УДК 551.462

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ ДЛЯ ПРЕДПРОГНОЗНОГО АНАЛИЗА ОБЪЕМОВ СТОКА ГОРНЫХ РЕК

В. А. Перепелица[1], ***Е. В. Попова***[2], ***А. М. Янгишиева***[3], ***А. Д. Салпагаров***[4]

APPLYING OF NON-LINEAR DYNAMICS METHODS FOR PRE-PROGNOSTICATION ANALYSIS OF MOUNTAIN RIVERS RUN-OFF VOLUME

Perepelitsa V. A., Popova E. V., Yangishieva A. M., Salpagarov A. D.

The paper is devoted to the methods of acquiring pre-prognostication information for time series, which have long-term memory, whereby their levels don't meet the independent condition and, therefore, classical prognostication methods might be inadequate. The authors develop pre-prognostication methods of acquiring information, which are based on such instruments of non-linear dynamics as fractal analysis and phase analysis of time series. The effectiveness of the methods proposed has been shown on concrete time series of mountain rivers run-off volume.

1. Предмет исследования и постановка проблемы

Настоящая работа посвящена разработке инструментария предпрогнозного анализа временных рядов (ВР) объемов стока горных рек. Подобные исследования приобрели особо важное экономическое значение после наводнения, имевшего место по р. Кубань в июне 2002 г., убытки от которого оцениваются суммой порядка 0,5 млрд долларов.

В результате ливневых осадков, выпавших в горных районах бассейна р. Кубани, произошло формирование паводка, не имеющего аналога за почти столетний период наблюдений как по величине максимальных расходов и подъему уровней, так и по ущербу, нанесенному населению и предприятиям. В итоге на юге России пострадало 246 населенных пунктов, разрушено более 110 км газопровода, 269 мостов, 1490 км автодорог, погибло 102 человека. Общее же число пострадавших в Южном федеральном округе достигло 340 тыс. человек, а материальный ущерб превысил 15 млрд рублей [1].

Что касается ущерба непосредственно по регионам, то следует отметить, что ущерб, нанесенный паводком Краснодарскому краю, превышает материальный ущерб Карачаево-Черкесии в 10 раз и составляет более 3 млрд рублей. На Кубани повреждено 76 мостов (46 — разрушено полностью), разрушено более 2,5 тыс. домовладений, подтоплению подверглось 58 населенных пунктов. Особенно велик урон в агропромышленном комплексе края, где под водой оказалось 15 тыс. гектаров пашни, погибло более 100 тыс. голов птицы, 2,5 тыс. голов свиней, велики потери крупного рогатого скота. Сумма ущерба в сельском хозяйстве составляет более 250 млн рублей.

В работе основное внимание уделено двум, относящимся к методам нелинейной динамики, инструментам предпрогнозного ана-

[1]Перепелица Виталий Афанасьевич, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики Карачаево-Черкесской государственной технологической академии.

[2]Попова Елена Витальевна, д-р экон. наук, профессор кафедры прикладной математики Карачаево-Черкесской государственной технологической академии.

[3]Янгишиева Альфира Менлигуловна, ассистент кафедры прикладной математики Карачаево-Черкесской государственной технологической академии.

[4]Салпагаров Артур Джапарович, канд. геогр. наук, зам. директора по науке Тебердинского государственного заповедника.

лиза — фрактальному анализу ВР и фазовому анализу ВР [2, 4].

Создателем фрактального анализа является британский гидролог Х. Е. Херст. Исследуя статистику объемов стоков рек, он предложил новую статистическую методологию для дифференциации случайных и неслучайных систем, постоянства трендов и продолжительности циклов, если таковые имеются. Херст показал, что большинство естественных явлений, включая речные стоки, осадки, солнечные пятна, следуют «смещенному случайному блужданию», т. е. тренду с шумом. Оценкой устойчивости тренда и уровня шума может служить изменение нормированного размаха ВР со временем, или, другими словами, насколько величина $H \in (0; 1)$, называемая показателем Херста, превосходит значение 0,5.

Если уровни ВР отражают «чисто случайный процесс» (являются независимыми случайными величинами), то в соответствии с классической статистикой для такого ВР значения показателя Херста $H \approx 0,5$. Природные ВР (выпадение осадков, годичные кольца и т. д.), исследованные Херстом, Мандельбротом и др., обладают так называемой долговременной памятью [2, 3], в силу чего показатель Херста для каждого из этих ВР превосходит число 0,7 [5].

При исследовании ВР стоков горных рек Северного Кавказа с помощью фрактального анализа авторами установлено, что показатель Херста H может быть меньше 0,5. Полученный эмпирический результат можно объяснить тем, что рассмотренные природные ВР не обладают долговременной памятью, либо тем, что предложенный Херстом для вычисления оценки H метод нормированного размаха (R/S-анализ) не является универсальным, т. е. не является адекватным для всех природных и неприродных рядов. Одним из результатов настоящей работы является подтверждение второго сформулированного выше предположения. Отсюда вытекает необходимость построения нового подхода для реализации фрактального анализа широкого класса ВР.

2. Вычислительная схема метода нормированного размаха (МНР) Херста

В течение более чем полувекового периода анализ природных, экономических и других ВР исследователи осуществляли с помощью алгоритма [6], который называется методом нормированного размаха (МНР) Херста (R/S-анализ [5]).

Рассматривается ВР

$$Z = \langle z_i \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.1}$$

где N — количество наблюдений или уровней, составляющих этот ВР. Вместо ВР (2.1) в [5] предлагается рассматривать ВР $Y = \langle y_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, где $y_i = \log(z_{i+1}/z_i)$. Вычислительная схема МНР Херста разбивается на семь этапов.

Этап 1. Выбираем подходящее целочисленное значение $\Delta \geqslant 1$ и строим последовательность длин

$$n_1,\ n_2, \ldots, n_k, \ldots, n_m, \tag{2.2}$$

где $n_{k+1} = n_k + \Delta$. Максимальная длина n_m определяется равенством $n_m = [N/2]$, а минимальное значение $n_1 \geqslant 10$.

Последовательность (2.2) определяем, следуя [2]. В [5] последовательность (2.2) предлагается строить так, чтобы она состояла только из таких чисел n_k, на каждое из которых длина N ВР делится без остатка.

Этап 2. Для очередного фиксированного значения n_k рассматриваем ВР (2.1) и разбиваем его на $r_k = [N/n_k]$ следующих друг за другом отрезков $Z_k^t = \left\langle z_j^t \right\rangle$, $j = 1, 2, \ldots, n_k$. В число таких отрезков не включается остаток уровней ВР (2.1), не вошедших в последний отрезок $Z_k^{r_k}$. Для каждого отрезка Z_k^t вычисляем его среднее значение $z_t = \frac{1}{n_k} \sum\limits_{j=1}^{n_k} z_j^t$, $t = \overline{1, r_k}$.

Этап 3. При фиксированном индексе k для каждого отрезка Z_k^t вычисляем ряд накопленных отклонений $X_{k,q}^t = \sum\limits_{j=1}^{q} \left(z_j^t - z^t \right)$, $q = 1, 2, \ldots, n_k$, на основании которых определяется его размах

$$R_k^t = \max_{1 \leqslant q \leqslant n_k} X_{k,q}^t - \min_{1 \leqslant q \leqslant n_k} X_{k,q}^t, \quad t = \overline{1, r_k}.$$

Этап 4. При фиксированном индексе k для всякого отрезка Z_k^t вычисляем стандартное отклонение $S_k^t = \left[\frac{1}{n_k} \sum\limits_{j=1}^{n_k} \left(z_j^t - z_j \right)^2 \right]^{0,5}$, нормируем значение размаха для этого отрезка, вычисляя величину R_k^t / S_k^t, и находим

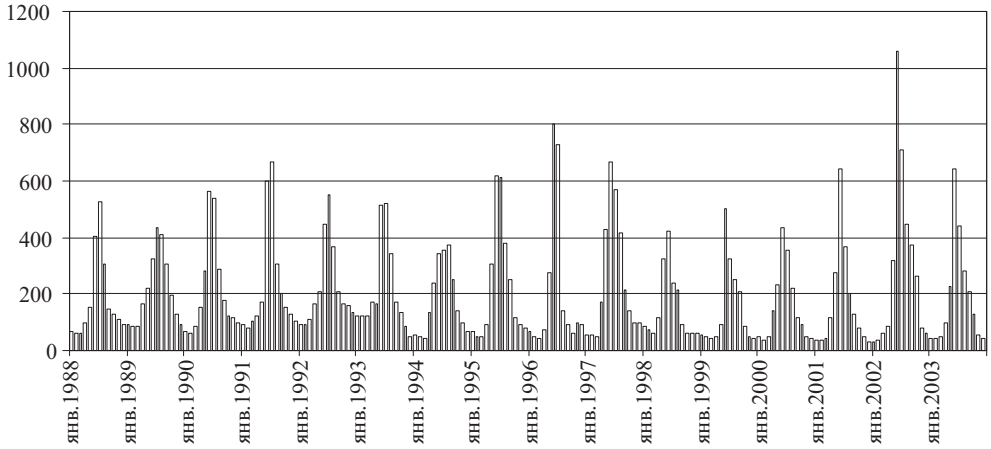


Рис. 1. Гистограмма временного ряда помесячных стоков реки Кубань за период 1988–2003 гг.

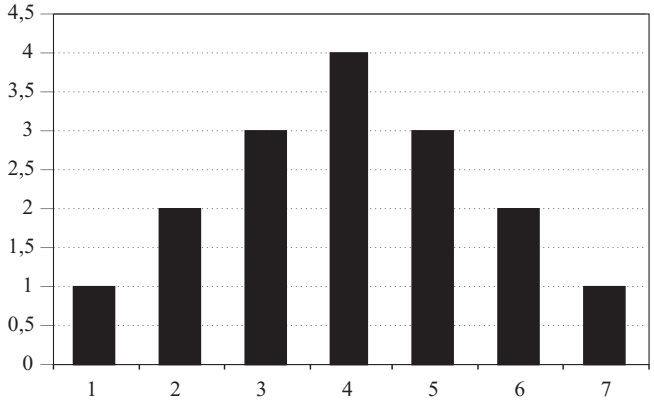


Рис. 2. Гистограмма цикла эталонного временного ряда ($z_1^0 = 1$, $z_2^0 = 2$, $z_3^0 = 3$, $z_4^0 = 4$, $z_5^0 = 3$, $z_6^0 = 2$, $z_7^0 = 1$)

среднее значение этих величин

$$(R/S)_k = \frac{1}{r_k} \sum_{t=1}^{r_k} \left(R_k^t / S_k^t\right). \qquad (2.3)$$

Этап 5. Ряду длин (2.2) ставим во взаимнооднозначное соответствие ряд нормированных размахов (2.3). Логарифмируя численные значения элементов каждого из полученных рядов (2.2) и (2.3), получим множество точек с координатами

$$x_k = \log(n_k), \quad y_k = \log\left((R/S)_k\right), \quad k = 1, 2, \ldots, m. \qquad (2.4)$$

Этап 6. Используя метод наименьших квадратов, строим линейную регрессию (линейный тренд) для множества точек с координатами (2.4).

Этап 7. Для полученной линии регрессии вида $y = ax + b$ значение коэффициента a используем в качестве оценки показателя Херста H.

3. Верификация МНР Херста на базе эталонных ВР

В качестве (2.1) рассмотрим ВР помесячных объемов стока в верховьях р. Кубань (географическая точка начала Большого Ставропольского канала) за период с 1926 по 2003 г. включительно. Графическое представление части этого ВР (с 1988 по 2003 г.) дано на рис. 1. Отметим, что аналогичного вида гистограммы являются характерными для ВР объемов стока других горных рек (Теберда, Б. Зеленчук, Аксаут, Маруха).

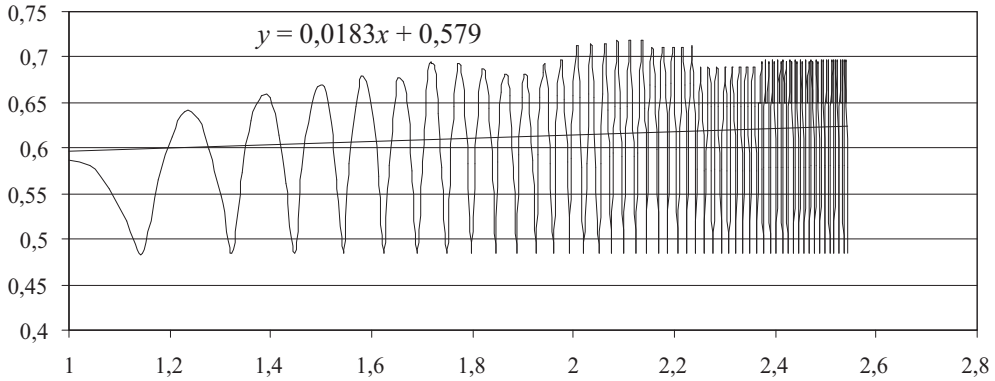


Рис. 3. R/S-траектория для эталонного ВР (3.1) и ее линейный тренд

На рис. 1 видно, что рассматриваемым рядам присуще свойство периодичности.

Для верификации МНР Херста на базе ВР, представленного на рис. 1, строим периодический ВР

$$Z^0 = \left\langle z_i^0 \right\rangle, \quad i = \overline{1, N}, \tag{3.1}$$

представляющий собой последовательность одного и того же цикла (рис. 2). В дальнейшем ВР Z^0 будем называть эталонным ВР.

С учетом длины цикла (т. е. количества составляющих его уровней) $L = 7$ в качестве длины эталонного ВР (3.1) принимаем значения $N = 700$, т. е. ВР (3.1) состоит из 100 следующих один за другим циклов длины $L = 7$ вышеуказанного вида.

Применим к эталонному ВР (3.1) МНР Херста для последовательности длин отрезков

$$n_1 = 10, n_2 = 11, \ldots, \\ n_k = k + 9, \ldots, n_{341} = 350. \tag{3.2}$$

В результате реализации описанных выше этапов 2–6 получим множество точек, определяемых логарифмическими координатами вида (2.4). Графическое изображение этих точек, а также линейного тренда дано на рис. 3, где для наглядности множество (2.4) представлено в виде R/S-траектории, которая получается путем соединения каждой пары соседних точек отрезком (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}), $k = \overline{1, m}$, $m = 341$.

Построенная линия регрессии является практически параллельной оси абсцисс, угол наклона прямой регрессии $y = ax + b$ близок к 0 (рис. 3). В силу этого получаем низкую оценку показателя Херста H, значение которой находится в зоне розового шума [2], т. е. существенно меньше $0,5$. Последнее является противоречием теории R/S-анализа [2, 5], согласно которой для периодических ВР показатель Херста находится в области черного шума ($H > 0{,}7$).

Аналогичный результат получен и в случае, если алгоритм Херста применить к другому искусственно созданному эталонному ВР, например, к ВР, который представляет собой последовательность следующих друг за другом циклов $\langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 \rangle$. Таким образом, возникает объективная необходимость в разработке новой вычислительной схемы реализации R/S-анализа, обеспечивающей выявление циклов в рассматриваемых ВР и получение численной оценки глубины памяти, которая, вообще говоря, для различных отрезков ВР не одинакова. Реализующий эту схему алгоритм излагается ниже.

4. Алгоритм последовательного R/S-анализа для оценки глубины памяти о начале временного ряда

Во ВР (2.1) последовательно формируем начальные отрезки $Z^\tau = z_1, z_2, \ldots, z_\tau$, $\tau = 3, 4, \ldots, n$, для каждого из которых вычисляем текущее среднее $\overline{z}_\tau = \frac{1}{\tau} \sum\limits_{i=1}^{\tau} z_i$. Для каждого фиксированного Z^τ определяем накопленное отклонение для его отрезков длины t

$$X_{\tau,t} = \sum_{i=1}^{t} (z_i - \overline{z}_i), \quad t = 1, 2, \ldots, \tau.$$

Далее вычисляем размах

$$R = R(\tau) = \max_{1 \leqslant t \leqslant \tau} (X_{\tau,t}) - \min_{1 \leqslant t \leqslant \tau} (X_{\tau,t}),$$

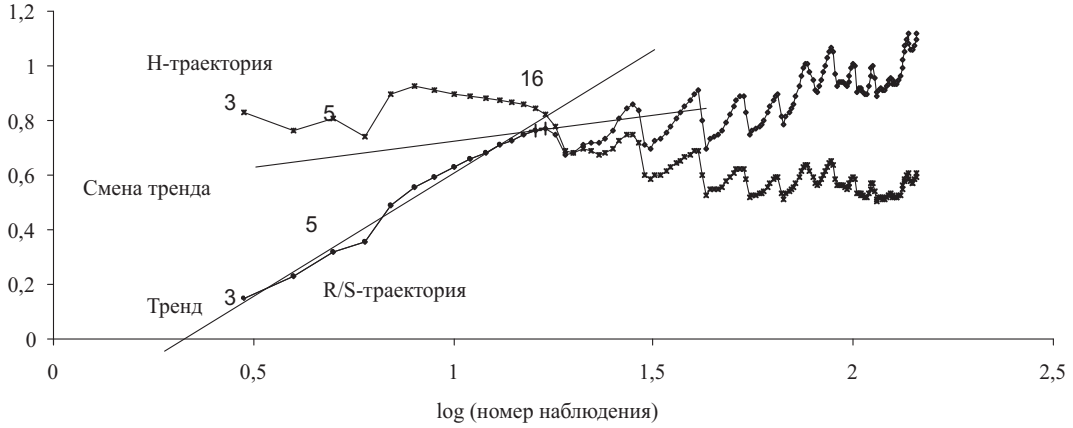


Рис. 4. R/S-траектория и H-траектория ВР стока р. Кубань за период 1926–2003 гг.

который нормируется, т. е. представляется в виде дроби R/S, где $S = S(\tau)$ — стандартное отклонение для отрезка Z^τ, $3 \leqslant \tau \leqslant n$.

В отличие от этапа 7 МНР в предлагаемой вычислительной схеме оценку показателя Херста вычисляем на основании «эмпирического закона Херста» [2,7]

$$H = H(\tau) = \frac{\log(R(\tau)/S(\tau))}{\log(\tau/2)}. \qquad (4.1)$$

Используя (4.1), строим в декартовых логарифмических координатах две траектории, одна из которых, называемая *H-траекторией*, состоит из точек с координатами (x_τ, y_τ), где $x_\tau = \log\tau$, $y_\tau = H(\tau)$, $\tau = 3, 4, \ldots, n$.

Вторая, называемая *R/S-траекторией*, состоит из точек с координатами (x_τ, y_τ^o), где $x_\tau = \log\tau$, $y_\tau^o = \log(R(\tau)/S(\tau))$. Для наглядности графического представления этих траекторий всякую пару соседних точек соединяем отрезком.

На рис. 4 представлены R/S- и H-траектории, полученные в результате применения алгоритма последовательного R/S-анализа к ВР стока р. Кубань (графическое представление этого ВР дано на рис. 1). Если рассматриваемый ВР обладает долговременной памятью, то его R/S-траектория демонстрирует факт исчерпания памяти о начале ряда так называемым срывом с тренда или сменой направления тренда, вдоль которого следует определенное количество начальных точек R/S-траектории [2,5]. Это означает, что точки R/S-траектории, следующие после точки смены тренда, уже не возвращаются к первоначальному тренду. Численные расчеты для различных ВР позволили сформулировать следующее определение трендоустойчивого начального отрезка ВР, заканчивающегося точкой исчерпания этого тренда:

1) определенное количество $l \geqslant 2$ точек, относящихся к началу R/S-траектории, следуют вдоль линейного тренда;

2) после точки l R/S-траектория меняет тренд, причем последующие точки этой траектории не возвращаются к первоначальному тренду;

3) ВР ординат $\langle y_\tau \rangle$, $r = 1, 2, \ldots$ точек H-траектории при переходе от y_l к y_{l+1} получает отрицательное приращение; при этом точка l H-траектории находится в зоне черного шума, т. е. значение показателя Херста $y_l = H(l) > 0,5$.

Замечание. При визуализации R/S- и H-траекторий необходимо учитывать, что R/S-анализ в силу алгоритмической особенности не вычисляет координаты (x_τ, y_τ), соответствующие двум первым уровням исследуемого ВР, т. е. для $\tau = 1$ и $\tau = 2$. Поэтому предлагается нумеровать точки указанных траекторий, начиная с номера 3 (рис. 4). В общем случае точка смены тренда R/S-траектории появляется с лагом, поэтому номер этой точки является верхней оценкой глубины памяти о начале рассматриваемого ВР.

Согласно этому замечанию и вышеуказанным пунктам 1)–3) графики, представленные на рис. 4, показывают, что глубина памяти о начале рассматриваемого ВР (2.1) оценивается сверху числом 16.

Из установленного факта наличия долговременной памяти во ВР стока горных рек вытекает целесообразность разработки системы кратко- и среднесрочного прогнозов объе-

Таблица 1

Глубина l	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Количество $N(l)$	8	15	16	16	13	9	9	8	6
Доля $d(l)$	0,08	0,15	0,16	0,16	0,13	0,09	0,09	0,08	0,06
Значения функции принадлежности $\mu(l)$	0,45	0,84	0,9	0,9	0,73	0,5	0,5	0,45	0,33

мов их стока. Предложенные в настоящей работе инструментальные методы для этой системы базируются на математическом аппарате теории клеточных автоматов и теории нечетких множеств [8].

Объем памяти используемого клеточного автомата и, в конечном счете, трудоемкость вычислительной схемы прогнозирования существенным образом зависят от глубины памяти ВР. Численные расчеты в настоящем исследовании выполнены с помощью представленного ниже алгоритма α_1, который определяет наличие памяти ВР и оценивает ее глубину, представляя в виде нечеткого множества (НМ). Алгоритм α_1 состоит из двух этапов.

Этап 1. Формирование на базе ВР (2.1) семейства $S(Z) = \{Z^r\}$, $Z^r = \langle z_i^r \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n_r$; $r = 1, 2, \ldots, m$, состоящего из m временных рядов, где индексом i пронумерованы элементы r-го ряда, получаемого из $(r-1)$-го ВР Z^{r-1} путем удаления его первого элемента z_1^{r-1}; m определяется как наибольшее значение индекса r такое, что ряд $Z^m = \langle z_i^m \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n_m$ еще имеет точку смены тренда в его R/S-траектории; исходный ВР (2.1) также принадлежит семейству $S(Z)$, в котором ему присвоено значение индекса $r = 1$.

Этап 2. Реализация R/S-анализа временных рядов из семейства $S(Z)$ и формирование НМ значений верхних оценок глубины памяти о начале ряда для каждого ВР этого семейства.

Пусть для каждого ВР Z^r, $r = 1, 2, \ldots, m$ в результате его R/S-анализа построены R/S- и H-траектории, определяющие номер l^r точки, в которой произошла смена тренда, т. е. l^r — это номер точки, находящейся «выше» зоны белого шума, первой по порядку точки, в которой H-траектория получила отрицательное приращение, а R/S-траектория сменила тренд.

Рассмотрим этап 2, реализующий фрактальный анализ ВР с помощью алгоритма последовательного R/S-анализа. Введем следующие обозначения: $N(l)$ — количество всех рядов $Z^r = \langle z_i^r \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n_r$ из семейства $S(Z)$ (у каждого из них номер точки смены тренда l^r равен числу l), $l^o = \min\limits_{1 \leqslant r \leqslant m} l^r$, $L^o = \max\limits_{1 \leqslant r \leqslant m} l^r$, $m = \sum\limits_{l=4}^{L^0} N(l)$ — число рядов семейства $S(Z)$, $d(l) = \frac{N(l)}{m}$ — доля таких рядов в $S(Z)$, у которых потеря памяти произошла на глубине l; $L(Z) = \{l\}$ — множество значений номеров элементов смены тренда в рядах из семейства $S(Z)$; $M(Z) = \{(l, \mu(l))\}$ — НМ глубины памяти для ВР (2.1) в целом. В табл. 1 представлены данные, полученные в результате использования алгоритма α_1 для ВР (2.1).

В последней строке табл. 1 значения $\mu(l)$ функции принадлежности элементов l множеству $M(Z)$ пропорциональны числам $d(l)$, $l \in L(Z)$. Они получаются путем нормирования значений долей $d(l)$ так, что $\mu(l) < 1$ для всякого $l \in L(S)$. Значения элементов $\mu(l)$ вычисляются следующим образом. Сначала находим максимальную долю $d^* = \max\limits_{l \in L(Z)} d(l)$ и соответствующую ей глубину $l^* = d^*(l)$. Для этой глубины l^* экспертным путем устанавливается значение функции принадлежности $\mu^* = \mu(l^*)$ (в табл. 1 $d^* = 0{,}16$, $l^* = 16$, $\mu^* = \mu(16) = 0,9$). После чего для остальных элементов $l \in L(Z)$ соответствующие им значения $\mu(l)$ вычисляются по формуле $\mu(l) = \frac{\mu^*}{d^*} d(l)$. Формирование НМ $M(Z)$ осуществляется путем попарного объединения элементов первой и последней строк табл. 1. Полученная для ВР (2.1) оценка глубины его памяти представляется в виде следующего НМ: $M(Z) = \big\{$(13;0,45), (14;0,84), (15;0,9), (16;0,9), (17;0,73), (18,0,5), (19,0,5), (20;0,45), (21;0,33)$\big\}$.

Для наглядности на рис. 5 представлено геометрическое изображение НМ рассматриваемого ВР (2.1).

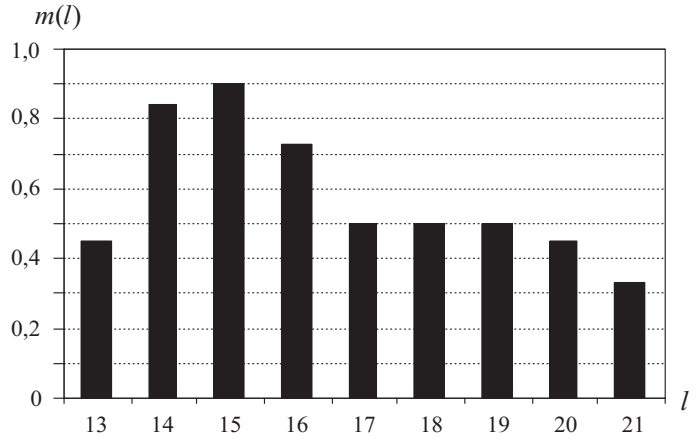


Рис. 5. Геометрическое представление НМ глубины памяти для ВР (2.1)

Выводы, вытекающие из результатов выполненных расчетов, состоят в следующем:

1. Глубина памяти конкретного ВР не является фиксированным числом. Еч величина меняется вдоль рассматриваемого ВР, т. е. для различных его отрезков. Для ВР (2.1) численные значения глубины памяти колеблются в отрезке натурального ряда 13, 14,. . . ,21 (табл. 1).

2. Для численного представления глубины памяти рассматриваемого ВР (2.1) наиболее целесообразным является использование математического аппарата теории нечетких множеств. Оцениваемая глубина представляет собой НМ

$$M(Z) = \{(l, \mu(l))\},$$

$$l \in \{l^0, l^0 + 1, \ldots, L^0\},$$

где l – численное значение встречающейся глубины памяти, $\mu(l)$ — значение функции принадлежности для этой глубины.

Как отмечено в [5], R/S-анализ представляет собой инструмент для выявления циклов, как периодических, так и непериодических. На рис. 6 представлено изображение в виде гистограммы динамики точек смены тренда R/S-траекторий временных рядов $Z^r \in S(Z)$ для индексов r, поставленных в соответствие месяцам, начиная с января 1988 г. по апрель 1996 г. Проведенные расчеты позволяют отметить дополнительные «циклические» возможности алгоритма последовательного R/S-анализа Херста.

1. Будем считать, что на рис. 6 дано графическое представление ВР $L = \langle l_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, N$. Согласно общепринятому определению под термином «цикл» подразумевается отрезок

$$l_i, l_{i+1}, \ldots, l_{i+r}, \tag{4.2}$$

состоящий из двух частей, первая из которых является возрастающей (убывающей), а вторая — убывающей (возрастающей). При этом отрезок (4.2) является локально-максимальным по своей длине $(r + 1)$.

Принято говорить о цикличности рассматриваемого ВР, если он содержит циклы одной и той же длины. Для циклов различной длины используется термин «квазицикл».

Представленное определение цикла не является исчерпывающим и может быть видоизменено или дополнено для анализа циклических характеристик рассматриваемых ВР стока горных рек.

Отметим, что гистограмма на рис. 6 состоит из периодически повторяющихся отрезков вида

$$l_i, l_{i+1}, \ldots, l_{i+11}. \tag{4.3}$$

В каждом из них элемент l_i представляет собой локальный максимум $(i = 9, 21, 33, \ldots, 9 + 12k, \ldots)$, а элемент l_{i+11} — локальный минимум. При этом каждый отрезок (4.3) состоит из квазицикла вида «убывание-возрастание» и квазицикла вида «возрастание-убывание», причем эти два квазицикла пересекаются, т. е. содержат пару общих элементов в виде промежуточного минимума l_{i+t-1} и промежуточного максимума l_{i+t}, $t \in \{6, 7, 8\}$. В силу одной длины (равной 12) отрезков (4.3), а также одинаковой структуры (в виде объединения двух квазициклов) условимся всякий отрезок вида (4.3) называть циклом.

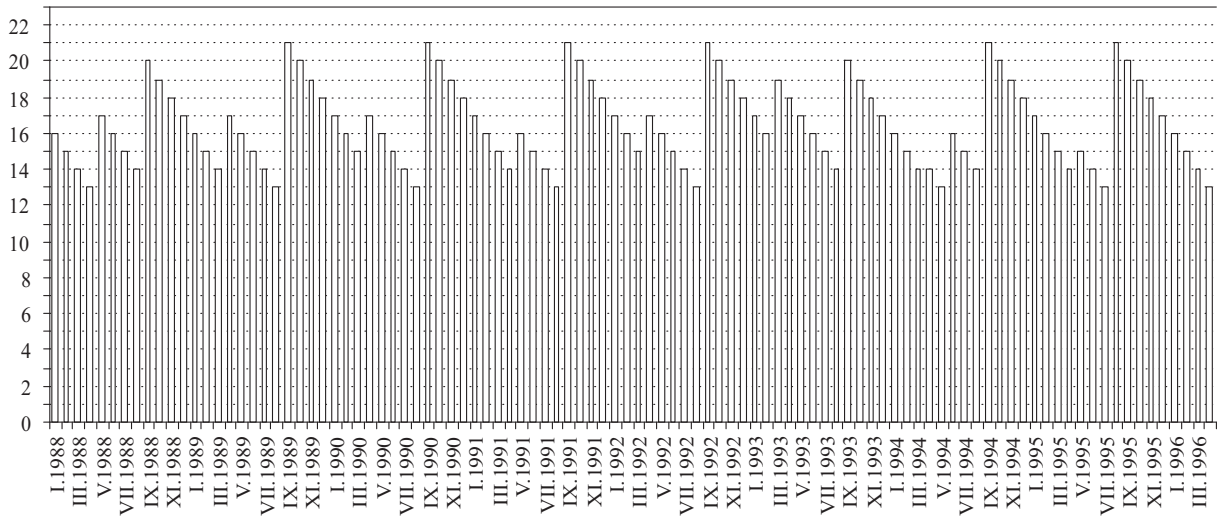


Рис. 6. Гистограмма номеров смены тренда R/S-траекторий ВР Z^r из семейства $S(Z)$

2. Информация о динамике точек смены тренда R/S-траектории, получаемая на выходе алгоритма последовательного R/S-анализа, не только устанавливает факт циклической природы эволюции рассматриваемых ВР, но и дает точное значение границ циклов в составе этого ВР. Особо отметим, что в рассматриваемых ВР стока горных рек указанными граничными точками является сентябрь (начало) и август (конец). Пара точек (локальный минимум и локальный максимум), представляющих пересечение двух квазициклов, составляющих цикл (4.3), колеблется в пределах трех месяцев (апрель, май, июль).

3. Как отмечено в [2], для получения точных оценок фрактальных характеристик ВР с помощью МНР Херста требуются ряды длиною несколько тысяч или даже порядка десятка тысяч наблюдений. Представленный выше метод последовательного R/S-анализа позволяет получить оценки фрактальных характеристик ограниченного отрезка рассматриваемого ВР.

Отдельно отметим, что вышеуказанные пункты 1–3 фактически представляют собой элемент верификации предложенного алгоритма последовательного R/S-анализа.

Обнаружение долговременной памяти во ВР стоков горных рек дает возможность построения прогнозной модели, учитывающей все существенные факторы (например, наличие циклов вида (4.2)). В контексте проблемы прогнозирования уместно отметить уже сложившееся, т. е. ставшее классическим, основное положение декомпозиционного анализа ВР [9]. Согласно этому положению в общем случае ВР может быть расчленен на 4 составляющие части: а) тренд, б) циклическая компонента, в) сезонное колебание, г) нерегулярная или остаточная компонента. При этом циклическая компонента может нести весьма существенную информацию для составления прогноза.

5. Инструментарий фазовых портретов для выявления циклов временного ряда и подтверждения прогноза

При исследовании ВР стока горных рек достаточно информативным и целесообразным является построение фазовых портретов ВР (2.1) в фазовом пространстве $F(Z)$ [2, 10, 11] размерности 2: $F(Z) = \{(z_i, z_{i+1})\}$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Фазовая траектория ВР стока горной р. Кубань за период с 1926 по 2003 г. представлена на рис. 7,

В качестве фазового пространства ВР (2.1) используем простейший вариант вида [2, 4]

$$\Phi_\rho = (Z) = \{z_i,\ z_{i+1}, \ldots, z_{n-p+1}\}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-\rho+1. \tag{5.1}$$

При построении фазового пространства (5.1) для конкретного ВР принципиально важным является вопрос о его размерности ρ. Эта размерность должна быть не меньше, чем размерность аттрактора наблюдаемо-

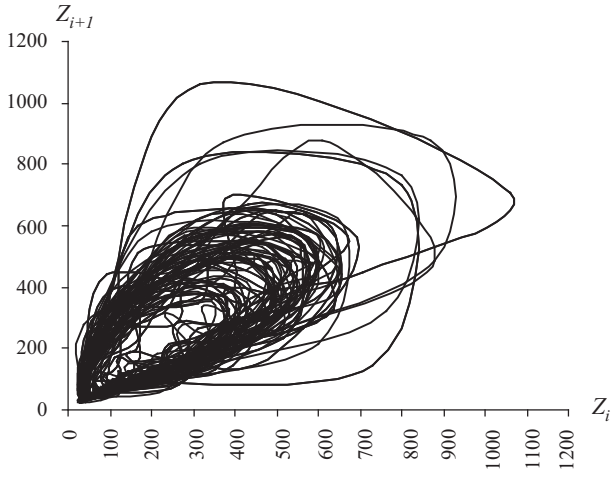


Рис. 7. Фазовый портрет ВР стока р. Кубань за период с 1926 по 2003 гг.

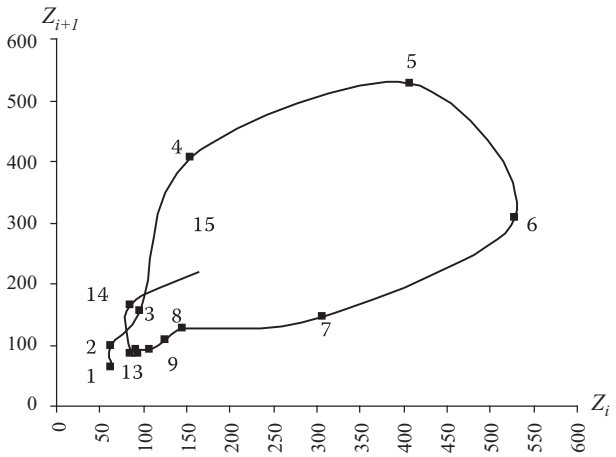


Рис. 8. Первый квазицикл ВР (2.1) для 15 точек

го ряда. В свою очередь, как известно, в качестве размерности аттрактора с достаточной точностью можно использовать фрактальную размерность C его ряда. Значение этой размерности вычисляется по формуле [2]

$$D = 2 - H.$$

Поскольку значение $H \in (0, 1)$, получаем оценку $D < 2$ [2].

Таким образом, для целей исследования достаточно использовать фазовое пространство размерности $\rho = 2$.

Рассмотрим этот фазовый портрет в виде траектории, т. е. последовательности точек, в которой каждая соседняя пара соединена звеном (отрезком или кривой). На этой траектории выделяем отрезки, которые называются фазовыми квазициклами. Определение фазового квазицикла в некотором смысле близко к определению классического цикла. Различие между этими понятиями состоит в том, что начальная и конечная точки фазового квазицикла не обязательно должны совпадать. Конечная точка квазицикла определяется ее вхождением в окрестность начальной точки. При этом допускается самопересечение начального и конечного звеньев квазицикла, если это приведет к максимальному сближению начальной и конечной точек. В реальности существуют ВР эволюционных процессов, у которых фазовые портреты содержат такие пары несоседних по времени точек (наблюдений), у которых координаты в фазовом пространстве фактически совпадают. Наличие таких пар точек разрушает циклическую структуру фазовых траекторий.

Примечательная и весьма важная особенность прогнозирования рассматриваемых ВР стока горных рек заключается в том, что фазовый портрет состоит из последовательности непересекающихся квазициклов, длина которых равна 12 месяцам. В целом траектория фазового портрета для временного ряда (2.1) состоит из 16-ти непересекающихся квазициклов C_r, $r = 1, 2, \ldots, 16$. Все квазициклы строятся с февраля по январь месяц, образуя тем самым 12-месячные циклы (год).

На рис. 9а представлен годовой цикл, принадлежащий ВР (2.1). R/S- и H-траектории (рис. 9б) демонстрируют исчерпание цикла на рис. 8, т. е. срыв R/S-траектории в точке $i = 15$, что превосходит на 3 длину годового цикла. Последнее обусловлено существованием лага в работе алгоритма последовательного анализа. В данном случае размер этого лага равен 3. В силу алгоритмических особенностей процесса построения R/S- и H-траекторий точки 1 и 2 (рис. 8) не отражаются на рис. 9б.

Размерности L_k всех 16 квазициклов и номер точки срыва в R/S-траекториях представлены в табл. 2.

Обозначим через Z_k такой отрезок ВР (2.1), который получается путем удаления из Z всех точек наблюдения, относящихся к квазициклам $C_1, C_2, \ldots, C_{r-1}$; согласно этому определению $Z_1 = Z$.

Сравним глубину памяти рассматриваемого ВР, представленную НМ (4.3), с размерностями квазициклов (вторая строка табл. 2). Из этого сравнения вытекает, что наличие

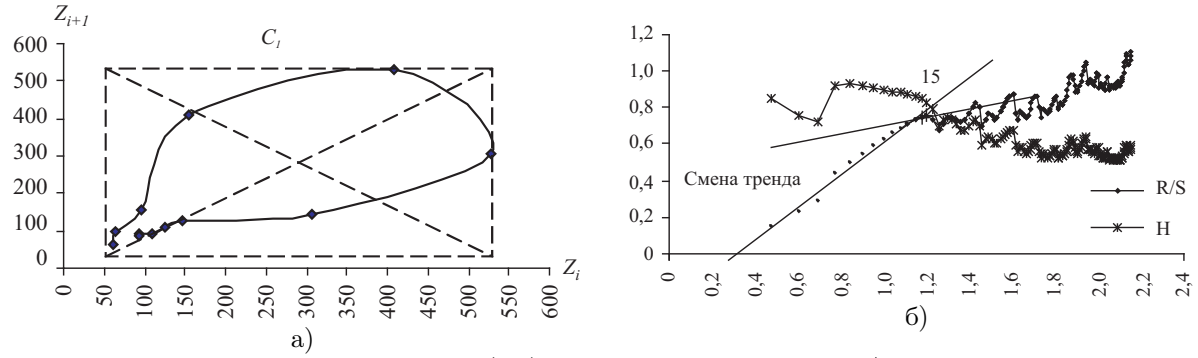


Рис. 9. Первый квазицикл ВР (2.1) и соответствующие ему R/S- и H-траектории

Таблица 2

C_k	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{15}
L_k	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
N_k	15	15	16	16	16	16	15	16	15	15	16	15	15	15	

долговременной памяти в рассматриваемом ВР наряду с другими факторами обусловлено также циклической компонентой этого ВР.

Для каждого квазицикла C_r определим понятие *«габаритный прямоугольник квазицикла C_r»*. Через точки (z_i, z_{i+1}) с максимальным и минимальным значением абсциссы (ординаты) проведем прямые, параллельные оси ординат (абсцисс). Пересечение двух полученных пар параллельных прямых (на рис. 9а представлены пунктиром) и образует габаритный прямоугольник квазицикла C_r. Иными словами, габаритный прямоугольник представляет собой такую минимальную выпуклую оболочку точек квазицикла C_r, которая является прямоугольником со сторонами, параллельными осям координат. Пересечение диагоналей габаритного прямоугольника определяет так называемый *центр вращения квазицикла* O_r, координаты которого обозначим $O_r(x_r, y_r)$.

Проанализируем характерные особенности фазового портрета ВР (2.1).

1. Фазовый портрет ВР (2.1) разбивается на квазициклы, которые имеют размерность 12. Этот факт в достаточной степени согласуется с результатами фрактального анализа по оценке глубины памяти ВР.

2. В каждом квазицикле все звенья имеют направление вращения по часовой стрелке. При этом габаритный прямоугольник можно разбить на 4 сектора прямыми линиями, параллельными осям координат с пересечением в центре габаритного прямоугольника.

3. Центры квазициклов $O_r(x_r, y_r)$ в порядке их нумерации $r = 1, 2, \ldots, 72$ эволюционируют по определенной траектории, точки которой расположены в достаточно малой окрестности биссектрисы положительного ортанта декартовых координат. Как видно из рис. 10, координаты центров всех квазициклов представляют собой точки биссектрисы положительного ортанта декартовых координат, однако траектория движения этих координат характеризуется значительным размахом $R \approx 550 - 200 = 350$, что более чем в 1,5 раза превосходит точку минимума. Поэтому представляет интерес выявление долгосрочных тенденций, которым подчиняется эволюционирование центров O_r. С этой целью осуществлено разбиение на три периода: 1926–1940 гг. (рис. 11а); 1946–1987 гг. (рис. 11б); 1988–2003 гг. (рис. 11в). На рис. 11 видно, что при $\min \approx 200$ с течением времени растет значение размаха в следующем соотношении: $R_1 \approx 350 - 200 = 150$ (рис. 11а), $R_2 \approx 450 - 200 = 200$ (рис. 11б), $R_3 \approx 550 - 200 = 350$ (рис. 11в). Приведенный ряд значений величины размаха подтверждает существующий прогноз потепления климата в северном полушарии, так как наполнение горных рек, особенно в летние месяцы, определяется интенсивностью таяния ледников.

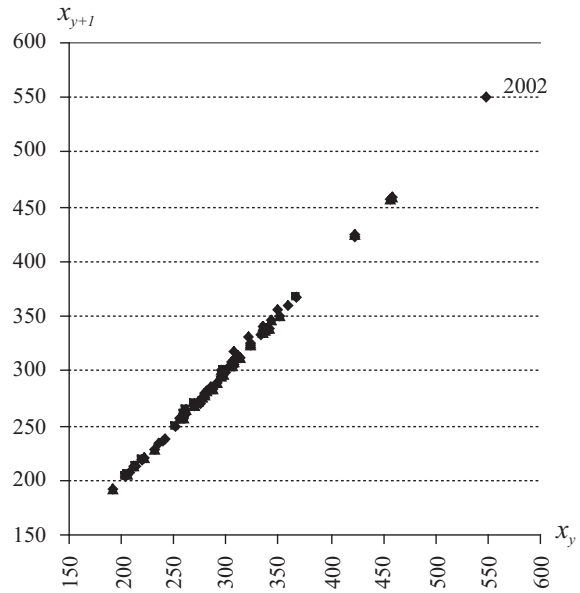
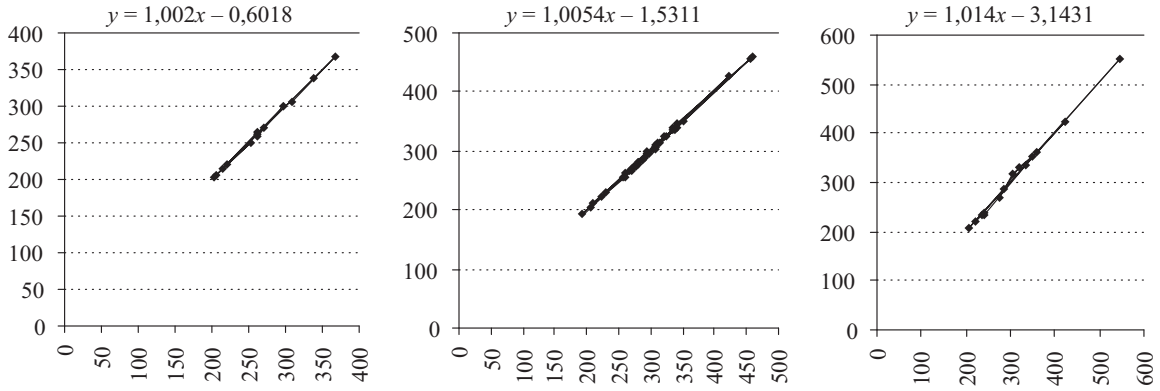


Рис. 10. Эволюция центров квазициклов ВР (2.1) за период с 1926 по 2003 гг.



а) б) в)

Рис. 11. Разложение траектории центров на временные периоды

4. Рис. 12 иллюстрирует циклический характер эволюции размеров (площади) габаритных прямоугольников квазициклов.

На основании проведенного анализа можно предложить подход к прогнозированию рассмотренного ВР, который состоит из следующих этапов.

Этап 1. Фрактальный анализ ВР (2.1) с целью установления наличия долговременной памяти и оценки ее глубины. На выходе получаем нечеткое множество $L = L(Z) = \{(l, \mu_l)\}$ оценки глубины памяти ВР (2.1).

Этап 2. Построение для данного ВР фазового портрета $\Phi_\rho(Z)$.

Этап 3. Разложение фазового портрета на квазициклы C_r с учетом того, что начальный и конечный квазициклы могут оказаться незавершенными.

Этап 4. Проведение анализа эволюции центров квазициклов $O_r(x_r, y_r)$, эволюции размеров (площади) габаритных прямоугольников квазициклов, а также характера вращения их звеньев.

Этап 5. Построение прогноза по принципу продолжения (достройки) соответствующего квазицикла с использованием результатов этапа 4 для двух случаев, когда последний квазицикл является:

а) незавершенным,

б) завершенным.

В случае а) используем габаритные размеры и характер вращения квазициклов с учетом того, какому сектору габаритного прямо-

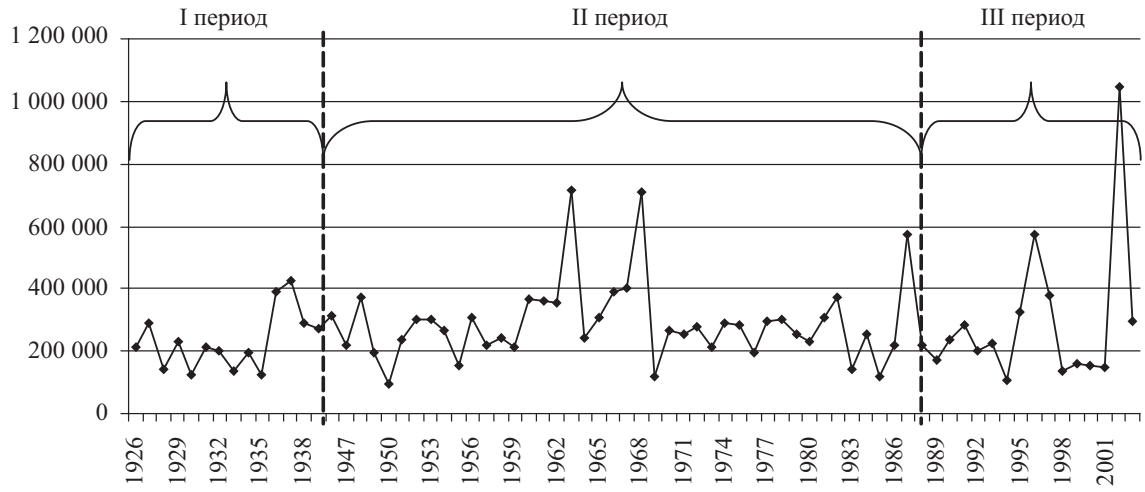


Рис. 12. Движение площадей габаритных прямоугольников с учетом параметра времени

угольника принадлежит прогнозируемая точка.

В случае б) осуществляются те же процедуры, но с учетом эволюции центров и переходов от завершающей точки одного цикла к начальной точке нового цикла.

Таким образом, предложенный подход отличается от классических методов прогнозирования новой реализацией учета трендов (эволюция центров и размеров габаритных прямоугольников), а также новым инструментарием (фазовых портретов) для выявления циклической компоненты рассматриваемого ВР.

Литература

1. Итоги работы комиссии. Вып. 24, 27 июля 2002 г. http://admkrai.kuban.ru/news/region/.
2. *Петерс Э.* Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. М.: Мир, 2000. 333 с.
3. *Перепелица В. А., Попова Е. В.* Математические модели и методы оценки рисков экономических, социальных и аграрных процессов. Ростов н/Д: РГУ, 2002. 202 с.
4. *Packard N., Crutchfield J., Farmer D., Shaw R.* Geometry from a Time Series. Physical Review Letters 45, 1980.
5. *Петерс Э.* Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. М.: Интернет-трейдинг, 2004. 304 с.
6. *Hurst H. E.* Long-term Storage of Reservoirs. Transactions of the American Society of Civil Engineers 116, 1951.
7. *Федер Е.* Фракталы. М.: Мир, 1991. 260 с.
8. *Перепелица В. А., Касаева М. Д., Тебуева Ф. Б., Темирова Л. Г.* Использование инструментария клеточных автоматов для формирования прогнозных нечетких значений урожайности на базе временного ряда // Известия вузов. Северо-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2003. є 4. С. 5–11.
9. *Сигел Э.* Практическая бизнес-статистика. М.: Вильямс, 2004. 1056 с.
10. *Перепелица В. А., Попова Е. В., Окопная В. А.* Использование методологии нелинейных динамических систем в дискретной многокритериальной оптимизации. Деп. в ВИНИТИ, 1998. є 2619 В. 98. 118 с.
11. *Винтизенко И. Г.* Детерминированное прогнозирование в экономических системах // Новые технологии в управлении, бизнесе и праве: Труды III Международной конференции. Невинномысск: ИУБП, 2003. С. 163–167.

Статья поступила 19 марта 2005 г.
Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия
© Перепелица В. А., Попова Е. В., Янгишиева А. М., Салпагаров А. Д., 2005