

МАТЕМАТИКА

УДК 330.42

DOI: 10.31429/vestnik-15-4-6-11

МЕТОДЫ ИЗМЕРЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО СЛУЧАЙНОГО ШУМА

Дюдин М. С., Калайдин Е. Н.

METHODS FOR ESTIMATION OF DYNAMICAL NOISE

M. S. Diudin¹, E. N. Kalaidin²¹ Krasnodar branch of Financial University, Krasnodar, 350051, Russia¹ Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

e-mail: diudin.m@yandex.ru

Abstract. The article discusses methods for measuring the random component of time series. Existing random noise processing methods work poorly in the case of dynamic noise even for regular dynamics. We consider the existing methods for measuring dynamic noise and propose to use an algorithm based on the Grassberger and Procaccia method. Analysis of the geometric structure of the reconstruction of the attractor (according to the Takens theorem) allows us to determine the scale at which the deterministic signal begins to exceed the noise. The resulting noise estimate allows us to estimate the accuracy of the prediction of the deterministic component. Random deviation grows in proportion to the root of time, complicating an accurate prediction even with accurate simulation of the deterministic component. Measurement of random noise allows us to estimate the possible horizon of the forecast. Methods based on measuring the correlation integral require a large number of points for analysis and take a lot of time for calculations, but have no alternative in the study of dynamic noise.

Keywords: correlation integral, fractal dimension, nonlinear dynamics, time series, Taken's theorem

Существующие методы исследования временных рядов используют разделение динамики на трендовую, сезонную и случайную составляющие, учитывая их в виде аддитивной или мультипликативной модели. Такие представления временного ряда плохо работают в тех случаях, когда случайная компонента не сводится к наблюдаемому шуму (observation noise, measurement noise), а состоит из динамического шума (dynamical noise), непосредственно оказывая влияния на изменение уровней ряда. В случае наблюдаемого шума динамика определяется уравнением $x_{n+1} = F(x_n)$, но мы имеем дело с числовыми данными вида $\hat{x}_{n+1} = F(x_n) + \mu_n$, где μ_n — стохастический добавок. Динамический шум является процессом с обратной связью, когда система испытывает случайные отклонения на каждом временном интервале

$$x_{n+1} = F(x_n + \mu_n)$$

Оба вида случайного шума часто встречаются одновременно в реальных данных [1].

Наблюдаемый шум может быть легко обработан применением скользящего среднего или другими методами. Динамический шум изменяет траекторию системы, являясь частью динамики, и не может быть выделен из неё фильтрацией без искажения детерминированной составляющей.

1. Методы исследования случайного шума

Для исследования случайной компоненты временных рядов, содержащих динамический шум, применены методы, основывающиеся на анализе геометрических свойств траекторий динамической системы в фазовом пространстве. В [2] представлено исследование временного ряда в двумерном пространстве (время, уровни ряда), в этом случае фрактальная размерность временного ряда (time series dimension, TSD — оценка фрактальной размерности ряда) оценивается с помощью расчета длины дуги кривой при разных мас-

Дюдин Михаил Сергеевич, старший преподаватель кафедры математики и информатики Краснодарский филиал Финансового университета при Правительстве РФ; e-mail: diudin.m@yandex.ru.

Калайдин Евгений Николаевич, профессор кафедры теоретической экономики Кубанского государственного университета; e-mail: kalaidin@econ.kubsu.ru.

штабах. Отмечается, что динамический шум увеличивает TSD от единицы (для ряда без шума) до значений между 1 и 1,5. В случае ряда, сгенерированного случайной величиной, TSD = 1,5. К недостаткам этого метода относятся зависимость TSD от дискретности ряда и отсутствие точной оценки зависимости уровня шума от TSD, авторы отмечают лишь монотонную зависимость TSD от стандартного отклонения шума. К достоинствам метода можно отнести возможность исследовать временной ряд, не прибегая к реконструкции фазового пространства.

Одним из способов измерения количественных характеристик случайной компоненты является исследование n -мерного аттрактора системы (реконструированного по временному ряду). В предположениях теоремы Такенса аттрактор системы может быть реконструирован по временному ряду с сохранением свойств, инвариантных относительно диффеоморфизмов. Производится «вложение» временного ряда в n -мерное пространство, в качестве первой переменной берется текущее значение ряда, в качестве последующих — предыдущие значения ряда с некоторым лагом τ (величина лага определяется либо по поведению автокорреляционной функции, либо по анализу средней взаимной информации). Полученная реконструкция позволяет рассчитать фрактальную размерность аттрактора динамической системы породившей временной ряд.

Корреляционная размерность — это один из вариантов фрактальной размерности динамической системы. Помимо информации о сложности динамики, расчет корреляционной размерности может дать информацию о доле случайной компоненты в динамике. Для её оценки исследуется топология аттрактора системы с помощью корреляционного интеграла $C(\varepsilon)$ (вероятность того, что две точки аттрактора окажутся друг от друга на расстоянии менее ε)

$$C = \frac{1}{N^2} \sum_i \sum_{i \neq j} \theta(\varepsilon - \|\bar{x}_i - \bar{x}_j\|),$$

где θ — функция Хевисайда \bar{x}_i — точки аттрактора, N — количество точек.

При увеличении ε вероятность попадания двух точек в сферу радиусом ε (т.е. корреляционный интеграл) будет увеличиваться в зависимости от размерности фазового про-

странства. Если размерность системы равна D , $C(\varepsilon) \propto \varepsilon^D$ при условии, что размерность реконструкции d достаточно высока, иначе скорость роста корреляционного интеграла ограничивается размерностью реконструкции. Таким образом, корреляционная размерность оценивается по угловому коэффициенту зависимости корреляционного интеграла (ε) от масштаба ε в логарифмической шкале.

В настоящее время методы исследования динамического шума, основанные на вычислении корреляционного интеграла, представлены в ряде работ: оценка влияния случайного шума на корреляционный интеграл изложена в работах Grassberger P., Procaccia I. [3]; в работе [4] авторы модифицировали корреляционный интеграл для наилучшего измерения гауссовского шума, Urbanowicz K. и Hołyst J.A. предложили использование корреляционной энтропии $K = \frac{C(\varepsilon, \tau)}{C(\varepsilon, \tau+1)}$ для измерения доли случайного шума [5]; Филатов Д.А., Яновский Л.П. [6] предложили оценивать уровень шума, наблюдая рост корреляционной размерности при увеличении размерности реконструкции (если регрессия проводится по всем значениям корреляционного интеграла, не выделяя линейный участок, корреляционная размерность растет из-за большего наклона «шумового» участка при больших d); в работах [6, 7] на основе алгоритма Grassberger P. и Procaccia I. разработан метод измерения случайного шума, связанный с анализом линейной части зависимости корреляционного интеграла от $\ln(\varepsilon)$. Поскольку связать полученную оценку с какой-либо вероятностной характеристикой случайного шума не представляется возможным, предлагается использовать термин «корреляционная мера шума».

Одной из особенностей корреляционной размерности является тот факт, что для случайного шума скорость роста корреляционного интеграла стремится к размерности реконструкции d , что позволяет оценить диапазон значений случайной компоненты временного ряда. Наличие детерминированной динамики вместе со случайным шумом приводит к появлению на графике корреляционного интеграла двух линейных участков, один из которых будет иметь угловой коэффициент, стремящийся к размерности реконструкции d , что соответствует случайному шуму, второй будет иметь наклон, стремящийся к раз-

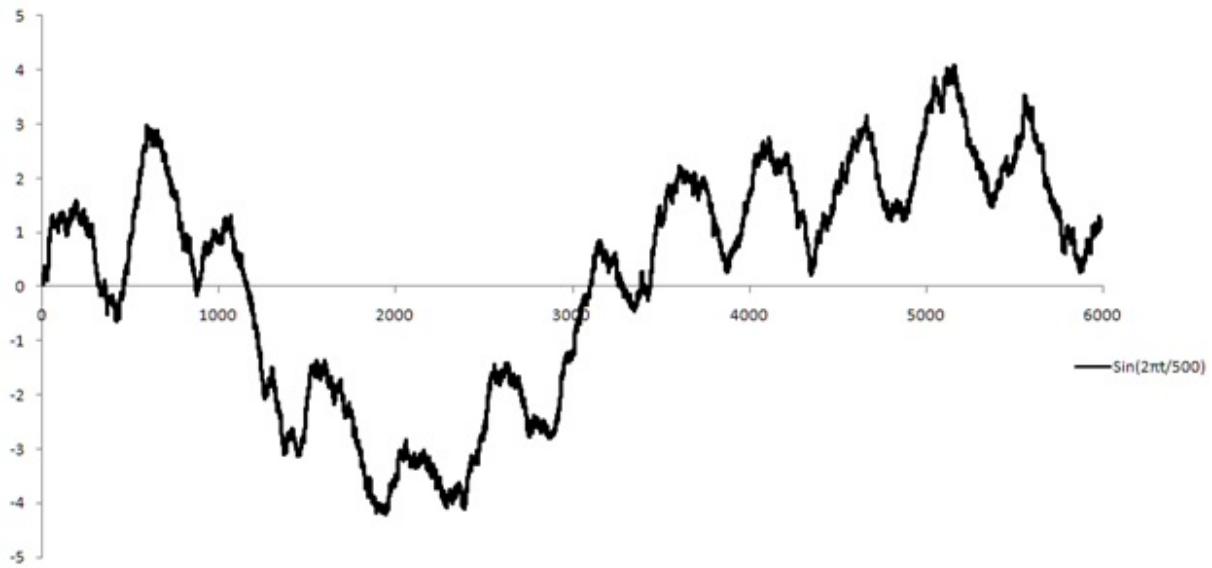


Рис. 1. Добавление динамического шума в $\sin(2\pi t/500)$

мерности динамической системы D , и соответствовать детерминированной компоненте динамики. Участок с динамическим случайным шумом не обязательно имеет линейный вид, если распределение случайного шума не является равномерным. Величина случайной компоненты может быть определена по началу «детерминированного» линейного участка. Значение абсциссы определяет масштаб ε , при котором детерминированная компонента превышает случайную, ордината — уровень шума. Так как наклон «шумового» участка стремится к размерности реконструкции, целесообразно завязать размерность реконструкции относительно предполагаемой размерности системы для более точной оценки случайной компоненты.

2. Измерение случайного шума по началу линейной части корреляционного интеграла

В качестве простейшего примера динамического шума можно привести белый шум, добавленный в рекуррентное соотношение, представляющее дискретную динамическую систему. Рассмотрим свойства динамического шума на примере $\sin(2\pi x/500)$, для чего зададим значения уровней ряда разностным уравнением

$$x(k+1) = x(k) + 2\pi/500 \cos(2\pi k/500) + \varepsilon_k,$$

где ε — случайная величина, распределенная по нормальному закону при среднем $m = 0$ и стандартном отклонении $\sigma = 0,05$.

Применение существующих методов декомпозиции временных рядов не дает приемлемого результата. Полученный временной ряд приведен на рис. 1. Значения остатков после декомпозиции не будут иметь нулевое математическое ожидание и отсутствие автокорреляции, что показывало бы верное выделение случайной компоненты. Выделенная периодическая компонента будет иметь амплитуду и период, существенно отличный от сезонной компоненты детерминированной компоненты динамики. Может быть ошибочно выделена трендовая компонента, построенная по случайным отклонениям.

Оценим случайную компоненту, вычислив корреляционный интеграл. Реконструируем аттрактор системы в 5-мерном пространстве (размерность реконструкции превышает, чтобы «шумовой» участок имел больший наклон), взяв лаг $\tau = 500$

$$x_t = (y_t; y_{t+500}; y_{t+1500}; y_{t+2000}; y_{t+2500}).$$

Вычисление корреляционного интеграла по 15 000 точек дает график, представленный на рис. 2.

В начале графика наблюдается «шумовой» участок с наклоном 4,2, в середине — «детерминированный» линейный участок с наклоном 1,67 (на рис. 2 ограничен пунктирными

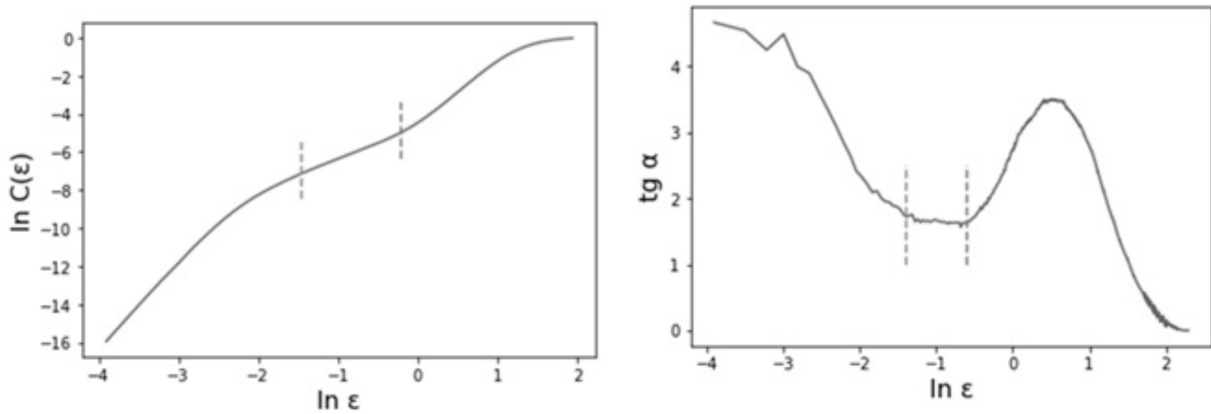


Рис. 2. График корреляционного интеграла для $\sin(2\pi t/500)$ с динамическим шумом и график его тангенса угла наклона

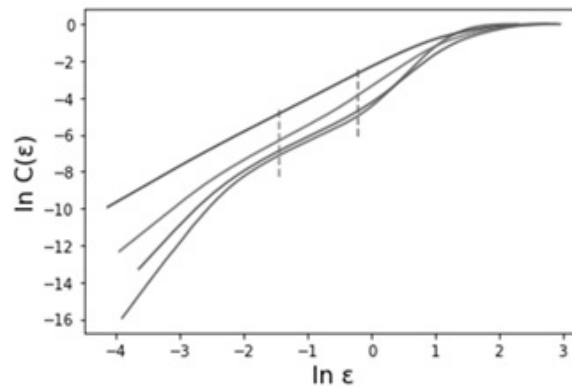


Рис. 3. График корреляционного интеграла для разных размерностей реконструкции ($d = 2, 3, 4, 5$)

линиями). Величина случайной компоненты оценивается как 0,10676. Полученная оценка случайной компоненты приблизительно равна двум стандартным отклонениям для добавленного случайного шума с нормальным распределением.

Влияние размерности реконструкции на значения (ε) можно проиллюстрировать графиками на рис. 3. Нетрудно заметить, что увеличение размерности реконструкции приводит к увеличению углового коэффициента «шумового» участка, в то время как «детерминированный» линейный участок зависимости имеет одинаковый наклон для всех d .

Вычисленная таким образом оценка случайной компоненты может быть использована для оценки погрешности прогноза детерминированной компоненты динамики. Стандартное отклонение случайной компоненты временного ряда σ растет пропорционально

$t^{0,5}$. Таким образом, если полученная оценка случайной компоненты пропорциональна σ , можно ожидать рост случайной составляющей ряда теми же темпами (т.е. $t^{0,5}$) (рис. 4).

Представленный метод имеет ряд недостатков: сложность точного определения начала линейного участка; ограничение по уровню измеряемого случайного шума (если ряд сильно зашумлен, «детерминированный» линейный участок не появляется).

Точку перехода от «шумового» участка к «детерминированному» невозможно определить точно, поэтому определение начала «детерминированного» линейного участка происходит с некоторой погрешностью. Помимо этого, важно учитывать, что увеличение углового коэффициента для небольших значений ε может быть вызвано не случайным шумом, а недостаточным количеством точек

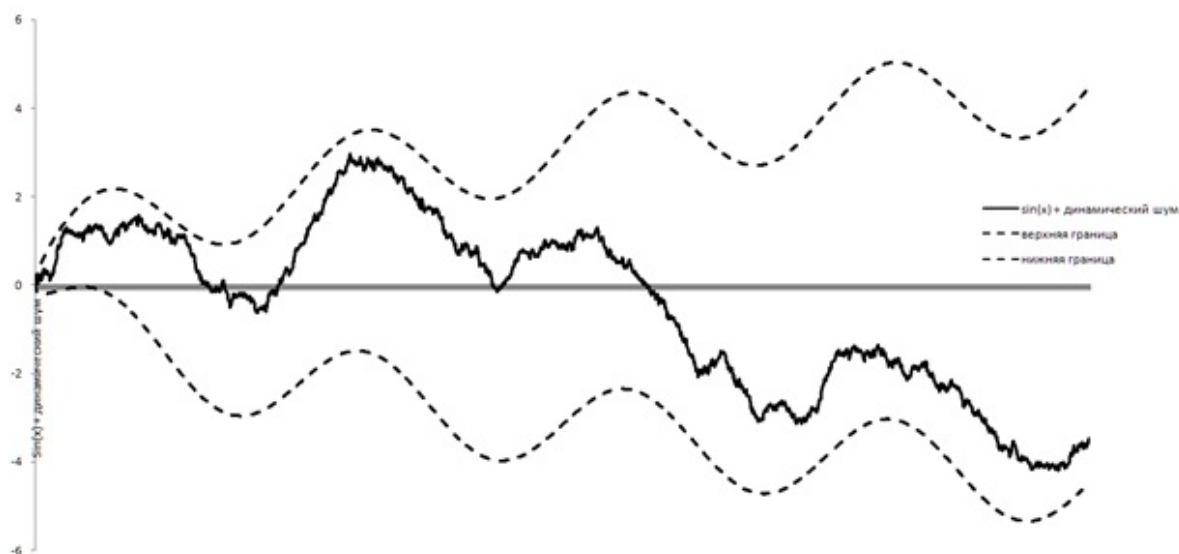


Рис. 4. Оценка возможных значений ряда с динамическим шумом $(\sin(2\pi t/500) \pm 0,10676t^{0,5})$

в реконструкции аттрактора. Считается, что для точного измерения корреляционной размерности D необходимо $10^{2+0,4D}$ точек. По опыту вычислений можно сделать вывод, что за не слишком большое время можно вычислять корреляционную размерность для рядов длиной до 20 000 точек, таким образом, возможно исследовать системы с фрактальной размерностью до 5,75. Так как график строится в логарифмическом масштабе, количество точек для небольших значений ε невелико, поэтому целесообразно изменить алгоритм так, чтобы шаг изменения ε был меньше для небольших значений ε и увеличивался при приближении к максимальному значению.

Методы, основанные на оценке корреляционной размерности системы, являются сложными в применении и требуют значительного времени для проведения вычислений (число операций возрастает пропорционально dN^2), но в настоящее время не обладают теоретическими аналогами при исследовании случайной компоненты временного ряда, состоящей из динамического шума. Методы нелинейной динамики могут применяться не только к реальным динамическим рядам хаотической динамики, но и к анализу регулярной динамики, содержащей случайную компоненту.

Литература

1. *Kantz H., Schreiber T. Nonlinear time series analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1997. 174 p.

2. *Sase T. et al. Estimating the level of dynamical noise in time series by using fractal dimensions // Physics Letters A.* 2016. Т. 380. № 11. С. 1151–1163. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.01.014
3. *Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena.* 1983. Т. 9. № 1–2. С. 189–208. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90298-1
4. *Yu D. et al. Efficient implementation of the Gaussian kernel algorithm in estimating invariants and noise level from noisy time series data // Physical Review E.* 2000. Т. 61. № 4. С. 3750. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.3750
5. *Urbanowicz K., Holyst J.A. Noise-level estimation of time series using coarse-grained entropy // Physical Review E.* 2003. Т. 67. № 4. С. 046218. DOI: 10.1103/PhysRevE.67.046218
6. *Яновский Л.П., Филатов Д.А. Анализ состояния финансовых рынков на основе методов нелинейной динамики // Финансы и кредит.* 2005. № 32 (200). С. 2–13.
7. *Калайдин Е.Н., Дюдун М.С. Оценка риска в рамках гипотезы фрактального рынка // Финансы и кредит.* 2013. № 22 (550). С. 31–34.
8. *Калайдин Е.Н., Дюдун М.С. Измерение стохастической составляющей в динамике активов российского рынка капитала // Экономика устойчивого развития.* 2012. № 11. С. 126–132.

References

1. *Kantz H., Schreiber T. Nonlinear time series analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, MA, 1997.
2. *Sase T. et al. Estimating the level of dynamical noise in time series by using fractal dimensions.*

-
- Physics Letters A*, 2016, vol. 380, no. 11, pp. 1151–1163. DOI: 10.1016/j.physleta.2016.01.014
3. Grassberger P., Procaccia I. Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1983, vol. 9, iss. 1–2, pp. 189–208. DOI: 10.1016/0167-2789(83)90298-1
 4. Yu D. et al. Efficient implementation of the Gaussian kernel algorithm in estimating invariants and noise level from noisy time series data. *Physical Review E*, 2000, vol. 61, iss. 4, pp. 3750. DOI: 10.1103/PhysRevE.61.3750
 5. Urbanowicz K., Hołyst J. A. Noise-level estimation of time series using coarse-grained entropy. *Physical Review E*, 2003, vol. 67, iss. 4, pp. 046218. DOI: 10.1103/PhysRevE.67.046218
 6. Yanovskij L.P., Filatov D.A. Analiz sostoyaniya finansovykh rynkov na osnove metodov nelineynoy dinamiki [Analysis of financial markets based on non-linear dynamic methods]. *Finansy i kredit* [Finance and credit], 2005, no. 32 (200). pp. 2–13. (In Russian)
 7. Kalaidin E.N., Diudin M.S. Otsenka riska v ramkakh gipotezy fraktal'nogo rynka [Risk assessment in the framework of the fractal market hypothesis]. *Finansy i kredit* [Finance and credit], 2013, no. 22 (550), pp. 31–34. (In Russian)
 8. Kalaidin E.N., Diudin M.S. Izmerenie stokhasticheskoy sostavlyayushchey v dinamike aktivov rossiyskogo rynka kapitala [Measurement of the stochastic component in the dynamics of the assets of the Russian capital market]. *Ekonomika ustojchivogo razvitiya* [Economics of Sustainable Development], 2012, no. 11, pp. 126–132. (In Russian)

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2018

© Дюдин М. С., Калайдин Е. Н., 2018

Статья поступила 29 ноября 2018 г.