

МЕХАНИКА

УДК 539.3

doi: 10.31429/vestnik-15-3-52-61

МЕТОД ФИКТИВНОГО ПОГЛОЩЕНИЯ В РЕШЕНИИ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОДНОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

Павлова А. В., Капустин М. С., Телятников И. С.

THE FICTITIOUS ABSORPTION METHOD IN SOLVING MIXED PROBLEMS
FOR ARBITRARY SIMPLY-CONNECTED AREAS

A. V. Pavlova¹, M. S. Kapustin¹, I. S. Telyatnikov²

¹ Kuban State University, Krasnodar, Russia

² Federal Research Centre Southern Research Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don,
Russia

e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru

Abstract. The work is dedicated to the development of methods for solving integral equations (IE) and systems of IE for mixed dynamic problems in the theory of elasticity, given in simply-connected areas of complex shape. A generalization of the fictitious absorption method to the case of a non-convex in the plane area occupied by a defect or stamp is presented.

The method makes it possible to describe solutions not only inside but also in the neighbourhood of the contact area boundaries and can be used to solve contact problems on the vibration of stamps, cavities or rigid inclusions of an arbitrary shape in the plane. For the areas of complex configuration, it is possible to present them as a union of convex bounded closed domains, possibly with common boundary sets.

We propose a modification of the method in the selection of the basis functions, presented in the solution only under the signs of the operators. As the latter, we choose the derivatives of the delta functions, which simplifies the construction of the solution. The results of solving the integral equation of the axisymmetric problem about steady-state oscillations of a stamp on the surface of an elastic layer with a clamped lower bound are given as an example.

Keywords: fictitious absorption method, integral equation, oscillating kernel, area of complex configuration, factorization.

Введение

Исследование контактного взаимодействия тел, подверженных вибрационным воздействиям, является важной проблемой с точки зрения механики и непростой математической задачей. Контактным взаимодействием в машиностроении определяются процессы износа, в строительстве при расчете прочностных свойств фундаментов большое значение придается контактным явлениям, изучение которых приводит к смешанным динамическим задачам. Для исследования интегральных уравнений (ИУ), порождаемых такими задачами, используются различные подходы:

метод ортогональных функций, метод сращиваемых разложений, различные вариационные, асимптотические, факторизационные методы и т.д. В работах [1, 2] проведены анализ и сравнение применяемых методов.

Совершенствование технологий и создание новых промышленных материалов, а также исследование геоматериалов определяют необходимость разработки новых механико-математических моделей и подходов для описания процессов в деформируемых телах, подверженных воздействию различных факторов, что, в свою очередь, требует дальнейшего развития методов решения интегральных

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

Капустин Михаил Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: ilux_t@list.ru.

Работа выполнена в рамках ГЗ ЮНЦ РАН, проект № 01201354241 и при частичной поддержке РФФИ (проекты 18-01-00124, 18-05-80008).

уравнений (ИУ) и систем, порождаемых такими задачами.

Один из эффективных методов решения ИУ I-го рода с разностным ядром, заданного в ограниченной области, и систем таких интегральных уравнений носит название метода фиктивного поглощения (МФП). Основу этого метода [3] составляет приведение ИУ с сильно осциллирующим ядром к уравнению с экспоненциально убывающими с ростом аргумента ядром, решение которого указанный метод использует в качестве базового при решении исходного ИУ. Таким образом, МФП позволяет рассматривать соответствующие задачи для сред с поглощением или статические задачи, для решения которых существует множество хорошо зарекомендовавших себя приближенных методов, как вспомогательные.

В связи с широким внедрением в строительство, микроэлектронику и т.д. конструкционных материалов, описание поведения и свойств которых требует рассмотрения моделей анизотропных упругих сред, развитие методов решения контактных задач для таких сред занимает особое место. МФП применительно к анализу пространственных динамических задач для анизотропных тел развит В.А. Бабешко в [3, 4]. На основе метода факторизации и фиктивного поглощения в [5] изучена задача для ортотропного цилиндра. В [6–8] МФП получил дальнейшее развитие в применении к решению ИУ и СИУ смешанных задач для моделей сред, обладающих сложными свойствами, в том числе при различных условиях в области контакта и учете связности полей.

В работе представлена модификация метода, позволяющая решать интегральные уравнения в произвольных односвязных, в том числе невыпуклых, областях. В отличие от широко применяемой схемы, подробно изложенной в [6], в качестве базисных функций для вводимой вспомогательной составляющей решения использованы производные δ -функций Дирака, носителем которых является граничное множество области контакта.

1. Общая схема метода фиктивного поглощения для произвольной односвязной области

Общую схему метода решения интегрального уравнения в области произвольной кон-

фигурации можно представить следующим образом.

Введем в плоскости контакта штампа с упругой средой (или в плоскости расположения внутреннего дефекта) декартову систему координат $x_1 O x_2$. Пусть интегральное уравнение смешанной задачи имеет вид

$$\mathbf{K}q \equiv \iint_{\Omega} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) q(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2 = f(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Omega. \quad (1.1)$$

Если рассматриваемая СИУ соответствует задаче о вибрации штампа сложной в плане формы на поверхности упругой среды, то неизвестная функция $q(x_1, x_2)$ описывает распределение контактных напряжений под штампом, а функция $f(x_1, x_2)$ — заданную амплитуду перемещений подошвы штампа.

Будем полагать, что область контакта Ω , возможно, невыпуклая, может быть представлена конечным объединением выпуклых замкнутых ограниченных областей

$$\Omega = \bigcup_{m=1}^M D_m, \quad M < \infty,$$

имеющих в качестве пересечений лишь одномерные (или нульмерные) множества. В этом случае (1.1) можно рассматривать как систему

$$\sum_{m=1}^M \mathbf{K}_m q_m = f_s(x_1, x_2), \quad (1.2)$$

$$(x_1, x_2) \in D_s, \quad s = \overline{1, M},$$

$$\mathbf{K}_m q_m = \iint_{D_m} k(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2) \times q_m(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \quad (1.3)$$

$$(x_1, x_2) \in D_m,$$

$$k(x_1, x_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} K(\alpha_1, \alpha_2) \times \exp(-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) d\alpha_1 d\alpha_2,$$

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = \alpha^2, \quad f_s = P_{[D_s]} f(x_1, x_2),$$

$P_{[D_s]}$ — проектор на область D_s .

Модель рассматриваемой упругой среды определяет свойства символа ядра K . Последнее описаны в [2–6] для различных типов сред. В дальнейшем будем считать, что

символ функции Грина $K(\alpha_1, \alpha_2) \equiv K(\alpha)$ и $K(\alpha) = K(-\alpha)$. На вещественной $K(\alpha)$ может иметь конечное число (зависящее от частоты колебаний) вещественных полюсов p_k и нулей z_k ($k = \overline{1, N}$). Кроме того, она имеет счетное множество комплексных z_k, p_k ($k = \overline{N+1, \infty}$) с точками сгущения в секторах малых углов, содержащих мнимую ось [3, 4]. При $|\alpha| \rightarrow \infty$ справедлива асимптотика $K(\alpha) = C|\alpha|^{-1} [1 + O(\alpha^{-1})]$. Положение контуров интегрирования Γ_1, Γ_2 определяется условиями излучения и поведением элементов $K(\alpha)$ на вещественной оси [2, 3].

Введем во внутренних точках $O_m(a_m, b_m)$ областей разбиения D_m локальные системы координат $x_1^m O_m x_2^m$, $O_m \in D_m$, выбрав оси параллельными осям $x_1 O x_2$. Пусть функции $R_m = R_m(\psi)$ описывают уравнения границ S_m .

Как доказано в [9], ИУ задач о вибрации системы штампов для некоторых соотношений параметров могут иметь неединственное решение, что также справедливо в случае задач для сред с множественными дефектами. Однако далее приняты положения, имеющие место для многих задач, встречающихся на практике, для упрощения построений. Так, для простоты полагается, что границы областей D_s разбиения таковы, что ИУ

$$\int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi) \exp(ip_k R_s(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi = b_{ks}(\gamma),$$

$$0 \leq \gamma \leq 2\pi, \quad k = \overline{1, N}, \quad s = \overline{1, M}$$

для любых k, s при $b_{ks} \in C(0, 2\pi)$ однозначно разрешимы [3].

В соответствии со схемой метода фиктивного поглощения [3, 6] вводится в рассмотренные функция $\Pi(\alpha) = E_N(\alpha^2) Q_N^{-1}(\alpha^2)$, где

$$E_N(\alpha^2) = \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - z_k^2),$$

$$Q_N(\alpha^2) \equiv \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - p_k^2).$$

Здесь через p_k и z_k соответственно обозначены полюса и нули $K(\alpha)$, $p_k, z_k \in R$. Очевидно, $\Pi(\alpha) = 1 + O(\alpha^{-1})$, $|\alpha| \rightarrow \infty$.

Функция символа ядра в (1.3) $K(\alpha)$ представляется в виде

$$K(\alpha) = K_0(\alpha) \Pi(\alpha), \quad (1.4)$$

где $K_0(\alpha)$ соответствует символу ядра уравнения статической задачи (задачи для среды с сильным поглощением), на вещественной оси она является регулярной и на бесконечности, $|\alpha| \rightarrow \infty$, ее асимптотическое поведение совпадает с поведением $K(\alpha)$.

Следуя [3, 6], далее решение уравнения (1.1) ищется в виде

$$q(x_1, x_2) = p(x_1, x_2) + \phi(x_1, x_2), \quad (1.5)$$

где введена следующая функция ϕ :

$$\phi(x_1, x_2) = \sum_{s=1}^M \phi_s(x_1, x_2),$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N G_k(-\Delta) \int_0^{2\pi} \delta[x_1 - a_s - R_s(\psi) \cos \psi] \times \\ & \times \delta[x_2 - b_s - R_s(\psi) \sin \psi] g_{ks}(\psi) d\psi = \\ & = \sum_{k=1}^N \phi(x_1 - a_s, x_2 - b_s, G_k, R_s, f_{ks}) \equiv \\ & \equiv \phi_s(x_1, x_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_k(\alpha^2) &= (\alpha^2 - p_1^2) \dots \\ & (\alpha^2 - p_{k-1}^2) (\alpha^2 - p_{k+1}^2) \dots (\alpha^2 - p_N^2), \end{aligned}$$

где g_{ks} — некоторые однозначные функции, в дальнейшем подлежащие определению, Δ — двумерный оператор Лапласа. В развитие [3, 6] здесь реализована модификация в части выбора базисных вспомогательных функций.

Для введенной функции выполняются условия:

$$\begin{aligned} V_2 \phi(x_1, x_2) &= V_2 q(x_1, x_2), \\ V_2 \phi_s(x_1, x_2) &= V_2 q(x_1, x_2, D_s), \\ & \text{при } \alpha^2 = p_k^2, \quad k = \overline{1, N}, \end{aligned}$$

где V_2 — оператор двумерного преобразования Фурье. Тогда $V_2 p(x_1, x_2) = 0$, $\alpha^2 = p_k^2$, $k = \overline{1, N}$.

Не нарушая общности, будем полагать однократными все вещественные нули z_k и полюса p_k функции $K(\alpha)$ (или ее аппроксимирующей). Для случая кратных полюсов формулировки приведенных условий подробно рассмотрены в [3].

Внося соотношение (1.5) с учетом (1.4) для символа ядра (1.3), получим для ИУ (1.1)

$$\mathbf{K}_0 t = f(x_1, x_2) - \mathbf{K}_0 V_2^{-1} \Pi(\alpha, N) V_2 \phi, \quad (1.6)$$

где новая неизвестная

$$t(x_1, x_2) = V_2^{-1} \Pi(\alpha, N) V_2 p(x_1, x_2),$$

V_2^{-1} — двумерный оператор обращения Фурье.

Предположим, что обратный оператор \mathbf{K}_0^{-1} (1.6) построен. Запишем уравнение (1.6) в форме

$$\mathbf{K}_0 t = f(x_1, x_2) - \mathbf{K}_0 \phi - S \phi,$$

$$S \phi = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{\Omega} \iint_{\Gamma_1} \iint_{\Gamma_2} K_0(\alpha) [\Pi(\alpha) - 1] \times$$

$$\times \exp(-i(\alpha_1(x_1 - \xi_1) + \alpha_2(x_2 - \xi_2))) d\alpha_1 d\alpha_2 \times \\ \times \phi(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2.$$

Тогда

$$t = \mathbf{K}_0^{-1} f(x_1, x_2) - \phi - \mathbf{K}_0^{-1} S \phi$$

и решение исходного ИУ можно представить

$$q = p + \phi = V_2^{-1} \Pi^{-1} V_2 t + \phi = \\ = V_2^{-1} \Pi^{-1} V_2 [\mathbf{K}_0^{-1} f - \phi - \mathbf{K}_0^{-1} S \phi] + \phi = \\ = \mathbf{K}_0^{-1} f - \mathbf{K}_0^{-1} S \phi + V_2^{-1} [\Pi^{-1} - 1] \times \\ \times V_2 [\mathbf{K}_0^{-1} f - \phi - \mathbf{K}_0^{-1} S \phi]. \quad (1.7)$$

Согласно [3] должны выполняться условия

$$V_2 [\mathbf{K}_0^{-1} f - \phi - \mathbf{K}_0^{-1} S \phi] = 0, \quad (1.8) \\ \alpha^2 = z_k^2, \quad k = \overline{1, N}.$$

Принимая во внимание, что носителем функции $V_2^{-1} \Pi(\alpha, N) V_2 \phi$ в общем случае является вся плоскость, выделим в представлении этой функции обобщенную составляющую ϕ_0 , носитель которой сосредоточен в Ω . Оставшаяся составляющая ϕ_2 будет классической функцией, имеющей носитель во всей плоскости. Для этого рассмотрим соотношение

$$V_2^{-1} \Pi(\alpha, N) V_2 \phi = \\ = V_2^{-1} \Pi(\alpha, N) \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^M G_k(\alpha^2) \times \\ \times \exp(i(a_s \alpha_1 + b_s \alpha_2)) \times \\ \times \int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi) \exp(i\alpha R(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi$$

и выделим полиномиальные составляющие у полученных рациональных функций, представив

$$\Pi(\alpha, N) G_k(\alpha^2) = P_k(\alpha^2) + R_k(\alpha^2),$$

$$P_k(\alpha^2) = [E_N(\alpha^2) - E_N(p_k^2)] (\alpha^2 - p_k^2)^{-1} \approx \\ \approx \alpha^{2N-2},$$

$$R_k(\alpha^2) = E_N(p_k^2) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1} \approx \alpha^{-2},$$

$$|\alpha| \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$V_2^{-1} \Pi(\alpha, N) V_2 \phi = \phi_0(x_1, x_2) + \phi_2(x_1, x_2),$$

$$\phi_2 =$$

$$= V_2^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^M R_k(\alpha^2) \exp(i(a_s \alpha_1 + b_s \alpha_2)) \times \\ \times \int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi) \exp(i\alpha R(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi.$$

Таким образом,

$$t = \mathbf{K}_0^{-1} f(x_1, x_2) - \phi_0(x_1, x_2) - \\ - \mathbf{K}_0^{-1} P_{[\Omega]} \mathbf{K}_0 \phi_2. \quad (1.9)$$

Для корректной записи (1.9) в последнем слагаемом правой части применен проектор на область Ω $P_{[\Omega]}$, поскольку функция ϕ_2 имеет в качестве носителя всю плоскость, тогда

$$p(x_1, x_2) = V_2^{-1} \Pi^{-1}(\alpha, N) V_2 \times \\ \times [\mathbf{K}_0^{-1} f(x_1, x_2) - \phi_0(x_1, x_2) - \mathbf{K}_0^{-1} P_{[\Omega]} \mathbf{K}_0 \phi_2].$$

При этом (1.8) можно записать

$$V_2 P_{[\Omega]} [\mathbf{K}_0^{-1} f(x_1, x_2) - \phi_0 - \mathbf{K}_0^{-1} P_{[\Omega]} \mathbf{K}_0 \phi_2] = \\ = 0,$$

$$\alpha^2 = z_n^2, \quad n = \overline{1, N}.$$

Последнее соотношение приводится к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N P_k(z_n) \int_0^{2\pi} f_{ks}(\psi) \times \\ & \times \exp(iz_n R(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi = \\ & = \exp(-i(a_s \alpha_1 + b_s \alpha_2)) V_2 P_{[D_s]} \times \\ & \times [\mathbf{K}_0^{-1} f(x_1, x_2) - \mathbf{K}_0^{-1} P_{[\Omega]} \mathbf{K}_0 \phi_2], \\ & \alpha^2 = z_n^2, \quad n = \overline{1, N}, \quad s = \overline{1, M}. \end{aligned}$$

Ранее было принято допущение, что левая часть этой системы разрешима относительно неизвестных $f_{ks}(\psi)$, при этом входящая в правую часть системы функция ϕ_2 содержит эти неизвестные. Произведя обращение левой части, получим систему линейных ИУ II-го рода относительно $f_{ks}(\psi)$, которую в свою очередь можно решать путем дискретизации.

С учетом полученных соотношений после ряда преобразований решение (1.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2) &= V_2^{-1} \Pi^{-1}(\alpha, N) V_2 \times \\ & \times [\phi_2 + \mathbf{K}_0^{-1} f(x_1, x_2) - \mathbf{K}_0^{-1} P_{[\Omega]} \mathbf{K}_0 \phi_2], \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} \phi_2 &= V_2^{-1} \sum_{k=1}^N \sum_{s=1}^M E_N(p_k^2) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1} \times \\ & \times \bar{g}_{ks}(\alpha) \exp(i(a_s \alpha_1 + b_s \alpha_2)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ks}(\alpha) &= \\ & = \int_0^{2\pi} g_{ks}(\psi) \exp(i\alpha R(\psi) \cos(\psi - \gamma)) d\psi. \end{aligned}$$

Выделив у функции ϕ_2 составляющие с носителем в области D_s $\phi_{2s}^+ = \phi_2(x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in D_s$, и вне ее — ϕ_{2s}^- ,

$$\phi_2^- = \phi_2(x_1, x_2) - \sum_{s=1}^M \phi_{2s}^+, \quad s = \overline{1, M},$$

можно осуществить упрощение представления решения. Введя обозначения $q_s(x_1, x_2) \equiv q(x_1, x_2, D_s) = q(x_1, x_2)$ для $(x_1, x_2) \in D_s$, (1.10) для решений (1.2) можно переписать в виде

$$q(x_1, x_2, D_s) = V_2^{-1} \Pi^{-1}(\alpha, N) F(\alpha_1, \alpha_2, D_s),$$

$$\begin{aligned} F(\alpha_1, \alpha_2, D_s) &= \\ & = V_2 P_{[D_s]} [\mathbf{K}_0^{-1} f - \mathbf{K}_0^{-1} P_{[\Omega]} \mathbf{K}_0 \phi_2^-] + V_2 \phi_{2s}^-. \end{aligned}$$

Подлежащие определению g_{ks} находятся из системы [3]

$$F(\alpha_1, \alpha_2, D_s) = 0, \quad \alpha^2 = z_n^2, \quad n = \overline{1, N}.$$

Представление решения (1.10) позволяет наглядно представить структуру и особенности распределения напряжений при взаимодействии штампа с упругой средой. Область применения полученных формул, дающих приближенные решения динамических задач, определяется областью применения решений соответствующих задач для сред с затуханием. В окончательном решении введенная функция ϕ присутствует только под знаками интегральных операторов. При этом вводимые неизвестные на стыковочных границах D_s взаимно уничтожаются.

2. Пример применения модификации МФП для решения интегрального уравнения осесимметричной задачи

В качестве иллюстрации применения в МФП модифицированной системы вспомогательных функций обратимся к интегральному уравнению осесимметричной задачи. Остановимся подробнее на реализации метода на примере вспомогательного уравнения осесимметричной задачи для слоя $\{r \geq 0; -h \leq z \leq 0\}$ с заземленной нижней гранью, колеблющегося с частотой ω под действием штампа и системы заглубленных вертикальных источников, постановка и получение интегрального уравнения которой подробно описаны в [10, 11]. Смещения точек среды в цилиндрической системе координат описываются вектором амплитуд перемещений $\mathbf{u} = \{u_r, u_z\}$, удовлетворяющим уравнениям Ляме. Нагрузка на включениях, распределенная по глубине, моделируется компонентами объемной силы. Кроме того, на поверхности упругой среды ($z = 0$) в круговой области ($r \leq a$) приложена осесимметричная вертикальная нагрузка.

Для построения решения интегрального уравнения задачи в [11] используется вспомогательное ИУ вида

$$\int_0^a k(r, \tau) q_\eta(\tau) \tau d\tau = J_0(\eta r), \quad (2.1)$$

$$0 \leq \tau \leq a.$$

Ядро (2.1) имеет представление

$$k(r, \tau) = \int_{\sigma_0} K(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha,$$

$$K(\alpha) = \frac{\kappa_2^2}{4\rho c_2^2 \bar{\Delta}(\alpha)} \sigma_1 \times \\ \times (\alpha^2 \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - \sigma_1 \sigma_2 \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h)),$$

$$\bar{\Delta}(\alpha) = \sigma_1 \sigma_2 (s^2 + \alpha^4) \operatorname{ch}(\sigma_1 h) \operatorname{ch}(\sigma_2 h) - \\ - \alpha^2 (s^2 + \sigma_1^2 \sigma_2^2) \operatorname{sh}(\sigma_1 h) \operatorname{sh}(\sigma_2 h) - 2s\alpha^2 \sigma_1 \sigma_2,$$

$$s = \alpha^2 - 0,5\kappa_2^2, \quad \sigma_j = \sqrt{\alpha^2 - \kappa_j^2},$$

$$\kappa_j^2 = (\omega/c_j)^2 \quad (j = 1, 2),$$

κ_j — соответственно волновые числа продольной и поперечной волн, ω — частота, $c_1 = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $c_2 = \sqrt{\mu/\rho}$, λ , μ — коэффициенты Ляме, ρ — плотность упругого слоя, расположение σ_0 подчинено условиям, описанным ранее.

Здесь функция $K(\alpha)$ символа ядра может быть представлена в виде (1.4). Как и в работах [3, 6 и др.] при реализации МФП в приближенном представлении (1.4) использована функция $K_0(\alpha) = C(\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$, где B — заданный параметр аппроксимации, такой вид $K_0(\alpha)$ учитывает также возможность ее факторизации. Приближение $\Pi(\alpha)$ осуществляется рациональной

$$\Pi(\alpha, N) = \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - z_k^2) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1},$$

описанной выше. Новая неизвестная p вводится представлением (1.5)

$$q_\eta(r) = p(r) + \phi(r), \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$Q(p_m) = \Phi(p_m), \quad m = \overline{1, N}.$$

Здесь p_m — полюса функции $\Pi(\alpha)$, расположенные выше σ_0 . Через $Q(\alpha)$, $\Phi(\alpha)$ обозначены интегральные преобразования Бесселя $q(r)$ и $\phi(r)$ соответственно

$$Q(\alpha) = \int_0^a q(r) J_0(\alpha r) r dr,$$

$$\Phi(\alpha) = \int_0^a \phi(r) J_0(\alpha r) r dr.$$

Для $\phi(r)$ в качестве системы линейно независимых функций выбраны производные дельта-функций Дирака с носителем на границе штампа a

$$\phi(r) = \sum_{k=1}^N C_k G_k(L) \delta(r - a),$$

$$L = - \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) \right),$$

где

$$G_k(\alpha^2) = (\alpha^2 - p_1^2) \dots \\ \dots (\alpha^2 - p_{k-1}^2) (\alpha^2 - p_{k+1}^2) \dots (\alpha^2 - p_N^2),$$

C_k — неизвестные константы, подлежащие в дальнейшем определению.

Следуя общей схеме, вводим новую неизвестную

$$t(r) = \int_0^\infty \Pi(\alpha) P(\alpha) J_0(\alpha r) \alpha d\alpha$$

и, используя представление символа ядра, получим для новой неизвестной ИУ с убывающим ядром (1.6) в виде

$$\int_0^a k_0(r, \tau) t(\tau) \tau d\tau = J_0(\eta r) - \\ - \sum_{k=1}^N \int_0^a k(r, \tau) C_k G_k(L_N) \delta(\tau - a) \tau d\tau, \quad (2.2)$$

$$k_0(r, \tau) = \int_0^\infty K_0(\alpha) J_0(\alpha r) J_0(\alpha \tau) \alpha d\alpha.$$

В [3, 6] представлено приближенное решение (2.2) с правой частью в виде функции Бесселя $J_0(\eta r)$, полученное с помощью методов решения статических задач для $K_0(\alpha) = (\alpha^2 + B^2)^{-1/2}$, использованное в

данной работе для построения решения (2.1), которое принимает вид

$$\begin{aligned}
q_\eta(r) = & J_0(\eta r) K^{-1}(\eta) + \\
& + \frac{i\pi a}{2} K_0^{-1} \sum_{l=1}^N \beta_l J_0(z_l r) G_1(\eta, z_l) - \\
& - \frac{a\pi^2}{4} \sum_{k=1}^N g_k \sum_{l=1}^N \beta_l J_0(z_l r) G_2(z_l, p_k) + \\
& + b(\eta) \left(\frac{e^{-B(a-r)}}{\sqrt{a^2 - r^2}} + \right. \\
& + i\pi \sqrt{\frac{a\varepsilon}{2}} \sum_{l=1}^N \beta_l H_0^1(z_l a) J_0(z_l r) \left. + \right. \\
& + \left. \left[i \sqrt{\frac{a\pi}{2}} \frac{e^{-B(a-r)}}{\sqrt{a^2 - r^2}} - \right. \right. \\
& - \left. \left. \frac{a\pi\sqrt{\pi\varepsilon}}{2} \sum_{l=1}^N \beta_l J_0(z_l r) H_0^1(z_l a) \right] \right) \times \\
& \times \sum_{k=1}^N \frac{g_k}{\sqrt{B - ip_k}} H_0^1(p_k a)
\end{aligned}$$

с точностью до описывающего поведение функции $K(\alpha)$ при $|\alpha| \rightarrow \infty$ постоянного множителя.

Так как в окончательном выражении вводимые вспомогательные функции находятся лишь под знаком интегрального оператора, построенное представление решения не содержит обобщенных составляющих. Здесь использованы обозначения, введенные в [3, 6]: $\varepsilon = 1/B$,

$$\begin{aligned}
G_1(\eta, z) = & [\eta J_{n+1}(\eta a) H_n^1(z a) - \\
& - z J_n(\eta a) H_{n+1}^1(z a)] (\eta^2 - z^2)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_2(z, p) = & [p H_{n+1}^1(p a) H_n^1(z a) - \\
& - z H_n^1(p a) H_{n+1}^1(z a)] (z^2 - p^2)^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(\eta) = & \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \left[H_0^1(\eta a) \sqrt{B + i\eta} + \right. \\
& + \left. H_0^2(\eta a) \sqrt{B - i\eta} \right],
\end{aligned}$$

где

$$\beta_l = \prod_{k=1}^N (z_l^2 - p_k^2) \prod_{k=1, k \neq l}^N (z_l^2 - z_k^2),$$

H_0^j — функции Ханкеля ($j = 1, 2$), функции g_k включают неизвестные C_k следующим образом

$$g_k = a C_k E_N(p_k) J_0(ap_k),$$

$$E_N(\alpha) = \prod_{k=1}^N (\alpha^2 - z_k^2),$$

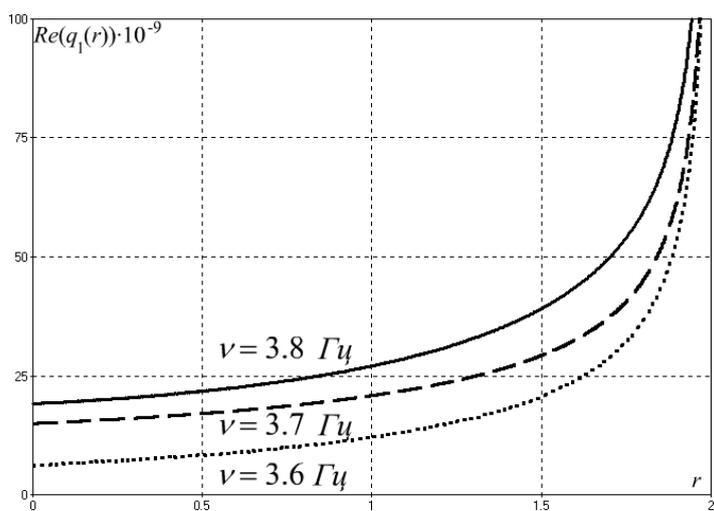
алгебраическая система для отыскания которых (1.8) может быть представлена относительно g_k

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N g_k \left[(p_k H_1^1(ap_k) J_0(a\alpha) - \right. \\
- \alpha H_0^1(ap_k) J_1(a\alpha)) (\alpha^2 - p_k^2)^{-1} - \\
- 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\pi(B - ip_k)}} H_0^1(ap_k) J_0(a\alpha) \left. \right] = \\
= \frac{2}{i\pi} \frac{\sqrt{B^2 + \eta^2}}{\alpha^2 - \eta^2} \times \\
\times [\eta J_1(a\eta) J_0(a\alpha) - \alpha J_1(a\alpha) J_0(a\eta)] - \\
- \frac{2}{i\pi} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{a}} J_0(a\alpha) b(\eta),
\end{aligned}$$

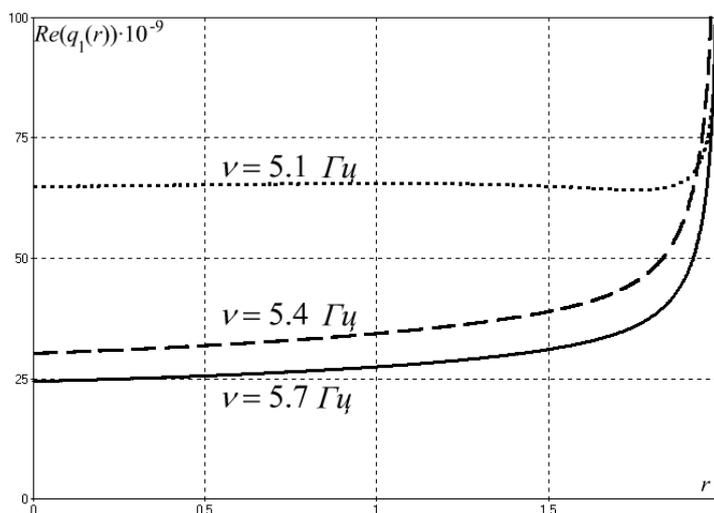
$$\alpha = z_l, \quad l = \overline{1, N}.$$

На рис. 1а–1в представлены графики зависимости вещественной части амплитуды вертикальной компоненты контактных напряжений $q(r)$, создаваемых штампом от пространственной координаты, принимающей значения из занимаемого штампом интервала $[0, a]$. Вычисления производились при единичной амплитуде смещений подошвы штампа, в формулах ω — безразмерная частота определялась соотношением $\omega = 2\pi\nu l_0/c_0$, где ν — частота (Гц), $l_0 = 1$ м, $c_0 = 10^3$ м/с, при вычислениях положено $B = 10$. Рис. 1 иллюстрирует изменение величины амплитуды $q(r)$ с увеличением частоты колебаний.

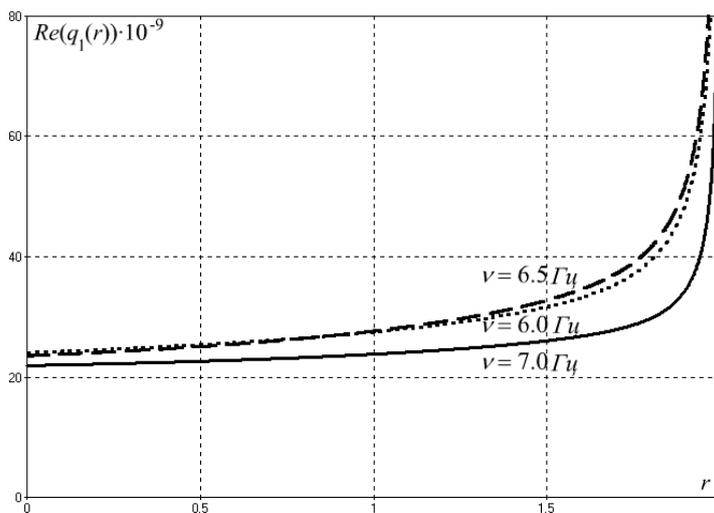
МФП позволяет использовать арсенал методов решения статических смешанных задач, являясь полуаналитическим, он устраняет недостатки прямых численных методов.



а)



б)



в)

Рис. 1. $c_1 = 0,2 \cdot 10^3$ м/с, $c_2 = 0,12 \cdot 10^3$ м/с, $\rho = 1,4 \cdot 10^3$ кг/м³, $h = 20$ м, $a = 2$ м

Заключение

В работе предложено обобщение метода фиктивного поглощения (МФП) решения интегральных уравнений контактных задач механики деформируемого твердого тела на случай невыпуклой в плане области штампа или дефекта. Представленный метод может быть применен для решения ИУ и СИУ контактных задач для оснований с дефектами типа плоских трещин и включений, находящихся в параллельных плоскостях, рассмотренных в работах [12–14]. Элементы матриц-символов ядер ИУ задач об установившихся колебаниях полугораниченной среды, вызванных вибрациями внутренних полостей-трещин или покрытий, моделируемых пластинами Кирхгофа, не удовлетворяют условию убывания на бесконечности. В таких случаях можно осуществить регуляризацию оператора \mathbf{K} , например, вынося из обеих частей уравнения дифференциальный оператор, как это сделано в [15]. Подобное преобразование приводит к ИУ с классической функцией ядра, решение которого строится в соответствии с описанной схемой.

МФП позволяет произвести приближенный расчет контактных напряжений, основанный на выделении особенности на границе штампа и детальном анализе параметров напряженно-деформированного состояния под штампом и вне его, и может быть эффективно использован при решении задач для произвольных в плане областей штампов или дефектов.

Литература

1. Механика контактных взаимодействий / под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
2. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. Бабешко В.А. Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 265 с.
4. Бабешко В.А. К теории пространственных контактных задач для анизотропных сред // Докл. АН СССР. 1981. Т. 256, № 2. С. 324–328.
5. Ватульян А.О., Овсепян В.В., Пряхина О.Д. Контактная динамическая задача для ортотропного цилиндра // Изв. АН АрмССР. Механика. 1983. Т.36, № 4. С. 47–55.
6. Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д. Динамика массивных тел и резонансные явления

в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 248 с.

7. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамические контактные задачи для предварительно напряженных электроупругих тел. М.: Физматлит, 2006. 272 с.
8. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 312 с.
9. Бабешко В.А. О неединственности решений динамических смешанных задач для систем штампов // Докл. АН СССР. 1990. Т. 310. № 6. С. 1327–1330.
10. Капустин М.С., Павлова А.В., Рубцов С.Е., Телятников И.С. К моделированию взаимодействия фундамента с деформируемой грунтовой средой // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества (ЧЭС). 2015. № 3. С. 44–51.
11. Kapustin M., Pavlova A., Rubtsov S., Telyatnikov I. Model of foundation-base system under vibration load // Communications in Computer and Information Science (CCIS). 2014. Vol. 487. P. 168–173.
12. Babeshko V.A., Buzhan V.V., Williams R.T. Solid by an array of rigid planar inclusions // Doklady Physics. 2002. Vol. 47. Iss. 2. P. 156–158.
13. Пряхина О.Д., Смирнова А.В. Эффективный метод решения динамических задач для слоистых сред с разрывными граничными условиями // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68. Вып. 3. С. 499–506.
14. Babeshko V.A., Pavlova A.V., Ratner S.V., Williams R.T. Problems on the vibration of an elastic half-space containing a system of interior cavities // Doklady Physics. 2002. Т. 47. № 9. С. 677–679.
15. Kardovskii I.V., Pryakhina O.D. Apparent absorption method for solving planar problems of interfacial cracking // Doklady Physics. 2006. Т. 51. № 10. С. 574–577.

References

1. Vorovich, I.I., Aleksandrov, V.M. (eds.) *Mechanics of contact interactions*. Fizmatlit, Moscow, 2001. (In Russian)
2. Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, Zh.F. *Dynamics of inhomogeneous linearly elastic media*. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)
3. Babeshko, V.A. *Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of the theory of elasticity*. Nauka, Moscow, 1984. (In Russian)
4. Babeshko, V.A. On the theory of spatial contact problems for anisotropic media. *Doklady AN SSSR* [Rep. of the USSR Academy of Sciences], 1981, vol. 256, no. 2, pp. 324–328. (In Russian)

5. Vatul'yan, A.O., Ovsepyan, V.V., Pryahina, O.D. Contact dynamic problem for an orthotropic cylinder. *Izvestiya AN ArmSSR. Mekhanika* [News of Academy of Sciences of the Armenian SSR], 1983, vol. 36, no. 4, pp. 47–55. (In Russian)
6. Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryahina, O.D. *Dynamics of massive bodies and resonant phenomena in deformable media*. Nauchnyj mir, Moscow, 1999. (In Russian)
7. Kalinchuk, V.V., Belyankova, T.I. *Dynamic contact problems for prestressed electroelastic bodies*. Fizmatlit, Moscow, 2006. (In Russian)
8. Kalinchuk, V.V., Belyankova, T.I. *Dynamics of the surface of inhomogeneous media*. Fizmatlit, Moscow, 2009. (In Russian)
9. Babeshko, V.A. On the nonuniqueness of solutions of dynamical mixed problems for stamping systems. *Doklady AN SSSR [Rep. of the USSR Academy of Sciences]*, 1990, vol. 310, no. 6, pp. 1327–1330. (In Russian)
10. Kapustin, M.S., Pavlova, A.V., Rubtsov, S.E., Telyatnikov, I.S. On the modeling of the interaction of the foundation with the deformed soil environment. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2015, no. 3, pp. 44–51. (In Russian)
11. Kapustin, M., Pavlova, A., Rubtsov, S., Telyatnikov, I. Model of foundation-base system under vibration load. *Communications in Computer and Information Science (CCIS)*, 2014, vol. 487, pp. 168–173.
12. Babeshko, V.A., Buzhan, V.V., Williams, R.T. Solid by an array of rigid planar inclusions. *Doklady Physics*, 2002, vol. 47, iss. 2, pp. 156–158.
13. Pryahina, O.D., Smirnova, A.V. Effective method for solving dynamical problems for layered media with discontinuous boundary conditions. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2004, vol. 68, no. 3, pp. 499–506. (In Russian)
14. Babeshko, V.A., Pavlova, A.V., Ratner, S.V., Williams, R.T. Problems on the vibration of an elastic half-space containing a system of interior cavities. *Doklady Physics*, 2002, vol. 47, no. 9, pp. 677–679.
15. Kardovskii, I.V., Pryakhina, O.D. Apparent absorption method for solving planar problems of interfacial cracking. *Doklady Physics*, 2006, vol. 51, no. 10, pp. 574–577.

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2018

© Павлова А. В., Капустин М. С., Телятников И. С., 2018

Статья поступила 11 сентября 2018 г.