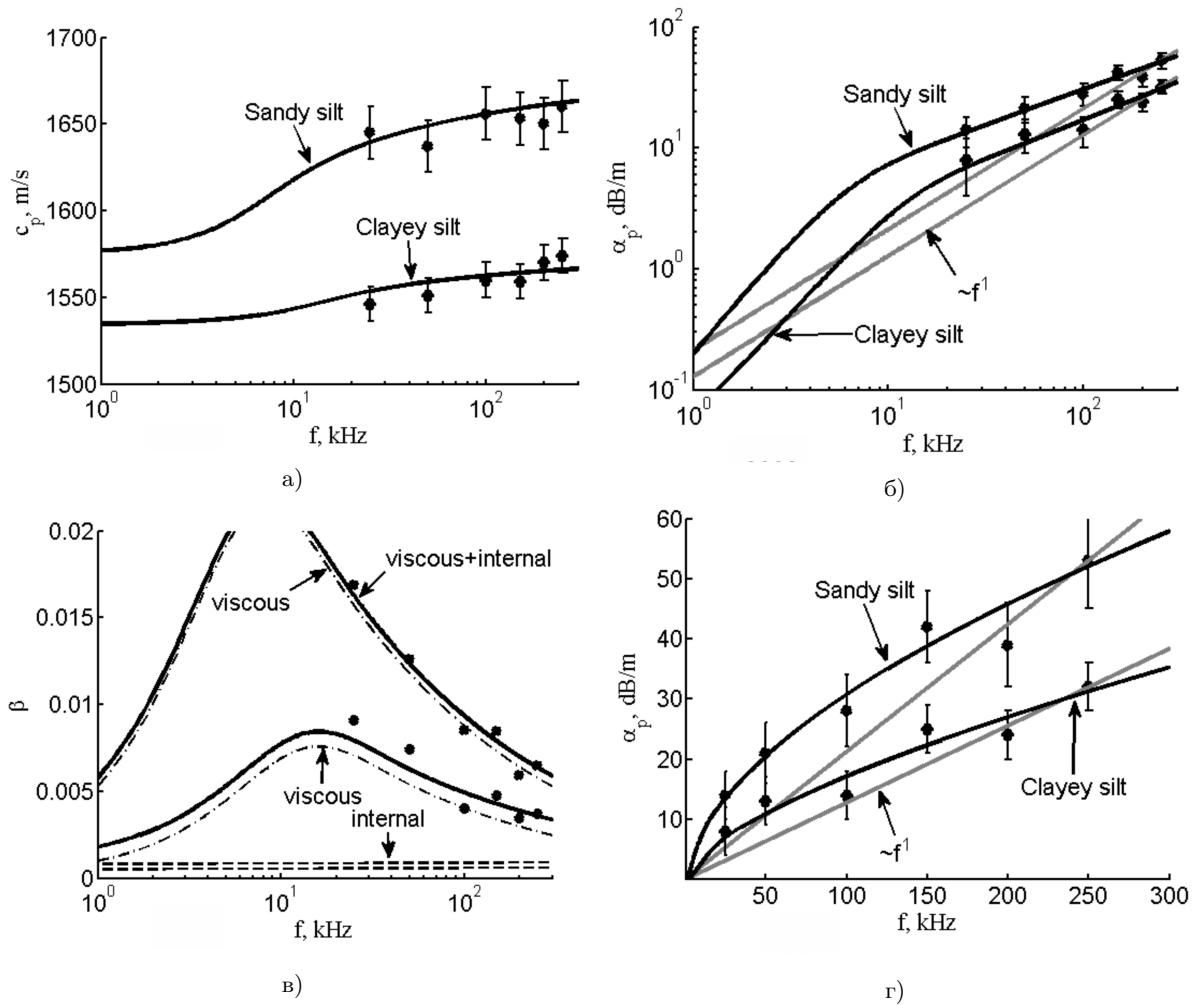


Рис. 4. Частотные зависимости фазовой скорости (а), коэффициента затухания (б), (г) и тангенса потерь (в) продольной волны. Среда — концентрированная суспензия

теория названа «GS+Effective Density». Такой был выбран способ «подключения» вязкой диссипации. Наоборот, если вычислить ΔV_f и считать $\rho_{eff} = \rho_m = -\text{const}$, то получится альтернативный, более сложный вариант, который можно назвать «GS+Effective Compressibility». На самом деле при распространении компрессионной и сдвиговой волн в неконсолидированной среде можно выделить два «источника» вязкой диссипации: первый — дилатация флюида из сжимаемой среды («ЕС» дисперсия, только для компрессионной волны); второй — инерционно-вязкое взаимодействие между гранулами и флюидом («ED» дисперсия, действует на оба типа волн). Доказательством этого утверждения служат отличия частотной зависимости затухания от закона $\alpha \sim f^1$ и для компрессионной, и для сдвиговой волны, причем для

сдвиговой — в меньшей степени [4]. Согласно теориям GS+ED или GS+EC вся дисперсия относится либо к «ЕС», либо к «ED» типу. Дисперсионные кривые, даваемые этими теориями, оказываются неразличимы. Здесь использован «ED» тип, благодаря его «широкому спектру действия». Однако дисперсионное уравнение GS+EC теории — квадратное. Квадратное дисперсионное уравнение предполагает существование продольных волн двух типов — быстрой и медленной. На первый взгляд, существование медленной волны в неконсолидированной среде вызывает удивление. На самом деле медленная волна в неконсолидированной среде — это обратный поток флюида, направленный от большего давления к меньшему. Наблюдать медленную волну можно, наступив ногой на водонасыщенный песок.

Пока представленная теория описывает только безграничную среду. Чтобы описать состояние среды в слое, должны быть разработаны следующие вопросы. Во-первых, модуль межгранулярной жесткости будет зависеть от «начального поджатия», т.е. от горного давления или от глубины, отсчитанной от уровня дна. В эксперименте SAX-99 эта глубина равна 0,3 м. Во-вторых, модуль межгранулярной жесткости будет зависеть от температуры. С понижением температуры среда становится более жесткой, скорость продольных волн растет, затухание уменьшается.

Сопоставление и обобщение результатов лабораторных и выполненных «на месте» измерений является темой следующего исследования.

Литература

1. *Hamilton E.L.* Geoacoustic modeling of the sea floor // *J. Acoust. Soc. Am.* 1980. Vol. 68. No. 5. P. 1313–1340.
2. *Jackson D.R., Richardson M.D.* High-Frequency Seafloor Acoustics. New York: Springer, 2007.
3. *Schock S.G.* A Method for estimating the physical and acoustic properties of the sea bed using chirp sonar data // *IEEE J. of Ocean. Eng.* 2004. Vol. 29. No. 4. P. 1200–1217.
4. *Kibblewhite A.C.* Attenuation of sound in marine sediments: a review with emphasis on new low frequency data // *J. Acoust. Soc. Am.* 1989. Vol. 86. No. 2. P. 716–738.
5. *Stoll R.D.* Sediment Acoustics. New York: Springer, 1989.
6. *Buckingham M.J.* Wave propagation, stress relaxation, and grain-to-grain shearing in saturated, unconsolidated marine sediments // *J. Acoust. Soc. Am.* 2000. Vol. 108. No. 6. P. 2796–2815.
7. *Buchanan J. L.* A comparison of broadband models for sand sediments // *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. Vol. 120. No. 6. P. 3584–3599.
8. *Hefner B.T., Williams K.L.* Sound speed and attenuation measurements in unconsolidated glass-bead sediments saturated with viscous pore fluids // *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. Vol. 120. No. 5. P. 2538–2548.
9. *Buckingham M.J.* On pore-fluid viscosity and the wave properties of saturated granular materials including marine sediments // *J. Acoust. Soc. Am.* 2007. Vol. 122. No. 3. P. 1486–1501.
10. *Chotiros N.P., Isakson M.J.* A broadband model of sandy ocean sediments: Biot-Stoll with contact squirt flow and shear drag // *J. Acoust. Soc. Am.* 2004. Vol. 116. No. 4. P. 2011–2022.
11. *Kimura M.* Frame bulk modulus of porous granular marine sediments // *J. Acoust. Soc.*

Am. 2006. Vol. 120. No. 2. P. 699–710.

12. *Chotiros N.P., Isakson M.J.* Acoustics of the Seabed as a Poroelastic Medium. Springer Briefs in Oceanography, 2017. 99 p.
13. *Зайцев В.Ю., Гурбатов С.Н., Прончатов-Рубцов Н.В.* Нелинейные акустические явления в структурно-неоднородных средах: эксперименты и модели: учеб. пособие. Ниж. Новгород: ИПФ РАН. 2009. 268 с.
14. *Bonomo A.L., Chotiros N.P., Isakson M.J.* On the validity of the effective density fluid model as an approximation of a poroelastic sediment layer // *J. Acoust. Soc. Am.* 2015. Vol. 138. No. 2. P. 748–757.
15. *Holm S., Nasholm S.P.* A causal and fractional all-frequency wave equation for lossy media // *J. Acoust. Soc. Am.* 2011. Vol. 130. No. 4. P. 2195–2202.
16. *Pandey V., Holm S.* Connecting the grain-shearing mechanism of wave propagation in marine sediments to fractional order wave equations // *J. Acoust. Soc. Am.* 2016. Vol. 140. No. 6. P. 4225–4236.
17. *Bedford A., Costley R.D., Stern M.* On the drag and virtual mass coefficients in Biot's equations // *J. Acoust. Soc. Am.* 1984. Vol. 76. No. 6. P. 1804–1809.
18. *Yamamoto T., Turgut A.* Acoustic wave propagation through media with arbitrary pore size distributions // *J. Acoust. Soc. Am.* 1988. Vol. 83. No. 5. P. 1744–1750.
19. *Wang J., Liu B., Kan G. Li G, Zheng J., Meng X.* Frequency dependence of sound speed and attenuation in fine-grained sediments from 25 to 250 kHz based on a probe method // *Ocean Engineering.* 2018. Vol. 160. 15 July. P. 45–53.

References

1. *Hamilton E.L.* Geoacoustic modeling of the sea floor. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1980. vol. 68, no. 5, pp. 1313–1340.
2. *Jackson D.R., Richardson M.D.* *High-Frequency Seafloor Acoustics*. New York: Springer, 2007.
3. *Schock S.G.* A Method for estimating the physical and acoustic properties of the sea bed using chirp sonar data. *IEEE J. of Ocean. Eng.*, 2004, vol. 29, no. 4, pp. 1200–1217.
4. *Kibblewhite A.C.* Attenuation of sound in marine sediments: a review with emphasis on new low frequency data. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1989, vol. 86, no. 2, pp. 716–738.
5. *Stoll R.D.* *Sediment Acoustics*. New York: Springer, 1989.
6. *Buckingham M.J.* Wave propagation, stress relaxation, and grain-to-grain shearing in saturated, unconsolidated marine sediments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2000, vol. 108, no. 6, pp. 2796–2815.

7. Buchanan J.L. A comparison of broadband models for sand sediments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, vol. 120, no. 6, pp. 3584–3599.
8. Hefner, B.T., Williams, K.L. Sound speed and attenuation measurements in unconsolidated glass-bead sediments saturated with viscous pore fluids. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, vol. 120, no. 5, pp. 2538–2548.
9. Buckingham, M.J. On pore-fluid viscosity and the wave properties of saturated granular materials including marine sediments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2007, vol. 122, no. 3, pp. 1486–1501.
10. Chotiros, N.P., Isakson, M.J. A broadband model of sandy ocean sediments: Biot–Stoll with contact squirt flow and shear drag. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2004, vol. 116, no. 4, pp. 2011–2022.
11. Kimura, M. Frame bulk modulus of porous granular marine sediments. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, vol. 120, no. 2, pp. 699–710.
12. Chotiros, N.P., Isakson M.J. *Acoustics of the seabed as a poroelastic medium*. Springer Briefs in Oceanography, 2017.
13. Zaytsev, V.Y., Gurbatov, S.N., Pronchatov-Rubtsov, N.V. *Nonlinear acoustic phenomena in structurally inhomogeneous media: experiments and models*. IPF RAN, Nizh. Novgorod, 2009. (In Russian)
14. Bonomo, A.L., Chotiros, N.P., Isakson, M.J. On the validity of the effective density fluid model as an approximation of a poroelastic sediment layer. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2015, vol. 138, no. 2, pp. 748–757.
15. Holm, S., Nasholm, S.P. A causal and fractional all-frequency wave equation for lossy media. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2011, vol. 130, no. 4, pp. 2195–2202.
16. Pandey, V., Holm, S. Connecting the grain-shearing mechanism of wave propagation in marine sediments to fractional order wave equations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2016, vol. 140, no. 6, pp. 4225–4236.
17. Bedford, A., Costley, R.D., Stern, M. On the drag and virtual mass coefficients in Biot’s equations. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1984, vol. 76, no. 6, pp. 1804–1809.
18. Yamamoto, T., Turgut, A. Acoustic wave propagation through media with arbitrary pore size distributions. *J. Acoust. Soc. Am.*, 1988, vol. 83, no. 5, pp. 1744–1750.
19. Wang, J., Liu, B., Kan, G. Li, G., Zheng, J., Meng, X. Frequency dependence of sound speed and attenuation in fine-grained sediments from 25 to 250 kHz based on a probe method. *Ocean Engineering*, 2018, vol. 160, 15 July, pp. 45–53.