ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2018. Т. 15. № 4. С. 12–16

Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-15-4-12-16

О ВЛИЯНИИ ПЕРЕМЕННОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ НА ГОРИЗОНТАЛЬНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ШТАМПА

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Елецкий Ю. Б., Лозовой В. В., Евдокимов В. С., Хрипков Д. А.

ON THE EFFECT OF VARIABLE COEFFICIENT OF FRICTION ON THE HORIZONTAL RESISTANCE OF THE STAMP

V. A. Babeshko[1,2], O. V. Evdokimova[1], O. M. Babeshko[2], Y. B. Eletskiy[1], V. V. Lozovoy[1], V. S. Evdokimov[1], D. A. Khripkov[2]

[1] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[2] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: babeshko49@mail.ru

Abstract. Article deal with the contact problems on the surface interaction of rigid stamps with a deformed layered provided that the variable friction coefficients arise in the contact zone as a function of the coordinate under the horizontal motion of stamps. The cause of the variable friction coefficients arising may be surface phenomena induced by a complex rheology of the deformed-medium surface, the chemical reactions proceeding, or a change in the properties of the contact surface of the stamps, for example, as a result of the presence of separate particles of the wear contact surface of the stamp and the base. The influence of the variable friction coefficient on the horizontal existence of the semi-infinite stamp is investigated.

Keywords: contact problems, integral equations, semi-infinite domain, block element, factorization, variable friction coefficients.

1. Исследование проблемы

Рассматривается случай полубесконечной области контакта. Такие области контакта свойственны полубесконечным граничным литосферным плитам, взаимодействующим с трением по границам Конрада с базальтовым основанием коры Земли. Сближение таких плит торцами может спровоцировать в этой зоне стартовое землетрясение. Подобная задача может возникать и в трибологии в случае протяженной зоны контакта деформируемого слоистого основания со штампом. Будем пользоваться подходом, изложенным в [1], используя принятые там обозначения.

Проблема сводится к решению системы уравнений Винера–Хопфа вида

$$\int_0^\infty \mathbf{k}(x-\xi)\boldsymbol{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mathbf{f}(x), \qquad (1.1)$$

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Елецкий Юрий Борисович, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН; e-mail: elezkiy@priazovneft.ru.

Лозовой Виктор Викторович, канд физ.-мат. наук, научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: niva_kgu@mail.ru.

Евдокимов Владимир Сергеевич, студент Кубанского государственного университета, лаборант Южного научного центра РАН; e-mail: evdok_vova@mail.ru.

Хрипков Дмитрий Александрович, научный сотрудник Кубанского государственного университета; e-mail: vestnik@kubsu.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания на 2018 г., проекты ЮНЦ РАН на 2018 г. (проект 00-18-04) № госрег. 01201354241, программ президиума РАН П-16 (проект 00-18-21) и П-52 (проект 00-18-29), и при поддержке грантов РФФИ (проекты 16-41-230214, 16-41-230218, 16-48-230216, 17-08-00323, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

$$0 \leqslant x < \infty, \quad \boldsymbol{\varphi} = \{\phi_1, \phi_2\},$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha) e^{-i\alpha x} \, \mathrm{d}\alpha,$$

$$\mathbf{K}(\alpha) = \begin{Vmatrix} K_{11}(\alpha) & K_{12}(\alpha) \\ K_{21}(\alpha) & K_{22}(\alpha) \end{Vmatrix},$$

$$\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$$

с символом, представляющим матрицу-функцию, элементами которой являются достаточно общие мероморфные функции, охватывающие важные практические задачи. Будем рассматривать ее при достаточно общих условиях на символ интегрального уравнений, не повторяющий известные случаи, при которых система уравнений Винера–Хопфа решается точно благодаря возможности факторизации матрицы-функции. Будем считать, что элементы K_{mp}, $m, p = 1, 2$ матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ являются в общем случае мероморфными функциями переменного α. Мероморфные функции $K_{mp}(\alpha)$ и определитель $\det \mathbf{K}(\alpha)$ имеют следующее представление

$$K_{mp}(\alpha) = C^{-1}(\alpha) C_{mp}(\alpha),$$

$$\det \mathbf{K}(\alpha) = C^{-2}(\alpha) \Delta(\alpha),$$

$$\Delta(\alpha) = \det \|C_{mp}(\alpha)\|.$$

Здесь функции $C_{mp}(\alpha)$, $C(\alpha)$, $\Delta(\alpha)$ являются целыми функциями первого порядка и конечного типа, то есть экспоненциального типа [2], в частности полиномами. Предполагается, что целые функции $C(\alpha)$, $\Delta(\alpha)$ обращаются в нуль на множествах комплексных значений ζ_n и z_n соответственно, имеющих точки сгущения на бесконечности в некоторых клиновидных областях верхней и нижней частей комплексной плоскости, как правило, в окрестностях мнимой оси. Встречающиеся в задачах механики сплошной среды и математической физика матрицы-функции [1, 2] обладают следующим асимптотическим поведением

$$K_{mp}(\alpha) = A_{mp} |\alpha|^{-1} (1 + o(\alpha)),$$

$$m = p, \quad K_{mp}(\alpha) = A_{mp} \alpha^{-1} (1 + o(\alpha)),$$

$$m \neq p, \quad |\alpha| \gg 1,$$

целые функции $C_{mp}(\alpha)$, $C(\alpha)$ имеют первый порядок и тип σ. Определитель $\Delta(\alpha)$ является результатом комбинации произведений указанных целых функций $C_{mp}(\alpha)$ экспоненциального типа. Поэтому определитель $\Delta(\alpha)$ матрицы-функции также целая функция того же порядка, имеет тип 2σ. Предполагается, что $\Delta(\alpha)$ имеет счетное множество нулей z_n, уходящих на бесконечность, плотность распределения которых $\Delta(\alpha)$ в два раза большая, чем нулей ξ_n знаменателя $C(\alpha)$. Исследованиями подобных интегральных уравнений посвящено большое число работ. Особо значимыми являются [3–9].

Для применения предлагаемых в настоящей работе формул факторизации необходимо знание в объеме, диктуемом целями задачи, нулей ξ_n и z_n целых функций, описанных выше.

Распределение полюсов и нулей дается соотношениями

$$\begin{gathered} \xi_s^{\pm} = r^{\pm} s + O(1), \ s \to \infty, \\ z_{sk}^{\pm} = r_k^{\pm} s + O(1), \ s \to \infty, \ k = 1, 2. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Таким образом, существует 2 множества нулей определителя, причем каждое имеет ту же плотность распределения в окрестности бесконечности, что и полюсы знаменателя. В связи с этим можно ввести следующие обозначения, детализировав отмеченные плотности

$$\xi_s^{\pm} = r^{\pm}(s + \varepsilon) + o(1), \quad s = 1, 2, \ldots;$$

$$|r^{\pm}| = |r_k^{\pm}| = r,$$

$$z_{sk}^{\pm} = r_k^{\pm}(s + \varepsilon_k) + o(1),$$

$$k = 1,2, \quad |\varepsilon| < 1, \quad |\varepsilon_k| < 1.$$

С учетом асимптотического поведения полюсов и нулей введем в рассмотрение абсолютно сходящиеся канонические произведения следующего вида

$$\Phi_{\mp}(\alpha, \xi_s^{\pm}) = T_{0\mp} e^{\mp i\alpha} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{\xi_s^{\pm}}\right) e^{\frac{\alpha}{\xi_s^{\pm}}}, \tag{1.3}$$

$$\Phi_{p\mp}(\alpha, z_{sp}^{\pm}) = T_{p\mp} e^{\mp i\alpha} \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\alpha}{z_{sp}^{\pm}}\right) e^{\frac{\alpha}{z_{sp}^{\pm}}},$$

$$p = 1, 2.$$

С учетом свойств элементов матрицы-функции $\mathbf{K}(\alpha)$ определитель $\Delta(\alpha)$ и знаменатель $C(\alpha)$ можно представитьв следующем виде:

$$\Delta(\alpha) = \prod_{p=1}^{2} \Phi_{p-}(\alpha, z_{sp}^{+}) \Phi_{p+}(\alpha, z_{sp}^{-}),$$

$$C(\alpha)=\Phi_-\left(\alpha,\xi_s^+\right)\Phi_+\left(\alpha,\xi_s^-\right).$$

Примем компоненты вектора правой части $\mathbf{f}(x)$ системы интегральных уравнений (1.1) в форме $B_r e^{i\eta x}$, $B_r=\text{const}$, $r=1,2$, $\operatorname{Im}\eta\geq 0$. Такие значения компонент позволяют получать произвольные правые части системы интегральных уравнений, применяя преобразования Фурье, в форме

$$f_r(x)=\frac{1}{2\pi B_r}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_r(\eta)e^{-i\eta x}d\eta,\quad r=1,2.$$

Здесь $F_r(\eta)$ — преобразования Фурье функций $f_r(x)$.

Системы интегральных уравнений вида (1.1) возникают во многих смешанных задачах механики сплошной среды и математической физики. Примерами могут служить контактные задачи о взаимодействии штампов с деформируемым основанием в предположении наличия в области контакта в качестве неизвестных, как минимум, двух компонент напряжений.

Такой является рассмотренная в [2] контактная задача со сцеплением жесткого штампа с упругим слоем. Матрица-функция в векторном случае имеет приведенный там вид

$$\mathbf{K}(\alpha)=\begin{Vmatrix}\alpha^2M(\alpha) & i\alpha P(\alpha)\\ -i\alpha P(\alpha) & R(\alpha)\end{Vmatrix}.$$

Считаем также, что $\operatorname{Ind}\det\mathbf{K}(\alpha)=0$, $\Delta(\alpha)\neq$ $\neq 0$, $-\infty<\alpha<\infty$.

2. Результаты исследования

Имеет место следующая теорема [1, 2]:

Теорема. Единственное в $L_p(0,\infty)$, $p\geqslant 1$ решение системы интегральных уравнений (1.1) дается соотношением

$$\phi_{1\eta}(x)=A_1e^{i\eta x}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_1}x_1(\alpha)e^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha+ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_2}x_2(\alpha)e^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha,\quad (2.1)$$

$$\phi_{2\eta}(x)=A_2e^{i\eta x}+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_1}y_1(\alpha)e^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha+ + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_2}y_2(\alpha)e^{-i\alpha x}\,\mathrm{d}\alpha,$$

$$y_1(\alpha)=C_1(\alpha)x_1(\alpha),\quad y_2(\alpha)=C_1(\alpha)x_2(\alpha),$$

$$x_1(\alpha)=\Bigg[A_1- -A_2\left(1+\sum_{n2=1}^{\infty}\frac{D_+(-\eta)T(-z_{n2})M_{2+}(-z_{n1})}{D'_+(-z_{n2})(z_{n2}-\eta)}\right)\Bigg]\times \times\frac{1}{M_{1+}(\alpha)(\alpha+z_{n2})},$$

$$x_2(\alpha)=\Bigg[A_1+ +A_2\left(1+\sum_{n1=1}^{\infty}\frac{D_+(-\eta)T(-z_{l1})M_{1+}(-z_{n2})}{D'_+(-z_{n1})(z_{n1}-\eta)}\right)\Bigg]\times \times\frac{1}{M_{2+}(\alpha)(\alpha+z_{n1})}.$$

В этих формулах каждый контур S_1 и S_2 замыкается на бесконечности, причем S_1 содержит внутри замкнутой области все нули $-z_{n1}$ только функции $M_{1+}(\alpha)$, а S_2 — все нули $-z_{n2}$ только функции $M_{2+}(\alpha)$.

Здесь приняты обозначения

$$A_1=\frac{B_1K_{22}(-\eta)-B_2K_{12}(-\eta)}{\Delta_1(-\eta)},$$

$$A_2=\frac{B_2K_{11}(-\eta)-B_1K_{21}(-\eta)}{\Delta_1(-\eta)},$$

$$\Delta_1(\alpha)=K_{11}(\alpha)K_{22}(\alpha)-K_{12}(\alpha)K_{21}(\alpha),$$

$$K_{mn}(\alpha)\neq 0,\quad \Delta_1(\alpha)\neq 0,$$

$$-\infty<\alpha<\infty,\quad m,n=1,2,$$

$$\operatorname{Ind}\Delta_1(\alpha)=0,$$

$$\Delta_1(\alpha)=M_1(\alpha)M_2(\alpha),\quad M_k(\pm z_{lk})=0,$$

$$\operatorname{Im}z_{lk}>0,\quad k=1{,}2,\quad l=1,2,\ldots,$$

$$D(\alpha)=\Delta_1(\alpha)C(\alpha),\quad M_k(\alpha)=\frac{\Phi_k(\alpha)}{C(\alpha)},$$

$$C(\pm\xi_n)=0,\quad \operatorname{Im}\xi_n>0,\quad n=1{,}2,\ldots,$$

$$M_1(\alpha)=N_2(\alpha)-N_1(\alpha),$$

$$M_2(\alpha)=N_2(\alpha)+N_1(\alpha),$$

$$N(\alpha)=-\frac{N_1(\alpha)}{N_2(\alpha)},$$

$$T(\alpha) = \frac{N(\alpha) - C_1(\alpha)}{C_1(\alpha)},$$

$$C_1(\alpha) = -\frac{K_{21}(\alpha)}{K_{22}(\alpha)}.$$

Результат факторизации функций $M_k(\alpha)$, $k = 1, 2$, $D(\alpha)$ в виде произведения имеет вид

$$M_k(\alpha) = M_{k+}(\alpha) M_{k-}(\alpha),$$

$$D(\alpha) = D_+(\alpha) D_-(\alpha).$$

Для дважды непрерывно дифференцируемых правых частей $f_r(x)$ решения представимы в виде

$$\phi_r(x) = \frac{1}{2\pi B_r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{r\eta}(x) F_r(\eta) e^{-i\eta x}\, \mathrm{d}\eta, \quad (2.2)$$

$$r = 1, 2.$$

3. Полученные результаты

Рассмотрим интегральное уравнений в предположении, что взаимодействие штампов с деформируемым основанием происходит с зависящим от горизонтальной координаты коэффициентом трения $\mu(x)$.

Полагая, что $q_1(x)$ и $q_2(x)$ являются нормальными и касательными составляющими вектора контактных напряжений, получаем соотношения для касательных напряжений в форме

$$q_2(x) = \mu(x) q_1(x). \quad (3.1)$$

Случай закона трения в форме [3]

$$q_2(x) = \tau_0 - \mu(x) q_1(x), \quad \tau_0 = \mathrm{const}$$

легко сводится к рассматриваемому.

Система интегральных уравнений (1.1) принимает вид

$$\int\limits_0^{\infty} \big[k_{11}(x-\xi) q_1(\xi) + {}$$

$$+ k_{12}(x-\xi)\mu(\xi) q_1(\xi)\big]\, \mathrm{d}\xi = f_1(x),$$

$$0 \leqslant x < \infty, \quad \mathbf{q} = \{q_1, q_2\},$$

$$\int\limits_0^{\infty} \big[k_{21}(x-\xi) q_1(\xi) + {}$$

$$+ k_{22}(x-\xi)\mu(\xi) q_1(\xi)\big]\, \mathrm{d}\xi = f_2(x),$$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha) e^{-i\alpha x}\, \mathrm{d}\alpha, \quad \mathbf{f} = \{f_1, f_2\}.$$

Используя решение системы интегральных уравнений (2.1), с учетом (2.2), (3.1) получим представление переменного коэффициента трения в форме

$$\mu(x) = \frac{1}{2\pi B_2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{2\eta}(x) F_2(\eta)\, e^{-i\eta x}\, \mathrm{d}\eta \times$$

$$\times \left[\frac{1}{2\pi B_1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi_{1\eta}(x) F_1(\eta)\, e^{-i\eta x}\, \mathrm{d}\eta\right]^{-1}.$$

Зная переменный коэффициент трения, горизонтальное сопротивление движению штампа определим соотношением

$$T = \int\limits_0^{\infty} \mu(x) q_1(x)\, \mathrm{d}x.$$

Заключение

Таким образом, исходя только из данных о характере основания штампа и его смещениях в вертикальном и горизонтальном направлениях, можно определить переменный коэффициент трения. В том случае, если в зоне контакта происходят химические реакции или изменяется реология, граница слоя приобретает рельефность, это должно отражаться как в свойствах матрицы-функции $K(\alpha)$, так и в правых частях системы интегральных уравнений. Во всех случаях необходим дополнительный анализ новых систем интегральных уравнений. Один из подходов состоит в аппроксимации элементов матрицы-функции мероморфными функциями в связи с их свойством полноты в широком спектре функциональных пространств. В результате охватывается и этот круг задач с переменным коэффициентом трения.

Литература

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Блочные элементы в контактных задачах с переменным коэффициентом трения // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 537–541.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Об одной факторизационной задаче Гильберта–Винера и методе блочного элемента // ДАН. 2014. Т. 459. № 5. С. 557–561.

3. *Горячева И.Г., Добычин М.Н.* Контактные задачи трибологии. М.: Машиностроение. 1988. 256 с.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1962. 600 с.
5. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. М.: Наука, 1970. 380 с.
6. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
7. *Нобл Б.* Метод Винера–Хопфа. М.: ИЛ, 1962. 280 с.
8. *Литвинчук Г.С., Спитковский И.М.* Факторизация матриц-функций. Депонировано ВИНИТИ, № 2410-84, Часть I. 1984 г. 250 с.; часть II. 1984 г. 212 с.
9. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой, с ядрами, зависящие от разности аргументов // Успехи математических наук. 1958. Т. 13. Вып. 2. С. 3–72.

References

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. Blochnye elementy v kontaktnykh zadachakh s peremennym koeffitsientom treniya [Block elements in contact problems with variable coefficient of friction]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of Russian Academy of Sciences], 2018, vol. 480, no. 5, pp. 537–541. (In Russian)
2. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. Ob odnoy faktorizatsionnoy zadache Gil'berta–Vinera i metode blochnogo elementa [On one Hilbert–Wiener factorization problem and the block element method]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of Russian Academy of Sciences], 2014, vol. 459, no. 5, pp. 557–561. (In Russian)
3. Goryacheva, I.G., Dobychin, M.N. *Kontaktnye zadachi tribologii* [Contact problems of tribology]. Mashinostroenie, Moscow, 1988. (In Russian)
4. Muskhelishvili, N.I. *Singulyarnye integral'nye uravneniya* [Singular integral equation]. Nauka, Moscow, 1962. (In Russian)
5. Vekua, N.P. *Sistemy singulyarnykh integral'nykh uravneniy* [Systems of singular integral equations]. Nauka, Moscow, 1970. (In Russian)
6. Gakhov, F.D. *Kraevye zadachi* [Boundary value problems]. Nauka, Moscow, 1977. (In Russian)
7. Nobl, B. *Metod Vinera–Khopfa* [Wiener-Hopf method]. Inostrannaya literatura, Moscow, 1962. (In Russian)
8. Litvinchuk, G.S., Spitkovskiy, I.M. *Faktorizatsiya matrits-funktsiy* [Factorization of matrix functions]. Deposited to VINITI no. 2410-84, part I, 1984; part II, 1984. (In Russian)
9. Gokhberg, I.Ts., Kreyn, M.G. Sistemy integral'nykh uravneniy na polupryamoy, s yadrami, zavisyashchie ot raznosti argumentov [Systems of integral equations on a semi-direct, with kernels depending on the difference of arguments]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in Mathematical Sciences], 1958, vol. 13, iss. 2, pp. 3–72. (In Russian)

Статья поступила 15 ноября 2018 г.