

МЕХАНИКА

УДК 539.3

doi: 10.31429/vestnik-15-3-62-71

МАТРИЧНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ СИМВОЛА ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТУРБУЛЕНТНОЙ ДИФФУЗИИ В МНОГОСЛОЙНЫХ СРЕДАХ

Сыромятников П. В.

MATRIX METHOD FOR CONSTRUCTING THE SYMBOL OF THE GREEN'S FUNCTION FOR STATIONARY PROBLEMS OF TURBULENT DIFFUSION IN MULTILAYER MEDIA

P. V. Syromyatnikov^{1,2}¹ Southern Scientific Centre of the Russian Academy of Sciences, Krasnodar Branch, Krasnodar, Russia² Kuban State University, Krasnodar, Russia

e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru

Abstract. In this paper were considered boundary value problems of the third type for three-dimensional stationary equations of turbulent diffusion in multilayer semibounded media. An effective recurrent matrix algorithm for constructing the Fourier symbol of the Green's function is developed, in which all the intermediate quantities are presented in an explicit form. The method was developed for piecewise homogeneous media, but it allows solving similar problems for continuously stratified media by means of the approximation of a gradient medium by a multilayer medium with piecewise constant coefficients. This method is stable for any Peclet numbers. An economical and simple method for calculating the two-dimensional inverse Fourier transform is proposed. The solutions of the Dirichlet and Neumann space problems for a packet of 50 layers are given, all parameters of each layer vary linearly with the vertical coordinate. The proposed methods may be of interest for solving direct and inverse problems of modeling the scattering of impurities.

Keywords: turbulent diffusion, multilayered medium, Green's function, Fourier transform, numerical integration.

Введение

Уравнения конвекции-диффузии являются основой многих математических моделей [1–3]. Рассматриваемые далее уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами конвекции-диффузии интерпретируются как описание процесса конвективного массопереноса и турбулентной диффузии в газообразных или жидких средах, хотя допускают и другие физические толкования, например, как уравнения теплопроводности и теплопереноса, диффузии электрически заряженной примеси в твердом теле и др. [1]. Следует отметить, что при моделировании различных гидро- и газодинамических процессов конвективно-диффузионный перенос играет решающую роль. В частности, в решении экологических проблем, связанных с описанием процессов распростране-

ния загрязняющих веществ в воздушной и водной среде. Традиционно решение краевых задач конвекции-диффузии основывается на конечно-разностных или конечно-элементных аппроксимациях [1]. В целом, теория разностных методов решения задач математической физики применительно к проблемам окружающей среды хорошо развита [1]. Указанные методы универсальны, однако корректно применимы только к ограниченным областям. В случае полуограниченных сред, рассматриваемых далее, решение может быть получено с помощью интегральных преобразований. Данный подход был развит в работах Бабешко В.А. и его учеников [2, 3]. Приведенный далее алгоритм решения краевых задач турбулентной диффузии основан на идеях матриц-пропагаторов для упругих сред, для которых были разработаны рекуррентные матричные соотношения [4]. В случае

Сыромятников Павел Викторович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математики и механики Южного научного центра РАН, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru.

Работа выполнена в рамках реализации Госзадания ЮНЦ РАН на 2018 г. (01201354241).

конвективно-диффузионных процессов данный алгоритм оказался намного более простым из-за уменьшения размерности задачи (с 6 до 2) и возможности явного выражения всех промежуточных величин. Данное обстоятельство делает алгоритм особенно эффективным и позволяет рассматривать среды с сотнями слоев и более, т.е. близкие к градиентным средам. На основании приведенного алгоритма градиентные среды, в которых отдельные параметры (или все параметры уравнений) зависят от одной (вертикальной) координаты, могут быть достаточно точно приближены многослойной средой с кусочно-постоянными коэффициентами. Метод одинаково эффективен в диапазонах малых и больших чисел Пекле.

1. Постановка задачи и общая схема решения для однородной среды

Рассмотрим для среднemasштабного приближения стационарное уравнение турбулентной диффузии в однородной среде

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma \phi - \mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = q(x, y, z). \quad (1.1)$$

Здесь ϕ — концентрация вещества, u, v, w — скорости переноса в направлениях OX, OY, OZ соответственно, w_g — скорость вертикального оседания вещества, σ — коэффициент поглощения, μ, ν — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно, q — функция источника. Условие непрерывности среды $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ для вектора скоростей $\mathbf{u} = \{u, v, w\}^T$ в случае постоянных скоростей выполняется автоматически. При формулировке краевых задач дополнительно необходимо потребовать выполнение условия убывания функции ϕ на бесконечности $\phi(x, y, z) \rightarrow 0$ при $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$.

Первые три члена уравнения (1.1) в левой части являются конвективными, два последних — диффузионными. Рассмотрим вначале однородное уравнение

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma \phi - \mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) - \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.2)$$

Произведем двукратное преобразование Фурье по переменным x, y . Получим в образах Фурье $\Phi = F_{x,y}[\phi]$ следующее уравнение второго порядка

$$\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - (w - w_g) \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \theta \Phi = 0, \quad (1.3)$$

$$\theta = \mu(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) - i(\alpha_1 u + \alpha_2 v) + \sigma,$$

где α_1, α_2 — параметры преобразования Фурье по x и по y соответственно. Введем вектор вида

$$\tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \Phi' \end{pmatrix}, \quad \Phi' = \frac{d\Phi}{dz}.$$

В этом случае уравнение (1.3) эквивалентно матричной системе уравнений

$$\frac{d\tilde{\Phi}}{dz} = \mathbf{A} \tilde{\Phi}, \quad (1.4)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\theta}{\nu} & \frac{(w - w_g)}{\nu} \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен матрицы \mathbf{A} имеет вид

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = \lambda^2 - \lambda \frac{(w - w_g)}{\nu} - \frac{\theta}{\nu}.$$

Запишем характеристический многочлен в виде

$$\nu \lambda^2 - \lambda(w - w_g) - \theta = 0. \quad (1.5)$$

Корни (1.5) при $w \neq w_g$ или $\sigma \neq 0$ всегда различны

$$\lambda_{1,2} = \frac{(w - w_g) \pm \sqrt{(w - w_g)^2 + 4\nu\theta}}{2\nu}.$$

Хотя случай кратного корня $\lambda_{1,2} = 0$ несложен для анализа, в дальнейшем он не рассматривается. Решение системы первого порядка (1.4) может быть сведено к решению собственной проблемы вида

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{h} = 0. \quad (1.6)$$

Несложно показать, что собственные векторы матрицы \mathbf{A} с точностью до постоянного множителя имеют вид

$$\mathbf{h}_j = \{1, \lambda_j\}^T, \quad j = 1, 2.$$

Фундаментальная система решений уравнения (1.4), т.о. имеет вид

$$\mathbf{L}(z) = \left\{ \tilde{\Phi}_1(z), \tilde{\Phi}_2(z) \right\},$$

$$\tilde{\Phi}_j(z) = \mathbf{h}_j \exp(\lambda_j z) = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_j \end{pmatrix} \exp(\lambda_j z),$$

$$j = 1, 2.$$

Отметим отличия полученных представлений. Общее решение однородного уравнения второго порядка (1.3) записывается в виде скалярной суммы

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z) = \sum_{j=1}^2 t_j \exp(\lambda_j z). \quad (1.7)$$

Решение же уравнения (1.4) представляется в виде аналогичной векторной суммы, что существенно для дальнейших рассуждений

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{\Phi}_1(z) + \tilde{\Phi}_2(z) = \sum_{j=1}^2 t_j \mathbf{h}_j \exp(\lambda_j z).$$

Коэффициенты t_j определяются из некоторых дополнительных условий краевой задачи. Решение исходной задачи может быть представлено двойным интегралом Фурье

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\alpha_1, \alpha_2, z) \times \exp(-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)) d\alpha_1 d\alpha_2. \quad (1.8)$$

2. Символ матрицы Грина для многослойного пакета слоев

Описываемый далее метод построения символа матрицы Грина для уравнений конвекции-диффузии аналогичен подходу к построению матрицы Грина для многослойных упругих сред [4], он имеет специфику, связанную с переходом от векторов большой размерности к скалярным величинам или векторам малой размерности.

Пусть среда представляет собой однородные слои

$$\{-\infty \leq x, y \leq +\infty\},$$

$$z_1 = 0, \quad z_n < z_{n+1}, \quad z_{N+1} = h, \quad z = x_3,$$

$$n = \overline{1, N}. \quad N \geq 2,$$

где каждый слой имеет свои, в общем случае различные, материальные константы $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $w^{(n)}$, $w_g^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$. Распространение вещества в каждом слое описывается

уравнением (1.2) с соответствующими параметрами. Рассмотрим краевую задачу с граничными условиями третьего типа

$$\left(a_1 \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} - b_1 \phi^{(1)} \right) \Big|_{z=z_1} = q(x, y), \quad (2.1)$$

$$(x, y) \in \Omega,$$

$$\left(a_1 \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial z} - b_1 \phi^{(1)} \right) \Big|_{z=z_1} = 0,$$

$$(x, y) \notin \Omega,$$

$$\phi^{(j-1)} \Big|_{z=z_j} = \phi^{(j)} \Big|_{z=z_j}, \quad (2.2)$$

$$\nu^{(j-1)} \frac{\partial \phi^{(j-1)}}{\partial z} \Big|_{z=z_j} = \nu^{(j)} \frac{\partial \phi^{(j)}}{\partial z} \Big|_{z=z_j},$$

$$j = \overline{2, N},$$

$$\left(a_N \frac{\partial \phi^{(N)}}{\partial z} - b_N \phi^{(N)} \right) \Big|_{z=z_{N+1}} = 0. \quad (2.3)$$

Здесь Ω — ограниченная область, $q(x, y)$ — заданная функция. Применяв двукратное преобразование Фурье к уравнениям (1.2) и граничным условиям (2.2), для каждого слоя получаем свою систему обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно вектора $\tilde{\Phi}^{(n)} = F_{x,y}(\tilde{\phi}^{(n)}) = \{ \tilde{\Phi}_1^{(n)}, \tilde{\Phi}_2^{(n)} \}$, решение которой также сводится к собственной проблеме вида (1.6).

В каждом слое искомым вектор $\tilde{\Phi}^{(n)}$ можно представить следующим образом:

$$\tilde{\Phi}^{(n)} = t_1^{(n)} \mathbf{h}_1^{(n)} \exp(\lambda_1^{(n)} z) + t_2^{(n)} \mathbf{h}_2^{(n)} \exp(\lambda_2^{(n)} z),$$

$$n = \overline{1, N}.$$

где $\lambda^{(n)}$, $\mathbf{h}^{(n)}$ — собственные значения и собственные векторы системы (1.6) для n -го слоя,

$$\mathbf{t}^{(n)} = \begin{pmatrix} t_1^{(n)} \\ t_2^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

векторы, подлежащие определению. В скалярном виде решение уравнения (1.7) для каждого слоя имеет вид

$$\Phi^{(n)} = t_1^{(n)} \exp(\lambda_1^{(n)} z) + t_2^{(n)} \exp(\lambda_2^{(n)} z),$$

$$n = \overline{1, N}.$$

Условия на границах раздела слоев

$$\nu^{(n)} \frac{d\Phi^{(n)}(z_{n+1})}{dz} = \nu^{(n+1)} \frac{d\Phi^{(n+1)}(z_{n+1})}{dz},$$

$$\Phi^{(n)}(z_{n+1}) = \Phi^{(n+1)}(z_{n+1}),$$

$$n = \overline{1, N-1}.$$

Относительно вектора неизвестных $\mathbf{t}^{(n)}$ (2.4) равенства (2.2) приводят к линейным алгебраическим уравнениям с блочно-диагональной структурой

$$\mathbf{C}^{(n)}(z_{n+1})\mathbf{t}^{(n)} - \mathbf{C}^{(n+1)}(z_{n+1})\mathbf{t}^{(n+1)} = 0, \quad (2.5)$$

$$n = \overline{1, N-1},$$

где

$$\mathbf{C}^{(n)}(z) = \mathbf{R}^{(n)}\mathbf{H}^{(n)}\mathbf{E}^{(n)}(z) = \mathbf{C}^{(n)}(0)\mathbf{E}^{(n)}(z), \quad (2.6)$$

$$\mathbf{R}^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 & \nu^{(n)} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}^{(n)} = (\mathbf{h}_1^{(n)}, \mathbf{h}_2^{(n)}) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1^{(n)} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2^{(n)} \end{pmatrix} \right),$$

$$\mathbf{E}^{(n)}(z) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1^{(n)}z) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2^{(n)}z) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}^{(n)}(0) = \mathbf{R}^{(n)}\mathbf{H}^{(n)} = \begin{pmatrix} \nu^{(n)}\lambda_1^{(n)} & \nu^{(n)}\lambda_2^{(n)} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $\mathbf{C}^{(n)}(0)$ найдем обратную матрицу

$$\left(\mathbf{C}^{(n)}(0)\right)^{-1} = \frac{1}{D_w^{(n)}} \begin{pmatrix} 1 & -\nu^{(n)}\lambda_2^{(n)} \\ -1 & \nu^{(n)}\lambda_1^{(n)} \end{pmatrix},$$

где

$$D_w^{(n)} = \sqrt{(w^{(n)} - w_g^{(n)})^2 + 4\nu^{(n)}\theta^{(n)}}. \quad (2.7)$$

На высотах $z = z_1, z = z_{N+1}$ относительно векторов $\mathbf{t}^{(1)}, \mathbf{t}^{(N)}$ имеем уравнения

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1)\mathbf{t}^{(1)} = 1, \quad \tilde{\mathbf{C}}^{(N)}(z_{N+1})\mathbf{t}^{(N)} = 0$$

или

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1)\mathbf{t}^{(1)} = 0, \quad \tilde{\mathbf{C}}^{(N)}(z_{N+1})\mathbf{t}^{(N)} = 1,$$

в зависимости от того, заданы ли источники на нижней или верхней границе пакета. Вид матриц-строк размерности (1×2) $\tilde{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1), \tilde{\mathbf{C}}^{(N)}(z_{N+1})$ определяется граничными условиями (2.1), (2.3) на поверхностях $z = z_1$ и $z = z_{N+1}$

$$\tilde{\mathbf{C}}^{(i)}(z_j) = \left((a_i + b_i\lambda_1^{(i)}) \exp(\lambda_1^{(i)}z_j), \right. \\ \left. (a_i + b_i\lambda_2^{(i)}) \exp(\lambda_2^{(i)}z_j) \right).$$

Рассмотрим вначале прямой алгоритм вывода символа матрицы Грина \mathbf{K} . Линейная система уравнений относительно матриц \mathbf{t} (2.4) имеет вид

$$\mathbf{C}\mathbf{t} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{t}^{(1)} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{t}^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.8)$$

Матрица системы \mathbf{C} имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_1^1 & 0 & & 0 \\ \mathbf{C}_2^1 & -\mathbf{C}_2^2 & & \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & & & \mathbf{C}_N^{N-1} & -\mathbf{C}_N^N \\ & & & 0 & \tilde{\mathbf{C}}_{N+1}^N \end{pmatrix}.$$

Здесь $\mathbf{C}_j^i = \mathbf{C}^{(j)}(z_j)$.

Если источник задан в плоскости $z = z_1$, тогда, очевидно

$$\mathbf{t} = \mathbf{C}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Имея решения (2.9), для вектора \mathbf{t} размерности $(2N)$ непосредственно получаем

$$K^{(n)}(z) = t_1^{(n)} \exp(\lambda_1^{(n)}z) + t_2^{(n)} \exp(\lambda_2^{(n)}z), \quad (2.10)$$

$$z_n \leq z \leq z_{n+1}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Применение формулы (2.9) для обращения блочно-диагональной матрицы \mathbf{C} может быть эффективно при небольшом числе слоев N . Размерность комплекснозначной матрицы \mathbf{C}

$(2N \times 2N)$, размерность соответствующей действительной матрицы будет $(4N \times 4N)$. На практике формулу (2.9) вполне можно применять при $N \leq 5$. Данные формулы также целесообразно применять в качестве тестовых.

При больших N более эффективен рекуррентный алгоритм решения уравнений (2.8). Рассмотрим следующие матричные произведения:

$$\mathbf{D}^{(n)} = (\mathbf{C}^{(n)}(z_{n+1}))^{-1} \mathbf{C}^{(n+1)}(z_{n+1}). \quad (2.11)$$

Согласно формуле (2.6) матрицу $\mathbf{D}^{(n)}$ также можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(n)} &= \mathbf{E}^{(n)}(-z_{n+1})(\mathbf{C}^{(n)}(0))^{-1} \\ &\cdot \mathbf{C}^{(n+1)}(0)\mathbf{E}^{(n+1)}(z_{n+1}) = \\ &= \mathbf{E}^{(n)}(-z_{n+1})\mathbf{D}_0^{(n)}\mathbf{E}^{(n+1)}(z_{n+1}), \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{E}^{(n)}(-z_{n+1}) = \begin{pmatrix} \psi_{11}^{(n)} & 0 \\ 0 & \psi_{22}^{(n)} \end{pmatrix},$$

$$\psi_{11}^{(n)} = \exp(-\lambda_1^{(n)} z_{n+1}),$$

$$\psi_{22}^{(n)} = \exp(-\lambda_2^{(n)} z_{n+1}),$$

$$\mathbf{E}^{(n+1)}(z_{n+1}) = \begin{pmatrix} \psi_{11}^{(n+1)} & 0 \\ 0 & \psi_{22}^{(n+1)} \end{pmatrix},$$

$$\psi_{11}^{(n+1)} = \exp(\lambda_1^{(n+1)} z_{n+1}),$$

$$\psi_{22}^{(n+1)} = \exp(\lambda_2^{(n+1)} z_{n+1}).$$

Матрицу $\mathbf{D}_0^{(n)}$ можно получить явно

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_0^{(n)} &= (\mathbf{C}^{(n)}(0))^{-1} \mathbf{C}^{(n+1)}(0) = \\ &= \frac{1}{D_w^{(n)}} \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\xi_{11} = \nu^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} - \nu^{(n)} \lambda_2^{(n)},$$

$$\xi_{12} = \nu^{(n+1)} \lambda_2^{(n+1)} - \nu^{(n)} \lambda_2^{(n)},$$

$$\xi_{21} = -\nu^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} + \nu^{(n)} \lambda_1^{(n)},$$

$$\xi_{22} = -\nu^{(n+1)} \lambda_2^{(n+1)} + \nu^{(n)} \lambda_1^{(n)},$$

где $D_w^{(n)}$ имеет вид (2.7). Матрицу $\mathbf{D}^{(n)}$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} D_{11}^{(n)} &= \left(\nu^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} - \nu^{(n)} \lambda_2^{(n)} \right) \times \\ &\times \exp \left(z_{n+1} (-\lambda_1^{(n)} + \lambda_1^{(n+1)}) \right) \left(D_w^{(n)} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} D_{12}^{(n)} &= \left(\nu^{(n+1)} \lambda_2^{(n+1)} - \nu^{(n)} \lambda_2^{(n)} \right) \times \\ &\times \exp \left(z_{n+1} (-\lambda_1^{(n)} + \lambda_2^{(n+1)}) \right) \left(D_w^{(n)} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{21}^{(n)} &= \left(-\nu^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} + \nu^{(n)} \lambda_1^{(n)} \right) \times \\ &\times \exp \left(z_{n+1} (-\lambda_2^{(n)} + \lambda_1^{(n+1)}) \right) \left(D_w^{(n)} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{22}^{(n)} &= \left(-\nu^{(n+1)} \lambda_2^{(n+1)} + \nu^{(n)} \lambda_1^{(n)} \right) \times \\ &\times \exp \left(z_{n+1} (-\lambda_2^{(n)} + \lambda_2^{(n+1)}) \right) \left(D_w^{(n)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\mathbf{t}^{(j-1)} = \mathbf{D}^{(j-1)} \mathbf{t}^{(j)}, \quad j = \overline{2, N},$$

и

$$\mathbf{t}^{(1)} = \mathbf{D}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{t}^{(N)} = \tilde{\mathbf{D}}^{(N-1)} \mathbf{t}^{(N)}.$$

Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}^{(N-1)} &= \mathbf{D}^{(1)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)}, \\ \mathbf{M} &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^{(1)}(z_1) \tilde{\mathbf{D}}^{(N-1)} \\ \tilde{\mathbf{C}}^{(N)}(z_{N+1}) \end{pmatrix}^{-1}. \end{aligned}$$

При необходимости матрицу \mathbf{M} также можно выразить явно, однако вместо обращения матрицы предпочтительнее численно решать соответствующую систему уравнений. Далее, если источник задан на поверхности $z = z_1$, то

$$\mathbf{t}^{(N)} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и векторы $\mathbf{t}^{(n)}$ имеют вид

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{M} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n = \overline{1, N-1}.$$

Если же источник задан на поверхности $z = z_{N+1}$, то

$$\mathbf{t}^{(N)} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Векторы $\mathbf{t}^{(n)}$ имеют вид

$$\mathbf{t}^{(n)} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(N-1)} \mathbf{M} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad n = \overline{1, N-1}.$$

В матричном произведении

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(m)} = \\ = \mathbf{E}^{(n)}(-z_{n+1}) \tilde{\mathbf{D}}_0^{(n)} \tilde{\mathbf{D}}_0^{(n+1)} \tilde{\mathbf{D}}_0^{(n+2)} \dots \\ \dots \tilde{\mathbf{D}}_0^{(m+1)} \tilde{\mathbf{D}}_0^{(m)} \mathbf{E}^{(m+1)}(z_{m+1}), \end{aligned}$$

матрицы $\tilde{\mathbf{D}}_0^{(n)}$ представляются следующим образом

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{D}}_0^{(n)} &= \mathbf{E}^{(n)}(z_n - z_{n+1}) \mathbf{D}_0^{(n)}, \\ \tilde{D}_{0,11}^{(n)} &= \left(\nu^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} - \nu^{(n)} \lambda_2^{(n)} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\lambda_1^{(n)} (z_n - z_{n+1}) \right) \left(D_w^{(n)} \right)^{-1}, \\ \tilde{D}_{0,12}^{(n)} &= \left(\nu^{(n+1)} \lambda_2^{(n+1)} - \nu^{(n)} \lambda_2^{(n)} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\lambda_1^{(n)} (z_n - z_{n+1}) \right) \left(D_w^{(n)} \right)^{-1}, \\ \tilde{D}_{0,21}^{(n)} &= \left(-\nu^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} + \nu^{(n)} \lambda_1^{(n)} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\lambda_2^{(n)} (z_n - z_{n+1}) \right) \left(D_w^{(n)} \right)^{-1}, \\ \tilde{D}_{0,22}^{(n)} &= \left(-\nu^{(n+1)} \lambda_2^{(n+1)} + \nu^{(n)} \lambda_1^{(n)} \right) \times \\ &\quad \times \exp \left(\lambda_2^{(n)} (z_n - z_{n+1}) \right) \left(D_w^{(n)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_0^{(n)} \tilde{\mathbf{D}}_0^{(n+1)} \tilde{\mathbf{D}}_0^{(n+2)} \dots \tilde{\mathbf{D}}_0^{(m+1)} \tilde{\mathbf{D}}_0^{(m)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{D} = \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(m)} = \\ = \mathbf{E}^{(n)}(-z_{n+1}) \tilde{\mathbf{D}} \mathbf{E}^{(m+1)}(z_{m+1}), \end{aligned}$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{D}^{(n)} \dots \mathbf{D}^{(m)}, \\ D_{11} &= \tilde{D}_{11} \exp(-\lambda_1^{(n)} z_{n+1} + \lambda_1^{(m+1)} z_{m+1}), \\ D_{12} &= \tilde{D}_{12} \exp(-\lambda_1^{(n)} z_{n+1} + \lambda_2^{(m+1)} z_{m+1}), \\ D_{21} &= \tilde{D}_{21} \exp(-\lambda_2^{(n)} z_{n+1} + \lambda_2^{(m+1)} z_{m+1}), \\ D_{22} &= \tilde{D}_{22} \exp(-\lambda_2^{(n)} z_{n+1} + \lambda_2^{(m+1)} z_{m+1}). \end{aligned}$$

Представление символа функции $K^{(n)}$ имеет прежний вид (2.10). Символ решения $\Phi^{(n)}$ выражается через $K^{(n)}$ и символ функции источника $Q = F_{x,y}[q]$ следующим образом

$$\Phi^{(n)}(z) = K^{(n)}(z)Q,$$

$$z_n \leq z \leq z_{n+1}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Описанный рекуррентный алгоритм является относительно простым в реализации и эффективным в вычислительном отношении.

3. Численные примеры

Далее приводятся два примера расчетов $\phi^{(n)}(x, y, z)$ для модельной многослойной среды из 50 слоев с линейно изменяющимися свойствами всех параметров, в которой отношение безразмерных средних скоростей переноса к средним коэффициентам диффузии равно 10 ($Pe \approx 10$), а краевые условия в основании слоя различны (задача Дирихле, задача Неймана).

В декартовых системах координат функция $\phi^{(n)}(x, y, z)$ может быть представлена в виде двойного интеграла Фурье, аналогичного (1.8), через символы функции Грина $K^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, z)$ и функции источника $Q(\alpha_1, \alpha_2)$

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K^{(n)}(\alpha_1, \alpha_2, z) \times \\ &\quad \times Q(\alpha_1, \alpha_2) \exp(-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)) d\alpha_1 d\alpha_2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В полярных системах координат

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad \gamma = \arctg(\alpha_2/\alpha_1), \\ \alpha_1 &= \alpha \cos \gamma, \quad \alpha_2 = \alpha \sin \gamma, \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \delta = \arctg(y/x),$$

$$x = r \cos \delta, \quad y = r \sin \delta,$$

интеграл (3.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(r, \delta, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} K^{(n)}(\alpha, \gamma, z) \times \\ &\quad \times Q(\alpha, \gamma) \alpha \exp(-ir\alpha \cos(\gamma - \delta)) d\alpha d\gamma. \end{aligned} \quad (3.3)$$

В свою очередь двойной интеграл (3.3) может быть вычислен как повторный

$$\phi^{(n)}(r, \delta, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^\infty K^{(n)}(\alpha, \gamma, z) \times \\ \times Q(\alpha, \gamma) \alpha \exp(-ir\alpha \cos(\gamma - \delta)) d\alpha. \quad (3.4)$$

Вычисление данных интегралов традиционно основывается на теореме о вычетах [2]. В плоской постановке, когда интеграл (3.1) становится одномерным, данный подход относительно несложно реализовать, т.к. полюсы являются чисто мнимыми, кроме того, например, для однородного слоя почти периодическими [2]. В неоднородном пространственном случае мнимые полюсы дополнительно сложным образом зависят от γ в (3.2), что сильно затрудняет численный расчет интегралов (3.1), (3.3), (3.4) по вычетам. В данной работе использован другой подход к расчету интеграла (3.4) на основе метода прямого контурного интегрирования [4], ранее предложенного для упругих сред. Для процессов конвекции-диффузии, в отличие от упругих сред, при использовании данного метода нет необходимости вводить дополнительно внутреннее трение, поскольку вещественные особенности отсутствуют. Данное обстоятельство упрощает применение метода и повышает его точность. Для мероморфной функции $K^{(n)}(\alpha, \gamma, z)$, не имеющей вещественных особенностей в виде полюсов и точек ветвления, известна оценка [2]

$$K^{(n)}(\alpha, \gamma, z) \approx \exp(-c(\gamma, z)\alpha), \\ c(\gamma, z) > 0, \quad \alpha \rightarrow \infty, \quad \gamma \in [0, 2\pi], \quad (3.5) \\ z \neq 0.$$

При расчетах верхний предел интегрирования в (3.4) необходимо ограничить некоторой конечной величиной $0 < R < \infty$. Практическая оценка радиуса интегрирования, получаемая из (3.5), может быть дана формулой

$$R = \alpha_{\max} \approx \frac{n}{c_{\min} \lg e},$$

где n — задаваемая разница (в десятичных порядках, равная, например, $n = 7$) между максимальными и минимальными значениями величин $K^{(n)}(\alpha)$ при вещественных (α) (учитываемый динамический диапазон функции $K^{(n)}(\alpha)$). Величину $c_{\min} = \min_{0 \leq \gamma < 2\pi} c(\gamma, z)$

несложно определить численно. Для расчетов была использована форма интеграла.

$$\phi^{(n)}(r, \delta, z) \approx \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^R K^{(n)}(\alpha, \gamma, z) \times \\ \times Q(\alpha, \gamma) \alpha \exp(-ir\alpha \cos(\gamma - \delta)) d\alpha.$$

Интегрирование производилось с использованием адаптивных алгоритмов интегрирования быстро осциллирующих функций библиотеки NAG [5].

На рис. 1, 2 представлены решения $\phi^{(n)}(x, y, z)$ двух пространственных задач для модельной многослойной среды из $N = 50$ слоев в плоскости (x, z) : $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, $y = 0$. Параметры всех слоев $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $w^{(n)}$, $w_g^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$, z_n для двух задач одинаковы и определяются по однотипной формуле

$$c^{(n)} = p_1 + (p_N - p_1)(n - 1)/N, \quad n = \overline{1, N}.$$

Пределы значений безразмерных параметров, записанные в виде $c = \{p_1, p_N\}$, следующие

$$u = \{0, 2; -0, 2\}, \quad v = \{0, 01; 0, 2\}, \\ w = \{0, 4; 0, 6\}, \quad w_g = \{0, 2; 0, 4\}, \\ \mu = \{0, 01; 0, 02\}, \quad \nu = \{0, 01; 0, 02\}, \\ \sigma = \{0, 01; 0, 02\}, \quad z = \{0; 1\}.$$

Источник $q(x, y)$, действующий в плоскости $z = z_1 = 0$, задан в виде равномерного распределения

$$q(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| \leq l \wedge |y| \leq l, \\ 0, & |x| > l \vee |y| > l, \end{cases}$$

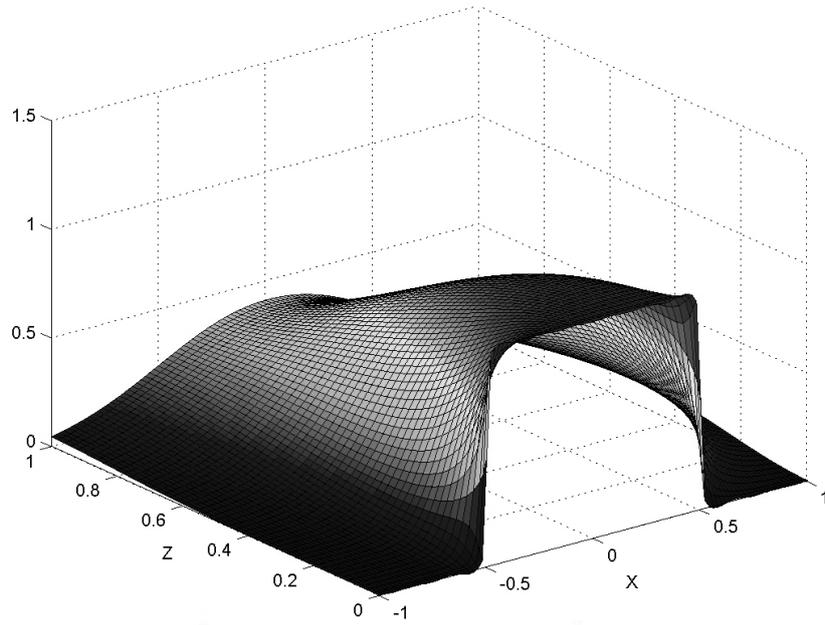
$$Q(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{4 \sin l\alpha_1 \sin l\alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2}, \quad l = 0, 5.$$

Первому рисунку соответствует краевая задача

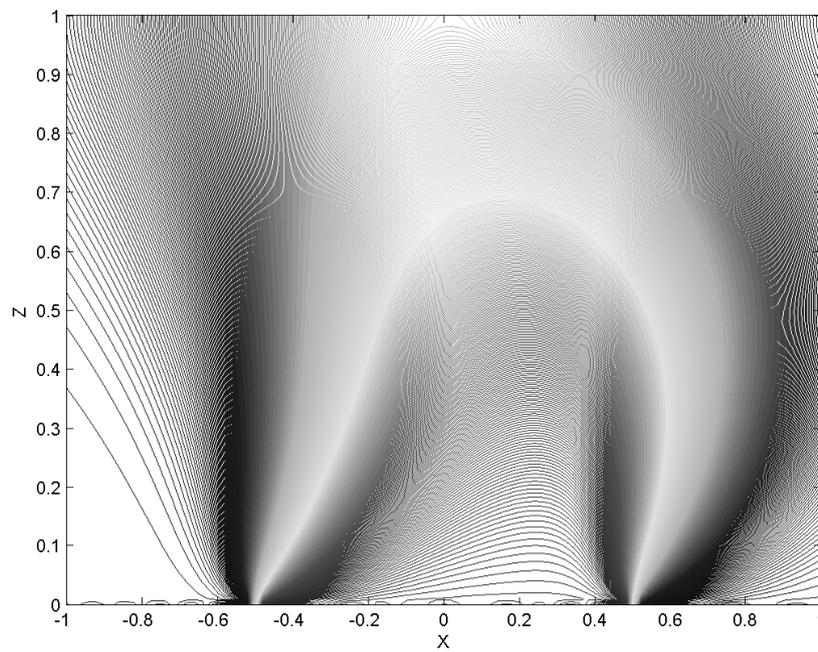
$$\phi^{(1)}(x, y) \Big|_{z=0} = \begin{cases} q(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \phi^{(N)}(x, y)}{\partial z} \Big|_{z_{N+1}=h} = 0,$$

которая является частным случаем задачи (2.1)–(2.3) при значениях коэффициентов

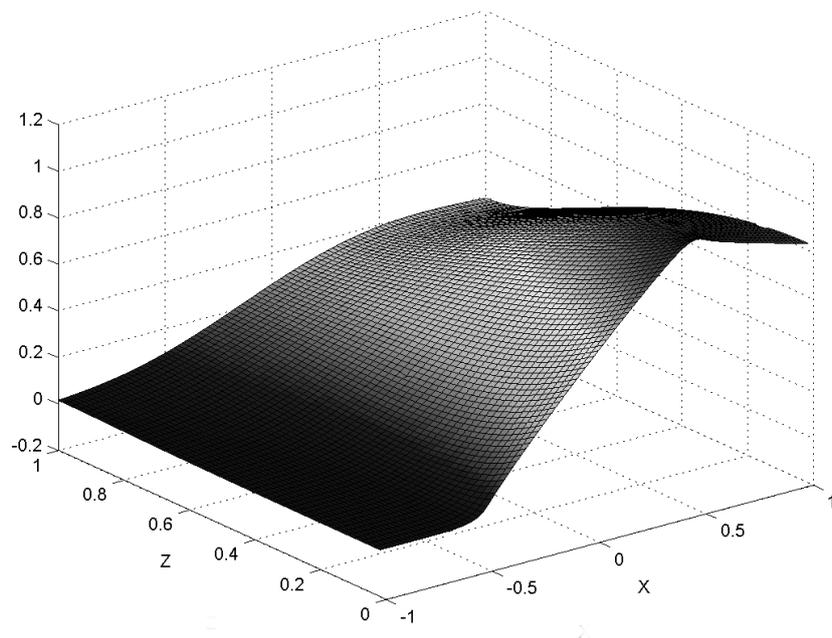


а)

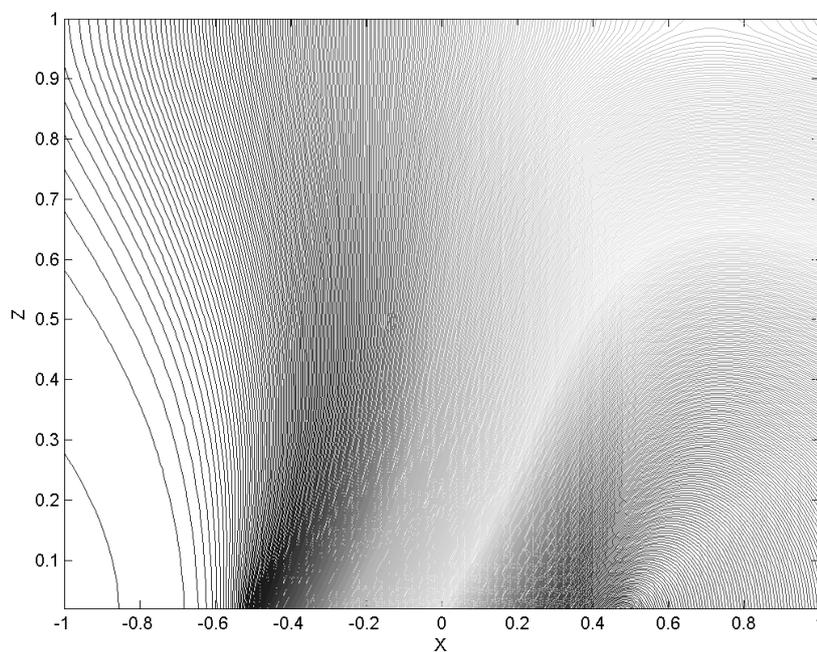


б)

Рис. 1. Решение $\phi^{(n)}(x, 0, z)$ краевой задачи (3.6), а) в виде поверхности, б) в виде линий уровня



а)



б)

Рис. 2. Решение $\phi^{(n)}(x, 0, z)$ краевой задачи (3.7), а) в виде поверхности, б) в виде линий уровня

$a_1 = 0, b_1 = -1, a_N = 1, b_N = 0$. Во втором случае рассмотрена задача Неймана

$$\left. \frac{\partial \phi^{(1)}(x, y)}{\partial z} \right|_{z=0} = \begin{cases} q(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\left. \frac{\partial \phi^{(N)}(x, y)}{\partial z} \right|_{z_{N+1}=h} = 0,$$

с соответствующими коэффициентами $a_1 = 1, b_1 = 0, a_N = 1, b_N = 0$.

Как видно из рис. 1, 2, количественно решения двух задач в среднем имеют сходные порядки, однако качественно они существенно различаются.

Описанный выше подход на основе матричных алгоритмов и алгоритмов интегрирования быстро осциллирующих функций эффективен также в решении нестационарных плоских задач, в решении нестационарных пространственных задач точность метода удовлетворительна, однако вычислительные затраты велики.

Литература

1. Самарский А.А., Вабичевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции-диффузии. М.: Книжный дом «Либроком», 2015. 248 с.
2. Бабешко В.А., Павлова А.В., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Математическое моделирование экологических процессов распространения загрязняющих веществ. Краснодар: КубГУ, 2009. 138 с.
3. Сыромятников П.В. Периодическая модель распространения загрязняющих веществ в мно-

гослойной среде // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, Приложение № 1, 2005. С. 79–86.

4. Karmazin A., Kirillova E., Seemann W., Syromyatnikov P. A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates // *Ultrasonics*. 2013. Vol. 53. Iss. 1. P. 283–293. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ultras.2012.06.012>
5. D01AKF Subroutine. The NAG Fortran Library, The Numerical Algorithms Group (NAG), Oxford, United Kingdom www.nag.com

References

1. Samarskii, A.A., Vabishchevich, P.N. *Numerical methods for solving convection-diffusion problems*. Knizhnyy dom “Librokom”, Moscow, 2015. (In Russian)
2. Babeshko, V.A., Pavlova, A.V., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. *Mathematical modeling of ecological processes of distribution of polluting substances*. Kuban State University Press, Krasnodar, 2009. (In Russian)
3. Syromyatnikov, P.V. A periodic model for the spread of pollutants in a multilayered environment. *Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2005, appendix no. 1, pp. 79–86. (In Russian)
4. Karmazin, A., Kirillova, E., Seemann, W., Syromyatnikov, P. A study of time harmonic guided Lamb waves and their caustics in composite plates. *Ultrasonics*, 2013, vol. 53, iss. 1, pp. 283–293. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ultras.2012.06.012>
5. D01AKF Subroutine. The NAG Fortran Library, The Numerical Algorithms Group (NAG), Oxford, United Kingdom www.nag.com