

Ф И З И К А

УДК 536.2

doi: 10.31429/vestnik-15-3-92-101

О ВЫЧИСЛЕНИИ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ТЕКСТУРИРОВАННЫХ МАТРИЧНЫХ КОМПОЗИТОВ С ВЫСОКОЙ ОБЪЕМНОЙ ДОЛЕЙ ВКЛЮЧЕНИЙ

Лавров И. В., Бардушкин В. В., Сычёв А. П., Яковлев В. Б., Кочетыгов А. А.

ON CALCULATION OF THE EFFECTIVE THERMAL CONDUCTIVITY OF TEXTURED
MATRIX COMPOSITES WITH HIGH VOLUME FRACTION OF INCLUSIONS

I. V. Lavrov¹, V. V. Bardushkin¹, A. P. Sychev², V. B. Yakovlev¹, A. A. Kochetygov¹

¹ National Research University Of Electronic Technology, Moscow, Russia

² Southern Scientific Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia
e-mail: iglavr@mail.ru

Abstract. In the generalized singular approximation the expression for a tensor \mathbf{k}^* of effective thermal conductivity of a multicomponent matrix composite is received. Each component is considered consisting of isotropic ellipsoidal inclusions with orientations distributed under some probabilistic law. The shape of the inclusions of a given type (relating to the given component) is considered identical.

On the basis of the received expression the method is developed for calculation of a tensor \mathbf{k}^* of the three-component textured matrix tribocomposite with epoxy ED-20 system as a matrix, inclusions from a polytetrafluoroethylene of spherical shape as an antifrictional component and glass fibers as the reinforcing component. It is considered that glass fibers, have small dispersion in orientations around some axis – a texture axis, their volume fraction changes in the range from 0,4 to 0,7. The method uses fine tuning of parameter $k^{(c)}$ of the comparison medium depending on a volume fraction of glass fibers and a ratio between thermal conductivities of inclusions and of matrix. This tuning dependence is received by comparison of results of model and finite-differences calculations for a two-component matrix composite with glass fibers without dispersion of their orientations. The method is applied to a research of influence of size of dispersion in orientations of glass fibers to tensor \mathbf{k}^* components. Dependences of principal components of tensor of the effective thermal conductivity of this tribocomposite on a volume fraction of the glass reinforcing inclusions are given at various sizes of dispersion in their orientations. It is shown that increase in dispersion in orientations of glass fibers leads to reduction of longitudinal component and to growth of transverse component of tensor \mathbf{k}^* with respect to the texture axis. It is also shown that values of the principal components of a tensor of effective thermal conductivity are less than average on volume basis value of a thermal conductivity.

Keywords: tensor of effective thermal conductivity, texture, composite, tribocomposite, multicomponent, generalized singular approximation, matrix, ellipsoidal inclusion, self-consistent approximation, dispersion in orientations, fibers.

Введение

Детали и узлы из композитных материалов в конструкциях различного функциональ-

ного назначения (например, триботехнического) в процессе эксплуатации подвергаются интенсивным внешним воздействиям различного физического характера. Одним из ре-

Лавров Игорь Викторович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры «Высшая математика №2» Национального исследовательского университета «МИЭТ»; e-mail: iglavr@mail.ru.

Бардушкин Владимир Валентинович, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедр «Высшая математика №2» и «Системная среда качества» Национального исследовательского университета «МИЭТ»; e-mail: bardushkin@mail.ru.

Сычёв Александр Павлович, канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией транспорта и новых композиционных материалов Южного научного центра РАН; e-mail: aleks_sap@mail.ru.

Яковлев Виктор Борисович, д-р физ.-мат. наук, профессор РАН, профессор кафедры «Высшая математика №2» Национального исследовательского университета «МИЭТ»; e-mail: yakovlev@miee.ru.

Кочетыгов Андрей Александрович, аспирант кафедры «Высшая математика №2» Национального исследовательского университета «МИЭТ»; e-mail: aakcht@gmail.com.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ (16-08-00262-а, 17-08-01374-а).

зультатов таких воздействий является неравномерный нагрев поверхностных и объемных слоев композитов, приводящий (посредством влияния на диффузионные и сегрегационные процессы) к существенным изменениям их физико-механических свойств [1]. Поэтому наряду с механическими и электрофизическими важным значение имеют теплофизические свойства композитов, в том числе их макроскопическая (эффективная) теплопроводность, которая зависит не только от теплопроводности составляющих композита и их концентраций в нем, но и от его структурной организации.

Одной из составляющих структуры является текстура материала, характеризующаяся с одной стороны наличием выделенных направлений в материале, а с другой — разбросом в ориентациях элементов неоднородности (включений, кристаллитов) относительно «идеальных» ориентационных положений. При наличии текстуры материал, как правило, имеет анизотропные макроскопические свойства (отметим, что можно привести примеры композитов, у которых имеются изотропные материальные характеристики, несмотря на наличие текстуры [2]).

Первой работой, посвященной вычислению теплопроводящих характеристик текстурированного материала, по-видимому, является работа Рэлея [3], в которой он вычисляет эффективную теплопроводность регулярной двумерной периодической структуры с круговыми бесконечными цилиндрами для случая, когда радиусы цилиндров существенно меньше расстояний между ними. Среди относительно новых можно отметить работы [4, 5]. В них для нахождения эффективной теплопроводности двухкомпонентных матричных композитов используются варианты классических приближений, разработанных ранее для вычисления эффективных диэлектрических и электропроводящих характеристик неоднородных материалов, а также для верификации полученных результатов с помощью вариационных принципов производится двусторонняя оценка эффективных характеристик. В работе [6] используется обобщенное сингулярное приближение (ОСП) для вычисления эффективной теплопроводности трехкомпонентного матричного композита, в котором один из компонентов представлен в материале сильно вытянутыми сфероидальными включениями с сонаправленными осями.

Отметим, что рассматриваемая далее задача вычисления эффективной теплопроводности неоднородного материала с учетом разброса в ориентациях его включений с математической точки зрения является более сложной из-за необходимости учитывать как сами ориентации, так и их вероятностное распределение. В силу математической эквивалентности постановки электростатических и термостатических задач методы, разработанные для вычисления эффективных диэлектрической проницаемости и электропроводности, могут быть применены и для нахождения эффективной теплопроводности материала такой же структуры. Среди работ, посвященных учету вероятностного распределения ориентаций включений, можно отметить [7, 8]. Метод учета ориентаций включений с применением теории представлений группы $SO(3)$ [9], предложенный в [10] и развитый затем в [11], позволил существенно продвинуться в решении задач вычисления эффективных характеристик неоднородных материалов с учетом разброса в ориентациях их элементов неоднородности.

Обобщенная модель Максвелла–Гарнетта (МГ) для вычисления эффективной диэлектрической проницаемости текстурированных матричных композитов, примененная и усовершенствованная в [10, 11], обеспечивает приемлемую точность при объемной доле включений, не превышающей в двумерном случае 0,4 [12], а в трехмерном случае — 0,3 [13]. Однако при увеличении объемной доли включений погрешность обобщенного приближения МГ начинает довольно быстро возрастать.

В настоящей работе разработан метод вычисления эффективной теплопроводности текстурированного матричного композита с волокнистыми включениями, имеющими небольшой разброс в ориентациях, с объемной долей в материале $\leq 0,7$. Метод основан на ОСП, для учета ориентаций включений используется результат, полученный в [11]. Метод применяется для учета влияния разброса в ориентациях армирующих стеклянных волокон на эффективную теплопроводность трехкомпонентного матричного трибокомпозиата.

1. Постановка задачи и ее решение в ОСП

Пусть имеется образец объемом V статистически однородного композитного матери-

ала матричного типа с однородными включениями n видов, которые случайным образом распределены в объеме образца. Будем считать, что включения, относящиеся к одному виду, имеют одинаковые материальные характеристики, одинаковую эллипсоидальную форму и ориентированы в пространстве по некоторому вероятностному закону, характерному для данного вида включений. Все компоненты, составляющие данный композит, будем считать изотропными с точки зрения теплопроводящих характеристик. Теплопроводность матрицы обозначим $k^{(m)}$, теплопроводности включений i -го вида — через $k^{(i)}$ ($i = 1, \dots, n$). Объемную долю включений i -го вида обозначим как $f^{(i)}$, полную объемную долю всех включений — через f . Будем также считать, что внутренние источники тепла в материале отсутствуют.

Пусть к границе S данного образца приложено постоянное во времени однородное температурное поле, напряженность которого обозначим \mathbf{H}_0 . Тогда в образце установится некоторое постоянное температурное поле $u(\mathbf{r})$ с напряженностью $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla u(\mathbf{r})$, а также постоянное распределение тепловых потоков. Локально векторы плотности тепловых потоков $\mathbf{q}(\mathbf{r})$ связаны с напряженностью установившегося температурного поля материальным уравнением (закон Фурье)

$$\mathbf{q}(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}),$$

где $k(\mathbf{r})$ — локальная теплопроводность данного композитного материала, являющаяся случайной кусочно-постоянной функцией координат

$$k(\mathbf{r}) = \begin{cases} k^{(m)}, & \mathbf{r} \in \tilde{V}^{(m)}; \\ k^{(i)}, & \mathbf{r} \in \tilde{V}^{(i)}, \quad i = 1, \dots, n, \end{cases}$$

$\tilde{V}^{(m)}$ — объем, занимаемый матрицей, $\tilde{V}^{(i)}$ — суммарный объем, занимаемый всеми включениями i -го вида.

Тензор \mathbf{k}^* эффективной теплопроводности данного образца композита определяется как оператор, связывающий средние по объему образца векторы плотности теплового потока \mathbf{q} и напряженности температурного поля \mathbf{H}

$$\langle \mathbf{q} \rangle = \mathbf{k}^* \langle \mathbf{H} \rangle.$$

Для вычисления \mathbf{k}^* рассматривается краевая задача для температурного поля $u(\mathbf{r})$ в дан-

ном образце

$$\begin{aligned} \nabla \cdot k(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r} \in V; \\ u|_S &= -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.1)$$

а также аналогичная вспомогательная задача для температурного поля в однородном теле сравнения, имеющем такие же размеры и форму, как и у образца неоднородной среды [6, 14, 15],

$$\begin{aligned} \nabla \cdot k^{(c)}\nabla u^{(c)}(\mathbf{r}) &= 0, & \mathbf{r} \in V; \\ u^{(c)}|_S &= -(\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{r}), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где индексом « (c) » отмечены величины, относящиеся к телу сравнения. Введем обозначения для разностей между величинами задач (1.1) и (1.2):

$$u'(\mathbf{r}) = u(\mathbf{r}) - u^{(c)}(\mathbf{r}), \quad k'(\mathbf{r}) = k(\mathbf{r}) - k^{(c)}.$$

Тогда, вычитая (1.2) из (1.1), получим краевую задачу

$$\begin{aligned} \nabla \cdot k^{(c)}\nabla u'(\mathbf{r}) &= -\nabla \cdot k'(\mathbf{r})\nabla u(\mathbf{r}), \\ \mathbf{r} \in V; \\ u'|_S &= 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Введем функцию Грина $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)$ задачи (1.3) условиями

$$\begin{aligned} \nabla \cdot k^{(c)}\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) &= -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \\ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1)|_{\mathbf{r}_1 \in S} &= 0, \end{aligned}$$

тогда решение задачи (1.3) в пределе при $V \rightarrow \infty$ можно записать в виде [6, 14, 15]

$$u'(\mathbf{r}) = \int G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\nabla \cdot k'(\mathbf{r}_1)\nabla u(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1, \quad (1.4)$$

поскольку в этом случае $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$. Преобразовав (1.4) по частям и взяв затем градиент от левой и правой частей, получим

$$\mathbf{H}'(\mathbf{r}) = \mathbf{Q}(\mathbf{r})k'(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}),$$

где $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ — интегральный оператор, действие которого на некоторый тензор $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ определяется формулой

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \int \nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\mathbf{f}(\mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1,$$

$\nabla^1 \otimes \nabla^1 G(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})$ — тензор вторых производных функции Грина, верхний индекс 1 у дифференциального оператора Гамильтона

означает дифференцирование по \mathbf{r}_1 . В итоге для \mathbf{k}^* получается точное операторное выражение [15]

$$\mathbf{k}^* = \left\langle k(\mathbf{r}) \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})k'(\mathbf{r}) \right)^{-1} \right\rangle \times \left\langle \left(\mathbf{I} - \mathbf{Q}(\mathbf{r})k'(\mathbf{r}) \right)^{-1} \right\rangle^{-1}, \quad (1.5)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор 2-го ранга.

Для вычисления по формуле (1.5) требуется знание корреляционных функций всех порядков, поскольку обратные операторы в (1.5) подразумеваются как ряды по степеням $\mathbf{Q}(\mathbf{r})k'(\mathbf{r})$, что делает невозможным практическое применение данной формулы без каких-либо упрощающих предположений. Эллипсоидальная форма включений позволяет предположить, что температурные поля внутри них близки к однородным (матрицу также можно считать состоящей из включений сферической формы). Если пренебречь неоднородностями поля внутри каждого из включений, то интегральный оператор $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ можно заменить постоянным тензором \mathbf{g} в пределах конкретного включения. К этому же результату можно прийти, пренебрегая во вторых производных функции Грина $G_{,ij}(\mathbf{r})$, являющихся обобщенными функциями, формальной частью, а оставляя только сингулярную часть $G_{,ij}^{(s)}(\mathbf{r})$ [16, 17]

$$G_{,ij}(\mathbf{r}) \approx G_{,ij}^{(s)}(\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r}) \oint_{S'} \frac{\partial G(\mathbf{r}')}{\partial x'_i} n'_j dS',$$

$$i, j = 1, 2, 3,$$

где интегрирование производится по поверхности S' данного включения; n'_j — j -я компонента внешней единичной нормали к S' .

Выражение, полученное из (1.5) заменой оператора $\mathbf{Q}(\mathbf{r})$ на тензор \mathbf{g} , есть не что иное, как ОСП для вычисления тензора эффективных характеристик неоднородного материала [14, 17], в данном случае — для вычисления тензора эффективной теплопроводности [6, 15]

$$\mathbf{k}^* = \left\langle k(\mathbf{r}) \left(\mathbf{I} - \mathbf{g}(k(\mathbf{r}) - k^{(c)}) \right)^{-1} \right\rangle \times \left\langle \left(\mathbf{I} - \mathbf{g}(k(\mathbf{r}) - k^{(c)}) \right)^{-1} \right\rangle^{-1}. \quad (1.6)$$

Тензор \mathbf{g} зависит от формы включения и от материального параметра среды сравнения $k^{(c)}$. В случае, когда среда сравнения выбирается изотропной, для компонент тензора \mathbf{g} в системе координат, связанной с осями эллипсоида, справедливы выражения, являющиеся частным случаем выражений, полученных в [7] для анизотропной среды сравнения

$$g_{jj} = -\frac{L_j}{k^{(c)}}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$g_{ij} = 0, \quad i \neq j,$$

где L_j — главные компоненты тензора \mathbf{L} геометрических факторов эллипсоида в вакууме [18]

$$L_j = \frac{a_1 a_2 a_3}{2} \int_0^\infty \frac{dq}{(a_j^2 + q)R(q)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$R(q) = [(a_1^2 + q)(a_2^2 + q)(a_3^2 + q)]^{1/2},$$

а a_j , $j = 1, 2, 3$, — полуоси эллипсоида.

Варьируя значение параметра среды сравнения $k^{(c)}$, можно из (1.6) получать различные типы приближений для вычисления эффективной теплопроводности. В частности, взяв $k^{(c)}$ равным теплопроводности матрицы $k^{(m)}$, получим приближение, являющееся аналогом обобщенного приближения МГ для вычисления эффективных диэлектрических характеристик [14].

Для случая матричного композита с n видами включений соотношение (1.6) может быть переписано в виде

$$\mathbf{k}^* = \left((1-f)k^{(m)}\boldsymbol{\lambda}^{(m)} + \sum_{i=1}^n f^{(i)}k^{(i)} \left\langle \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \right\rangle \right) \times \left((1-f)\boldsymbol{\lambda}^{(m)} + \sum_{i=1}^n f^{(i)} \left\langle \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \right\rangle \right)^{-1}, \quad (1.7)$$

где

$$\left\langle \boldsymbol{\lambda}^{(i)} \right\rangle = \frac{1}{\tilde{V}^{(i)}} \sum_{j_i=1}^{N_i} V_{j_i}^{(i)} \boldsymbol{\lambda}_{j_i}^{(i)},$$

$$\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = \left(\mathbf{I} + (k^{(c)})^{-1} \mathbf{L}^{(m)} (k^{(m)} - k^{(c)}) \right)^{-1},$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{j_i}^{(i)} = \left(\mathbf{I} + (k^{(c)})^{-1} \mathbf{L}_{j_i}^{(i)} (k^{(i)} - k^{(c)}) \right)^{-1},$$

$$j_i = 1, \dots, N_i; \quad i = 1, \dots, n; \quad (1.8)$$

$V_{j_i}^{(i)}$ и $\mathbf{L}_{j_i}^{(i)}$ — объем и тензор геометрических факторов j_i -го включения i -го вида, N_i — количество включений i -го вида; $\mathbf{L}^{(m)}$ — тензор

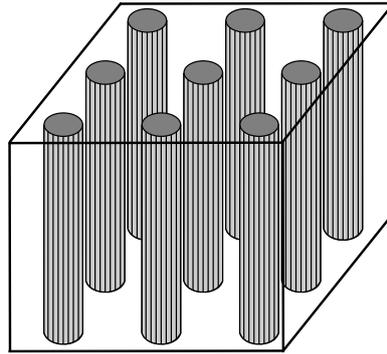


Рис. 1. Матричный композит с регулярно расположенными включениями в форме цилиндров

геометрических факторов зерен, составляющих матрицу. Поскольку все включения i -го вида имеют одинаковую форму и материальные свойства, то угловые скобки в (1.7) фактически означают усреднение по ориентациям включений данного вида.

Тензоры $\mathbf{L}^{(m)}$, $\mathbf{L}_{j_i}^{(i)}$ имеют диагональный вид в системе координат, связанной с геометрическими осями соответствующего включения. Обозначим эти системы координат соответственно как $\xi^{(m)}\eta^{(m)}\zeta^{(m)}$ (все зерна матрицы ориентированы одинаково) и $\xi_{j_i}^{(i)}\eta_{j_i}^{(i)}\zeta_{j_i}^{(i)}$ ($j_i = 1, \dots, N_i, i = 1, \dots, n$). Так как теплопроводности матрицы, среды сравнения и включений всех видов — скаляры, то тензоры $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ и $\boldsymbol{\lambda}_{j_i}^{(i)}$ ($j_i = 1, \dots, N_i, i = 1, \dots, n$) также имеют диагональный вид в соответствующих системах координат, а их главные компоненты имеют следующие выражения:

$$\lambda_j^{(m)} = \left(1 + (k^{(c)})^{-1}L_j^{(m)}(k^{(m)} - k^{(c)})\right)^{-1},$$

$$\lambda_j^{(i)} = \left(1 + (k^{(c)})^{-1}L_j^{(i)}(k^{(i)} - k^{(c)})\right)^{-1}, \quad (1.9)$$

$j = 1, 2, 3; \quad i = 1, \dots, n.$

Если зерна, составляющие матрицу, принимать сферическими, то $\mathbf{L}^{(m)} = \mathbf{I}/3$ и для $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ получим

$$\boldsymbol{\lambda}^{(m)} = \frac{3k^{(c)}}{2k^{(c)} + k^{(m)}}\mathbf{I}. \quad (1.10)$$

Отметим, что аналогичное выражение получается и для $\boldsymbol{\lambda}^{(i)}$, если считать, что включения i -го вида также имеют сферическую форму.

2. Применение ОСП к вычислению эффективной теплопроводности матричного трибокомпозита с учетом разброса в ориентациях включений

Рассмотрим матричный композит двумерной периодической структуры с включениями в виде одинаково направленных волокон с круглым сечением (рис. 1), объемная доля которых изменяется в диапазоне от 0,4 до 0,7.

Как показали сеточные расчеты, хорошую точность при вычислении компоненты теплопроводности, перпендикулярной к направлению волокон, обеспечивает выражение (1.7) с подстройкой параметра $k^{(c)}$ среды сравнения в зависимости от объемной доли включений и от отношения теплопроводности включений к теплопроводности матрицы. Величину $k^{(c)}$ удобно представить в виде

$$k^{(c)} = c^{(c)} \left(f^{(1)}, \frac{k^{(1)}}{k^{(m)}} \right) k^{(m)}, \quad (2.1)$$

где $f^{(1)}$ и $k^{(1)}$ — объемная доля и теплопроводность волокнистых включений, $c^{(c)} \left(f^{(1)}, \frac{k^{(1)}}{k^{(m)}} \right)$ — подстроечный коэффициент, являющийся функцией аргументов $f^{(1)}$ и $\frac{k^{(1)}}{k^{(m)}}$.

На рис. 2 представлена полученная в результате сравнения сеточных расчетов с модельными по формуле (1.7) зависимость $c^{(c)}$ от объемной доли $f^{(1)}$ стеклянных волокон в композите с эпоксидной системой типа ЭД-20 в качестве матрицы ($k^{(1)} \approx 1,3$ Вт/(м·К), $k^{(m)} \approx 0,2$ Вт/(м·К) [19]). Значения $c^{(c)}$, полученные в результате сравнения сеточных и модельных расчетов, на рис. 2 представлены отдельными точками (в виде «кружочков»),

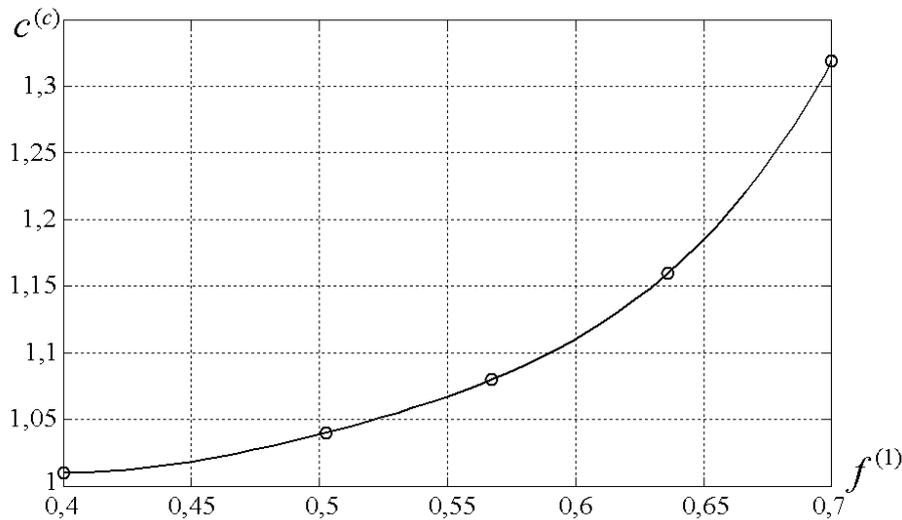


Рис. 2. Зависимость подстроечного коэффициента среды сравнения от объемной доли стеклянных волокон в матричном композите с двумерной периодической структурой

а сплошная кривая — полиномиальная интерполяция данной зависимости.

Полученная зависимость $c^{(c)}$ от $f^{(1)}$ использовалась для прогнозирования поперечных к оси текстуры компонент тензора эффективной теплопроводности трехкомпонентного матричного трибокомпозиата (матрица — ЭД-20, включения 1-го вида — армирующие волокна из алюмоборосиликатного стекла, включения 2-го вида — антифрикционные политетрафторэтиленовые (ПТФЭ) сферической формы). Считалось, что стеклянные волокна имеют осевое распределение ориентаций с небольшим разбросом относительно положения, соответствующего ориентации волокон в композите, изображенном на рис. 1. В этом случае обе поперечные к оси текстуры компоненты k_{11}^* и k_{22}^* равны между собой.

Полагая, что зерна матрицы, как и включения 2-го вида (ПТФЭ), имеют сферическую форму, выражение (1.7) для вычисления эффективной теплопроводности рассматриваемого трибокомпозиата можно записать в виде

$$\mathbf{k}^* = \left((1-f)k^{(m)}\boldsymbol{\lambda}^{(m)} + f^{(2)}k^{(2)}\boldsymbol{\lambda}^{(2)} + f^{(1)}k^{(1)}\langle\boldsymbol{\lambda}^{(1)}\rangle \right) \times \left((1-f)\boldsymbol{\lambda}^{(m)} + f^{(2)}\boldsymbol{\lambda}^{(2)} + f^{(1)}\langle\boldsymbol{\lambda}^{(1)}\rangle \right)^{-1}, \quad (2.2)$$

где $\boldsymbol{\lambda}^{(m)}$ имеет вид (1.10), а

$$\boldsymbol{\lambda}^{(2)} = \frac{3k^{(c)}}{2k^{(c)} + k^{(2)}}\mathbf{I}.$$

Угловые скобки в (2.2) означают усреднение по всем ориентациям включений 1-го вида в некоторой фиксированной прямоугольной системе координат.

Удобнее всего в качестве такой системы выбирать прямоугольную систему координат, связанную с текстурой образца. Обозначим ее $x_1x_2x_3$, направив ось x_3 вдоль оси текстуры. Тогда ориентация конкретного включения 1-го вида в системе $x_1x_2x_3$ — это поворот $g^{(1)}(\psi^{(1)}, \theta^{(1)}, \varphi^{(1)})$, где $\psi^{(1)}, \theta^{(1)}, \varphi^{(1)}$ — углы Эйлера, при помощи которого осуществляется переход от системы $x_1x_2x_3$ к системе $\xi^{(1)}\eta^{(1)}\zeta^{(1)}$, связанной с данным включением 1-го вида (номер включения будем опускать). Для осевого распределения ориентаций включений 1-го вида плотность распределения не зависит от $\psi^{(1)}$ и $\varphi^{(1)}$, т.е. имеет вид [11]

$$p(\theta^{(1)}) \equiv \frac{1}{8\pi^2} f(\theta^{(1)}), \quad (2.3)$$

где одномерная плотность $f(\theta^{(1)})$ удовлетворяет условию нормировки

$$\int_0^{\pi/2} f(\theta^{(1)}) d\theta^{(1)} = 1.$$

В этом случае выражения для компонент тензора $\boldsymbol{\lambda}^{(1)}$, усредненного по ориентациям вклю-

чений 1-го вида, будут иметь вид [11]

$$\begin{aligned} \langle \lambda_{11}^{(1)} \rangle &= \langle \lambda_{22}^{(1)} \rangle = \\ &= \frac{\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)}}{4} (1 + I_1) + \frac{\lambda_3^{(1)}}{2} (1 - I_1), \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\langle \lambda_{33}^{(1)} \rangle = \frac{\lambda_1^{(1)} + \lambda_2^{(1)}}{2} (1 - I_1) + \lambda_3^{(1)} I_1,$$

$$\langle \lambda_{jl}^{(1)} \rangle = 0, \quad j \neq l.$$

где

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta^{(1)} f(\theta^{(1)}) d\theta^{(1)}.$$

Что касается продольной к оси текстуры компоненты k_{33}^* , то для матричного композита со строго волокнистой структурой в случае, когда волокна представляют собой эллиптические цилиндры без разброса в ориентациях, обобщенное приближение МГ дает для нее точное значение при любой объемной доле включений. Действительно, взяв $k^{(c)} = k^{(m)}$, по формулам (1.9) с учетом того, что для включения i -го вида в форме эллиптического цилиндра $L_3^{(i)} = 0$, получим

$$\begin{aligned} \lambda_j^{(m)} &= 1, \quad j = 1, 2, 3, \\ \lambda_3^{(i)} &= 1, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.5)$$

При отсутствии разброса в ориентациях цилиндров из (1.7) для продольной компоненты имеем

$$\begin{aligned} k_{33}^* &= \left((1 - f)k^{(m)} + \sum_{i=1}^n f^{(i)}k^{(i)} \right) \times \\ &\times \left((1 - f) + \sum_{i=1}^n f^{(i)} \right)^{-1} = \langle k \rangle_{\text{vol}}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Поскольку для строго волокнистой структуры точное значение продольной компоненты эффективной теплопроводности равно среднему по объему, то утверждение доказано.

3. Результаты модельных расчетов и их обсуждение

На основе формул (2.2), (2.4), (1.9) в настоящей работе производилось вычисление тензора эффективной теплопроводности данного

трехкомпонентного матричного трибокомпозиита с объемной долей стеклянных включений, изменяющейся в диапазоне от 0,4 до 0,7, при различных величинах разброса в ориентациях включений. Объемная доля сферических включений ПТФЭ принималась равной 0,05. В качестве модели распределения ориентаций вида (2.3) использовалось распределение рэлеевского типа с одномерной плотностью [20]

$$f(\theta^{(1)}) = \frac{\text{tg } \theta^{(1)}}{s^2 \cos^2 \theta^{(1)}} \exp \left(-\frac{\text{tg}^2 \theta^{(1)}}{2s^2} \right),$$

$$0 \leq \theta^{(1)} \leq \pi/2,$$

где параметр s^2 характеризует величину разброса в ориентациях. Этот параметр имеет смысл половины начального момента второго порядка случайной величины $\text{tg } \theta^{(1)}$. Стеклянные волокна моделировались сильно вытянутыми эллипсоидами вращения с полуосями a_1, a_2, a_3 ($a_1 = a_2$) и аспектным отношением $a_1 : a_3 = 1 : 1000$.

Для вычисления поперечной к оси текстуры компоненты k_{11}^* параметр среды сравнения $k^{(c)}$ вычислялся по соотношению (2.1), при этом величина поправочного коэффициента $c^{(c)}$ выбиралась согласно зависимости от объемной доли $f^{(1)}$, приведенной на рис. 2. Для вычисления продольной компоненты k_{33}^* применялось обобщенное приближение МГ, т.е. принималось, что $k^{(c)} = k^{(m)}$. Применение обобщенного приближения МГ в данном случае обосновывается тем, что, хотя рассматриваемый трехкомпонентный композит не имеет строгой волокнистой структуры, присутствие сферических включений ПТФЭ вносит очень малую поправку в итоговый результат вследствие их малой объемной доли (0,05), а также относительной близости значений теплопроводности ПТФЭ и теплопроводности матрицы. Результаты численного моделирования представлены на рис. 3.

Графики зависимостей, представленные на рис. 3, показывают, что компоненты вдоль (k_{33}^*) и поперек (k_{11}^*) оси текстуры сильно различаются, но разброс в ориентациях стеклянных включений приводит к некоторому уменьшению их различий. При увеличении объемной доли стеклянных включений значения обеих компонент увеличиваются.

Значения k_{33}^* , вычисленные в обобщенном приближении МГ при отсутствии разброса в

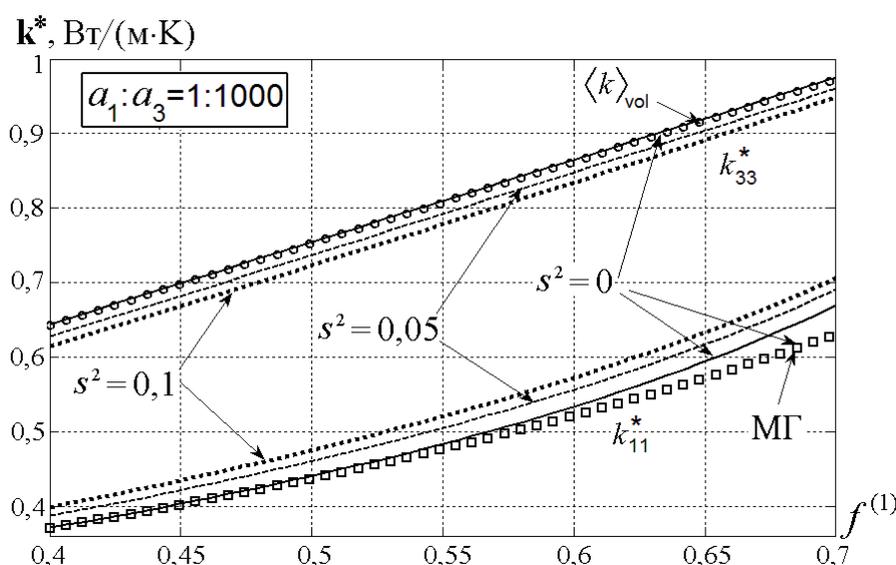


Рис. 3. Влияние разброса в ориентациях стеклянных волокон на зависимости компонент тензора эффективной теплопроводности трехкомпонентного матричного трибокомпозиата от объемной доли волокон

ориентациях, очень близки к средним по объему (на рис. 3.1 изображены «кружочками»)

$$\langle k \rangle_{\text{vol}} = (1 - f)k^{(m)} + f^{(1)}k^{(1)} + f^{(2)}k^{(2)}$$

во всем диапазоне $0,4 \leq f^{(1)} \leq 0,7$, и при этом немного превышают их. Однако при вычислении k_{11}^* обобщенное приближение МГ дает заметно заниженное значение (на рис. 3 зависимость при отсутствии разброса в ориентациях волокон изображена «квадратиками»).

Можно предположить, что при малом разбросе в ориентациях включений предложенный в настоящей работе метод будет обеспечивать приемлемую точность вычисления эффективной теплопроводности матричного композита. Этот вывод можно сделать, исходя из принципа непрерывности: малые изменения параметров (углов Эйлера, характеризующих ориентации включений) будут приводить к малым изменениям характеристик материала, пока его структура не претерпит существенные качественные изменения. В данном случае существенным изменением структуры материала будут множественные соприкосновения включений между собой, вероятность которых возрастает с увеличением как их объемной доли, так и разброса в ориентациях.

Заключение

Перечислим основные результаты настоящей работы.

1. С помощью ОСП получена формула (1.7) для вычисления тензора эффективной теплопроводности многокомпонентного матричного композита с изотропными компонентами с учетом разброса в ориентациях включений разных видов.

2. Предложен метод вычисления тензора эффективной теплопроводности многокомпонентного матричного композита с высокой объемной долей включений и разбросом в ориентациях одного из видов включений волоконистого типа, основанный на выражении (1.7) и выборе параметра среды сравнения, согласованном с результатами сеточных расчетов (для случая отсутствия разброса в ориентациях волокон).

3. С помощью разработанного метода проведено моделирование теплопроводящих характеристик трехкомпонентного волоконистого матричного трибокомпозиата, учитывающее изменение объемного содержания армирующих стеклянных волокон и разброс в их ориентациях (рис. 3).

Литература

1. Колесников В.И. Теплофизические процессы в металлополимерных трибосистемах. М.: Наука, 2003. 279 с.

2. Лавров И. Диэлектрические и проводящие свойства неоднородных сред с текстурой. Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011. 168 с.
3. Rayleigh J.W.S. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium // *Philosophical Magazine*. 1892. Vol. 34. P. 481–502.
4. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Эффективная теплопроводность композита в случае отклонений формы включений от шаровой // Математическое моделирование и численные методы. 2014. Вып. 4. С. 3–17.
5. Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н., Савельева И.Ю. Оценка эффективной теплопроводности однонаправленного волокнистого композита методом согласования // Наука и образование. МГТУ им. Баумана. Электронный журнал. 2013. № 11. С. 519–532. doi: 10.7463/1113.0622927
6. Лавров И.В., Бардушкин В.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б., Кириллов Д.А. О вычислении эффективной теплопроводности текстурированных трибокомпозитов // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. № 2. С. 48–56.
7. Giordano S. Order and disorder in heterogeneous material microstructure: electric and elastic characterization of dispersions of pseudo-oriented spheroids // *International Journal of Engineering Science*. 2005. Vol. 43. P. 1033–1058. doi: 10.1016/j.ijengsci.2005.06.002
8. Giordano S. Equivalent permittivity tensor in anisotropic random media // *J. of Electrostatics*. 2006. Vol. 64. P. 655–663. doi: 10.1016/j.elstat.2005.11.003
9. Гельфанд И.М., Минлос Р.А., Шапиро З.Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. М.: ГИФМЛ, 1958. 294 с.
10. Иванов Е.Н., Лавров И.В. Теория диэлектрической проницаемости композиционных материалов с текстурой. Часть 1 // Оборонный комплекс – научно-техническому прогрессу России. 2007. № 1. С. 73–78.
11. Лавров И.В. Диэлектрическая проницаемость композиционных материалов с текстурой: эллипсоидальные анизотропные кристаллиты // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 1. С. 52–58.
12. Завгородняя М.И., Лавров И.В. Эффективные диэлектрические характеристики двумерных регулярных матричных структур: сравнение модельных и сеточных расчетов // Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения. 2017. Т. 17. Ч. 3. С. 668–672.
13. Spanoudaki A., Pelster R. The dependence on effective dielectric properties of composite materials: the particle size distribution // *Physical Review B*. 2001. Vol. 64. P. 064205–1–064205–6. doi: 10.1103/PhysRevB.64.064205
14. Колесников В.И., Яковлев В.Б., Бардушкин В.В., Лавров И.В., Сычев А.П., Яковлева Е.Н. Об объединении методов оценки эффективных диэлектрических характеристик гетерогенных сред на основе обобщенного сингулярного приближения // Доклады Академии наук. 2013. Т. 452. № 1. С. 27–31. doi: 10.7868/S0869565213260083
15. Колесников В.И., Лавров И.В., Бардушкин В.В., Сычев А.П., Яковлев В.Б. Метод оценки распределений локальных температурных полей в многокомпонентных композитах // Наука Юга России. 2017. Т. 13. № 2. С. 13–20. doi: 10.23885/2500-0640-2017-13-2-13-20
16. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. М.: ГИФМЛ, 1958. 440 с.
17. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеднородных сред. М.: Наука, 1977. 399 с.
18. Борен К., Хафмен Д. Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
19. Физические величины: Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.
20. Лавров И.В. Эффективная проводимость поликристаллической среды. Одноосная текстура и двuosные кристаллиты // Известия вузов. Электроника. 2010. № 3. С. 3–12.

References

1. Kolesnikov V.I. *Thermophysical processes in metal-polymeric tribosystems*. Nauka, Moscow, 2003. (In Russian)
2. Lavrov I. *Dielectric and conductive properties of inhomogeneous media with a texture*. LAP Lambert Academic Publishing, Saarbrücken, 2011. (In Russian)
3. Rayleigh J.W.S. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium. *Philosophical Magazine*, 1892, vol. 34, pp. 481–502.
4. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Effective thermal conductivity of a composite in case of inclusions shape deviations from spherical ones. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennyye metody* [Mathematical modeling and numerical methods], 2014, no. 4, pp. 3–17. (In Russian)
5. Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N., Savel'eva I.Yu. Evaluation of effective thermal conductivity of unidirectional fiber composite by the method of self-consistency. *Nauka i obrazovaniye. MGTU im. Baumana. Elektronnyy zhurnal* [Science and Education. Scientific Periodical of the Bau-

- man MSTU. Electronic Scientific and Technical Journal], 2013, no. 11, pp. 519–532. doi: 10.7463/1113.0622927 (In Russian)
6. Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Sychev A.P., Yakovlev V.B., Kirillov D.A. On calculation of the effective thermal conductivity of textured tribocomposites. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 2, pp. 48–56. (In Russian)
 7. Giordano S. Order and disorder in heterogeneous material microstructure: electric and elastic characterization of dispersions of pseudo-oriented spheroids. *International Journal of Engineering Science*, 2005, vol. 43, pp. 1033–1058. doi: 10.1016/j.ijengsci.2005.06.002
 8. Giordano S. Equivalent permittivity tensor in anisotropic random media. *J. of Electrostatics*, 2006, vol. 64, pp. 655–663. doi: 10.1016/j.elstat.2005.11.003
 9. Gel'fand I.M., Minlos R.A., Shapiro Z.Ja. *Representations of the rotation group and the Lorentz group*. GIFML, Moscow, 1958. (In Russian)
 10. Ivanov Ye.N., Lavrov I.V. The theory of permittivity of composite materials with a texture. Part 1. *Oboronnyy kompleks – nauchno-tekhnicheskomu progressu Rossii* [Defense Complex – Scientific and Technical Progress of Russia], 2007, no. 1, pp. 73–78. (In Russian)
 11. Lavrov I.V. Permittivity of composite materials with texture: ellipsoidal anisotropic crystallites. *Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2009, no. 1, pp. 52–58. (In Russian)
 12. Zavgorodnyaya M.I., Lavrov I.V. Effective dielectric characteristics of two-dimensional regular matrix structures: comparison of model and finite-difference calculations. *Fundamental'nyye problemy radioelektronnoy priborostroyeniya* [Fundamental Problems of Radioelectronics], 2017, vol. 17, part 3, pp. 668–672. (In Russian)
 13. Spanoudaki A., Pelster R. The dependence on effective dielectric properties of composite materials: the particle size distribution. *Physical Review B*, 2001, vol. 64, pp. 064205-1–064205-6. doi: 10.1103/PhysRevB.64.064205
 14. Kolesnikov V.I., Yakovlev V.B., Bardushkin V.V., Lavrov I.V., Sychev A.P., Yakovleva E.N. Association of evaluation methods of the effective permittivity of heterogeneous media on the basis of a generalized singular approximation. *Doklady Physics*, 2013, vol. 58, no. 9, pp. 379–383. doi: 10.1134/S1028335813090012
 15. Kolesnikov V.I., Lavrov I.V., Bardushkin V.V., Sychev A.P., Yakovlev V.B. A method of the estimation of the local thermal fields distribution in multicomponent composites. *Nauka Yuga Rossii* [Science in the South of Russia], 2017, vol. 13, no. 2, pp. 13–20. doi: 10.23885/2500-0640-2017-13-2-13-20 (In Russian)
 16. Gel'fand I.M., Shilov G.E. *Generalized functions. Properties and Operations*. GIFML, Moscow, 1958. (In Russian)
 17. Shermergor T.D. *Micromechanics of inhomogeneous medium*. Nauka, Moscow, 1977. (In Russian)
 18. Bohren C.F., Huffman D.R. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. Wiley-VCH, Weinheim, 1998.
 19. Grigor'ev I.S., Meilikhov E.Z. (eds.) *Physical Quantities: A Handbook*. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1991, 1232 p. (In Russian)
 20. Lavrov I.V. Effective conductivity of a polycrystalline medium. Uniaxial texture and biaxial crystallites. *Semiconductors*, 2011, vol. 45, no. 13, pp. 1621–1627. doi: 10.1134/S106378261113015X