Механика

УДК 533.69

DOI: 10.31429/vestnik-15-4-24-32

ГАРМОНИЧЕСКОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОГО ОГРАНИЧЕННОГО КРЫЛА ДОЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ СЖИМАЕМОГО ГАЗА

Гайденко С. В.

HARMONIC STREAMLINE OF A THIN BOUNDED WING BY SUBSONIC FLOW OF COMPRESSIBLE GAS

S. V. Gaidenko

Kuban State University, Krasnodar, Russia
e-mail: svgaidenko@mail.ru

Abstract. A mathematical model of the perturbed velocity field caused by the flow of a compressible gas incident at a constant subsonic velocity on a thin weakly bent rigid bounded wing of arbitrary geometry in the plan is considered. The dependence of all functions on time is assumed to be periodic. The solution of the boundary value problem for the differential equation of elliptic type in three-dimensional space is represented by the double layer potential. The potential density corresponds to the pressure jump on the wing and can be found from the boundary condition for a given normal component of the disturbance velocity field on the wing. Satisfying this condition leads to an integral equation of the second kind in the wing domain. The main purpose of this work is to establish the limit expressions for the normal derivative of the dipole potential. Separately, the integrals that make up this derivative have no limits, but the limit to their sum exists. The integral form for the limit expression that relates the pressure jump at the wing point to the integral mean values of this jump over the expanding circles of the perturbed velocity field propagation is found. This work describes a mathematical model of the wing motion over a solid surface. Its solution is presented in an integral form. Taking into account the solid screen in the differential problem leads to additional terms in the integral equation, but these integrals are not relevant. The integral equation of the second kind obtained in this work allows the application of iterative searching method of approximate solution.

Keywords: thin wing, subsonic flow, compressible gas, pressure jump, perturbed velocity potential, dipole potential.

Введение

В работе автора [1] рассмотрена математическая модель, описывающая поле возмущенных скоростей, вызванное потоком сжимаемого газа, набегающего с постоянной дозвуковой скоростью на тонкое слабоизогнутое жесткое ограниченное крыло произвольной формы в плане. В этой работе зависимость всех функций от времени произвольная, что для корректной постановки дифференциальной задачи требует задания начальных условий для потенциала указанного поля скоростей. В [1] коротко описаны результаты работ [2, 3], где рассматривалась подобная задача. Авторы этих работ начальные условия не упоминают, поскольку не ставят своей целью полное решение математической модели. Им удается на основе физических соображений получить интегральное представление решения волнового уравнения в форме поверхностного потенциала простого слоя, плотностью которого является нормальная производная этого же решения в плоскости движения крыла. Однако значения ортогональной к этой плоскости составляющей поля возмущенных скоростей по постановке задачи известны только в точках проекции крыла, а область интегрирования лежит в этой проекции только для точек вблизи крыла и при значениях времени, близких к нулю. Если же область интегрирования выходит за проекцию крыла, то задача определения значений нормальной производной искомого потенциала «сводится к интегральным и интегро-дифференциальным уравнениям с ядрами, вид которых зависит от вида функции, задающей характер добавочных неустановившихся движений крыла» [2].

В работе [1] дифференциальная задача для потенциала возмущенных скоростей поставлена при нулевых начальных условиях,

Гайденко Станислав Викторович, кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой вычислительной математики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: svgaidenko@mail.ru.

что физически соответствует лишь частному случаю мгновенного вхождения крыла в порыв сжимаемого газа, движущегося с постоянной скоростью. Неоднородные начальные условия реально невозможно задать во всех точках пространства. Более общая модель с нулевыми начальными условиями должна учитывать нарастающую скорость набегающего потока.

В настоящей работе рассматривается математическая модель с постоянной скоростью потока, когда все функции зависят от времени по периодическому закону с известной частотой, что не требует задания начальных условий. Как и в работе [1], здесь комплексная амплитуда потенциала возмущенных скоростей представлена потенциалом двойного слоя, плотность которого — финитная функция с носителем на проекции крыла, физически соответствующая скачку давления. Эта функция представляет конечный интерес, поскольку через нее по известным формулам могут быть вычислены основные характеристики процесса обтекания. Для отыскания указанной функции используется заданная в точках крыла нормальная производная потенциала. Обычно удовлетворение этому граничному условию приводит к интегральным уравнениям первого рода с сингулярными ядрами, что требует дальнейшей регуляризации задачи [3, 4]. В данной работе обоснованный предельный переход в упомянутом граничном условии приводит к интегральному уравнению второго рода, которое является корректной задачей. Кроме того, для отыскания приближенного решения уравнения второго рода может быть применен итерационный метод.

Поскольку техника исследования гармонических колебаний близка к описанной в работе [1], где довольно подробно получено интегральное представление потенциала возмущенных скоростей, то в данной работе более детально описан вывод интегрального уравнения для плотности потенциала двойного слоя.

1. Постановка задачи

Тонкое слабоизогнутое жесткое крыло конечного размаха движется параллельно твердой поверхности с постоянной скоростью V в потоке сжимаемой идеальной жидкости и совершает малые колебания около некоторого среднего положения. Возмущенное течение жидкости безвихревое.

Начало прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ находится на крыле, ось Ox_1 направлена вдоль вектора скорости поступательного движения крыла, ось Ox_2 расположена в плоскости движения крыла, вертикальная ось Ox_3 направлена противоположно твердой поверхности, расположенной параллельно плоскости движения крыла на расстоянии h. Ограниченная область D — проекция крыла на плоскость Ox_1x_2, W — проекция на эту плоскость вихревой пелены за крылом. Закон деформации крыла как твердого тела задан уравнением $x_3 = f(t, x_1, x_2)$. В настоящей работе рассматривается математическая модель гармонических колебаний, то есть во всех функциях зависимость от времени представляется в виде $f(t,x) = \mathrm{Re}\left(e^{-i\omega t} f(x)\right)$, где $\omega > 0$ — заданная круговая частота колебаний.

В рамках линейной по возмущениям теории математическая модель представляет собой следующую дифференциальную задачу для комплексной амплитуды $\phi(x)$ потенциала возмущенных скоростей.

В подвижной системе координат волновое уравнение

$$\left(1-M^2\right)\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}+ + i\omega\frac{2M}{C}\frac{\partial\phi}{\partial x_1}+\frac{\omega^2}{C^2}\phi=0 \quad (1.1)$$

задано в полупространстве $x_3 > -h$ всюду, за исключением ограниченной области D и полосы W, расположенных в плоскости $x_3 = 0$. Здесь C — скорость звука, $M = V/C$ — число Маха, $M < 1$.

Условие непротекания, заданное на крыле, в линеаризованной форме имеет вид

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_3}(x_1,x_2,0) = -i\omega f(x_1,x_2) + + V\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2), \quad (1.2)$$

$$(x_1,x_2)\in D.$$

На вихревой пелене, включая заднюю кромку крыла, выполняется условие непрерывности давления

$$\left(V\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-i\omega\phi\right)(x_1,x_2,+0) = = \left(V\frac{\partial\phi}{\partial x_1}-i\omega\phi\right)(x_1,x_2,-0), \quad (1.3)$$

$$(x_1,x_2)\in W.$$

Нормальная составляющая возмущенной скорости при переходе через вихревую пелену предполагается непрерывной, но сам потенциал на крыле и вихревой пелене терпит разрыв.

На твердой границе также задано условие непротекания

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3}(x_1, x_2, -h) = 0, \quad (x_1, x_2) \in R_2. \quad (1.4)$$

В постановке задачи (1.1)–(1.4) предполагаем решение $\phi(x)$ интегрируемым во всем пространстве R_3 вместе с первыми производными. Кроме того, нас будут интересовать решения, физически соответствующие расходящимся волнам. После приведения уравнения (1.4) к каноническому виду последнее требование будет обеспечено условиями излучения Зоммерфельда.

Основная цель в рассматриваемой задаче — отыскание комплекснозначной функции

$$\gamma(x_1, x_2) = \left(V\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - i\omega\phi\right)(x_1, x_2, +0) - \\ - \left(V\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - i\omega\phi\right)(x_1, x_2, -0),$$

посредством которой могут быть выражены все аэродинамические характеристики крыла. По постановке задачи эта функция может быть отлична от нуля только в точках ограниченного множества D.

В данной работе решение задачи (1.1)–(1.4) представлено через функцию $\gamma(x_1, x_2)$, а для определения этой функции получено интегральное уравнение второго рода. При выводе интегрального уравнения мы вынуждены накладывать требования гладкости на $\gamma(x_1, x_2)$. Саму эту функцию предполагаем интегрируемой в области D.

2. Краевая задача для уравнения Гельмгольца

Уравнение (1.1) приводится к уравнению Гельмгольца линейной заменой независимых переменных

$$x_1' = x_1,$$

$$x_2' = \sqrt{1 - M^2}x_2, \quad x_3' = \sqrt{1 - M^2}x_3$$

и представлением комплекснозначной функции $\phi(x)$ в виде $\tilde{\phi}(x')e^{-i\nu x_1}$:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x_3'^2} + K^2\tilde{\phi} = 0.$$

Здесь

$$\nu = \frac{M\omega}{C(1 - M^2)} = \frac{kM^2}{1 - M^2},$$

$k = \omega/V$ — число Струхаля, $K = \frac{kM}{1-M^2}$.

Условие непрерывности давления позади крыла в новых переменных имеет вид

$$\left[\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_1} - i\mu\tilde{\phi}\right] = 0 \text{ при } (x_1, x_2') \in W'.$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок функции при $x_3 = 0$, то есть разность предельных значений при $x_3 \to +0$ и $x_3 \to -0$, а постоянная

$$\mu = \frac{\omega}{V} + \nu = \frac{k}{1 - M^2} > K.$$

В новых координатах искомой будет функция

$$\tilde{\gamma}(x_1, x_2') = \left[\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x_1} - i\mu\tilde{\phi}\right] = \frac{\gamma(x_1, x_2)}{V}e^{i\nu x_1}, \\ (x_1, x_2') \in D'.$$

Условия непротекания на крыле и на твердой границе в новых переменных сохраняют вид, аналогичный (1.2) и (1.4). Отсутствие волн, приходящих из бесконечности, обеспечивают условия излучения Зоммерфельда [5].

Свяжем с потенциалом возмущенных скоростей $\phi(t, x) = \mathrm{Re}\left(\phi(x)e^{-i\omega t}\right)$ функцию

$$\theta(t, x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + V\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(t, x).$$

В случае периодического обтекания крыла потенциал ускорения представим в виде $\theta(t, x) = \mathrm{Re}\left(\theta(x)e^{-i\omega t}\right)$, где $\theta(x)$ — его комплексная амплитуда

$$\theta(x) = -i\omega\phi(x) + V\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(x).$$

С учетом стремления $\phi(x)$ к нулю на бесконечности легко найти обратный оператор

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{1}{V}\int_{-\infty}^{x_1} e^{-ik(\xi_1 - x_1)}\theta(\xi_1, x_2, x_3)\,\mathrm{d}\xi_1.$$

Поскольку функция $\phi(x)$ удовлетворяет однородному уравнению (1.1), ее производные также ему удовлетворяют. Значит, $\theta(x)$ является решением этого уравнения. Верно и обратное утверждение для функции $\phi(x)$, определяемой последним равенством.

Проведем для функции $\theta(x)$ те же преобразования, что и для $\phi(x)$. В новой системе координат введем функцию

$$\tilde{\theta}(x') = \frac{1}{V}\theta(x)\, e^{i\nu x_1} = \left(\frac{\partial\tilde{\phi}}{\partial x_1} - i\mu\tilde{\phi}\right).$$

Функция $\tilde{\theta}(x')$ также удовлетворяет уравнению Гельмгольца в полупространстве $x_3' > -H$ всюду, кроме множества $D' \cup W'$, на D' она терпит разрыв

$$\tilde{\theta}(x_1, x_2', +0) - \tilde{\theta}(x_1, x_2', -0) = \tilde{\gamma}(x_1, x_2'),$$

а в остальных точках плоскости $x_3' = 0$ эта функция непрерывна. Условие непротекания для $\tilde{\theta}(x')$ остается в силе.

Полагая заданной финитную функцию $\tilde{\gamma}(x_1, x_2')$, можем представить функцию $\tilde{\theta}(x')$ с помощью потенциала двойного слоя, плотностью которого является скачок решения уравнения Гельмгольца. В пространстве R_3 у этого уравнения существуют два фундаментальных решения. Уходящим волнам соответствует $-\frac{e^{iK|x'|}}{4\pi|x'|}$.

Рассмотрим при $x_3' \neq 0$ потенциал двойного слоя

$$\tilde{w}(x') = \iint\limits_{R_2} \tilde{\gamma}(y_1', y_2')\; P(x', y_1', y_2')\, \mathrm{d}y_1'\, \mathrm{d}y_2',$$

где

$$P(x', y_1', y_2') = \frac{\partial}{\partial y_3'}\left(\frac{e^{iK|x'-y'|}}{4\pi\,|x'-y'|}\right)_{|y_3'=0}$$

Потенциал двойного слоя вне носителя его плотности удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, а в точках непрерывности плотности имеет предельные значения при $x_3' \to \pm 0$, равные соответственно $\pm\frac{1}{2}\tilde{\gamma}(x_1, x_2')$, то есть скачок его при переходе через плоскость $x_3' = 0$ равен плотности.

С учетом граничного условия $\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial x_3'}(x_1, x_2', -H) = 0$ функцию $\tilde{\theta}(x')$ можно получить с помощью потенциала двойного слоя

$$\tilde{\theta}(x') = \tilde{w}(x_1, x_2', x_3') - \tilde{w}(x_1, x_2', x_3' + 2H).$$

Возвращаясь к прежним координатам и функциям, получим

$$\theta(x_1, x_2, x_3) = \\ = w(x_1, x_2, x_3) - w(x_1, x_2, x_3 + 2h),$$

где

$$w(x_1, x_2, x_3) = \\ = \iint\limits_{D} \gamma(y_1, y_2)\; P(x, y_1, y_2)\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2,$$

$$P(x, y_1, y_2) = \\ = x_3 \frac{1 - M^2}{4\pi} e^{iK(r + M(y_1 - x_1))}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{iK}{r^2}\right),$$

$$r = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (1 - M^2)\left((x_2 - y_2)^2 + x_3^2\right)}.$$

Переход от потенциала ускорений к потенциалу скоростей дает представление комплексной амплитуды потенциала возмущенных скоростей через скачок давления на крыле

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \phi_h(x),$$

где

$$\phi_0(x) = \frac{1}{V}\int\limits_{-\infty}^{x_1} e^{ik(x_1 - \xi_1)} w(\xi_1, x_2, x_3)\, \mathrm{d}\xi_1,$$

$$\phi_h(x) = \phi_0(x_1, x_2, x_3 + 2h).$$

3. Интегральные представления амплитуды потенциала возмущенных скоростей

Рассмотрим функцию $\phi_0(x)$, соответствующую потенциалу возмущенных скоростей безграничного потока

$$\phi_0(x) = \\ = \frac{x_3(1 - M^2)}{4\pi V}\int\limits_{-\infty}^{x_1} e^{ik(x_1 - \xi_1)} \iint\limits_{R_2} \gamma(y_1, y_2)\, \times \\ \times e^{iK(r + M(y_1 - \xi_1))}\left(\frac{1}{r^3} - \frac{iK}{r}\right) \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2\, \mathrm{d}\xi_1.$$

Здесь

$$r = \sqrt{(\xi_1 - y_1)^2 + (1 - M^2)\left((x_2 - y_2)^2 + x_3^2\right)}.$$

С учетом нечетности функции $\phi_0(x)$ по x_3 далее для определенности будем рассматривать $x_3 > 0$.

В равенстве, определяющем $\phi_0(x)$, поменяем порядок интегрирования, а затем вместо переменной ξ_1 введем новую переменную [1]

$$t = \frac{x_1 - \xi_1}{V} + n\left(r + M\left(y_1 - \xi_1\right)\right),$$

где $n = \dfrac{1}{C \cdot (1 - M^2)} = \dfrac{K}{\omega}$.

Функция $t(\xi_1)$ монотонна, обратная функция имеет вид

$$\xi_1(t) = x_1 - tV + MR(t, x, y),$$

где

$$R(t, x_1, x_2, x_3, y_1, y_2) = \\ = \sqrt{\left(tV - (x_1 - y_1)\right)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2}.$$

Функция r в новых переменных может быть представлена

$$r(t, x, y) = R(t, x, y) - M\left(tV - (x_1 - y_1)\right) \geqslant 0.$$

Крайнему значению $\xi_1 = x_1$ соответствует значение

$$t_0 = n\left(r(t_0, x, y) + M(y_1 - x_1)\right),$$

где

$$r(t_0, x, y) = \\ = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (1 - M^2)\left((x_2 - y_2)^2 + x_3^2\right)}.$$

Поскольку $\xi_1(t_0) = x_1$, то $R(t_0, x, y) = Ct_0$.

В результате преобразований получаем представление

$$\phi_0(x) = \frac{x_3\left(1 - M^2\right)}{4\pi} \iint\limits_{R_2} \gamma(y_1, y_2) \times \\ \times \int\limits_{t_0(x,y)}^{\infty} e^{i\omega t}\left(\frac{1}{R\, r^2} - \frac{i\omega n}{Rr}\right) \mathrm{d}t\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2.$$

Интегрированием по частям во внутреннем интеграле для второго слагаемого последнее равенство преобразуется в следующее:

$$\phi_0(x) = \\ = \frac{x_3}{4\pi C} \iint\limits_{R_2} \frac{\gamma(y_1, y_2)\, e^{i\omega t_0(x,y)}}{R(t_0, x, y)\, r(t_0, x, y)} \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2 + \\ + \frac{x_3}{4\pi} \iint\limits_{R_2} \gamma(y_1, y_2) \int\limits_{t_0(x,y)}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{R^3(t, x, y)} \mathrm{d}t\, \mathrm{d}y_1\, \mathrm{d}y_2. \tag{3.1}$$

Введем обозначение для среднего значения функции $\gamma(y_1, y_2)$ по окружности радиуса ρ с центром $\left(y_1^0, y_2^0\right)$

$$S_\rho[\gamma]\left(y_1^0, y_2^0\right) = \\ = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \gamma\left(y_1^0 + \rho\cos\alpha, y_2^0 + \rho\sin\alpha\right) \mathrm{d}\alpha.$$

Неравенство $t_0(x, y) \leqslant t$ при фиксированных значениях t и x задает на плоскости переменных (y_1, y_2) круг $K(t, x)$ с центром $(x_1 - tV, x_2)$ радиуса $\sqrt{(tC)^2 - x_3^2}$, $t > \dfrac{x_3}{C}$.

Область интегрирования в трехкратном интеграле представляет собой косой гиперболоид, каждое сечение которого плоскостью при фиксированном значении t есть круг $K(t, x)$, нижней точке гиперболоида соответствует значение $t = x_3/C$. Круг $K(t, x)$ есть объединение кругов $K(\tau, x)$, $x_3/C \leqslant \tau \leqslant t$.После перехода к полярным координатам в этих кругах [1] получаем представление комплексной амплитуды потенциала возмущенных скоростей безграничного потока через усреднения по окружностям скачка давления

$$\phi_0(x) = \frac{x_3}{2C} \int\limits_{x_3/C}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t} S_{\sqrt{(Ct)^2 - x_3^2}}[\gamma]\, \mathrm{d}t + \\ + \frac{x_3}{2} \int\limits_{x_3/C}^{\infty} e^{i\omega t} \int\limits_0^{\sqrt{(Ct)^2 - x_3^2}} \frac{\rho}{\left(\rho^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} S_\rho[\gamma]\, \mathrm{d}\rho\, \mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Здесь и в последующих интегралах аргументы усреднений — $(x_1 - tV, x_2)$.

4. Интегральное уравнение для определения скачка давления

Формулы (3.1) и (3.2) получены для $x_3 > 0$. В полупространство $x_3 < 0$ функция $\phi_0(x)$ продолжается нечетным образом. Для определения функции γ в точках области D надо использовать условие (1.2), которое задано для производной по x_3 потенциала скоростей при $x_3 = 0$. Это условие не предполагает дифференцируемость потенциала скоростей по x_3 на крыле. Оно понимается как предел при $x_3 \to \pm 0$ соответствующих производных. В силу нечетности по x_3 функции $\phi_0(x)$ эти пределы будут совпадать, поэтому, как и прежде, считаем $x_3 > 0$.

Для существования и явного представления этих пределов требуется некоторая гладкость искомой функции $\gamma(y_1, y_2)$. Помимо интегрируемости этой финитной функции предполагаем существование во всех внутренних точках области D локально ограниченных вторых производных. Последнее условие достаточно для выполнения следующего свойства усреднений: если $\gamma(y_1, y_2)$ имеет в некоторой окрестности точки (x_1, x_2) ограниченные вторые производные, то для всех точек (y_1, y_2) этой окрестности при достаточно малых $\rho > 0$ выполняется оценка

$$|S_\rho[\gamma](y_1, y_2) - \gamma(y_1, y_2)| \leqslant c\rho^2,$$

где где положительная константа c не зависит от ρ и определяется экстремальными значениями вторых производных функции γ. Справедливость этого утверждения доказывается разложением по формуле Тейлора функции γ в окрестности точки (y_1, y_2).

Вычислим производную по x_3 функции $\phi_0(x)$. Интеграл в первом слагаемом формул (3.1) и (3.2) обозначим $I_1(x)$, а во втором — $I_2(x)$. Представление (3.2) неудобно для дифференцирования $I_1(x)$, так как здесь присутствует зависимость от x_3 в радиусе усреднения, а функция $S_\rho[\gamma]$ может не быть дифференцируемой по ρ.

Итак, производную интеграла $I_1(x)$ вычисляем в представлении (3.1)

$$I_1(x) = \\ = \iint\limits_{R_2} \gamma(y_1, y_2) \frac{e^{i\omega t_0(x,y)}}{R(t_0, x, y)\; r(t_0, x, y)} \,\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2.$$

Зависимость от x_3 присутствует только в дробной части подынтегральной функции, знаменатель при $x_3 \neq 0$ отделен от нуля, а функцию $\gamma(y_1, y_2)$ предполагаем интегрируемой по области D. Поэтому производная по x_3 интеграла $I_1(x)$ вычисляется дифференцированием подынтегральной функции. Интеграл, содержащий производную экспоненты с множителем

$$\frac{\partial t_0(x, y)}{\partial x_3} = \frac{x_3}{Cr(t_0, x, y)},$$

ограничен при $x_3 \to 0$, поэтому с учетом множителя $\frac{x_3}{4\pi C}$ перед $I_1(x)$ в равенстве (3.2) эта часть производной $\frac{\partial \phi_0}{\partial x_3}$ стремится к нулю при $x_3 \to 0$. Другая часть производной первого слагаемого правой части равенства (3.1)

$$\frac{x_3}{4\pi C} \iint\limits_{D} \gamma(y_1, y_2)\, e^{i\omega t_0(x,y)} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{R(t_0, x, y)\; r(t_0, x, y)}\right) \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$$

стремится при $x_3 \to 0$ к $-\frac{1}{2C}\gamma(x_1, x_2)$. Чтобы установить это предельное соотношение, заметим сначала, что в силу финитности функции γ и ограниченности области D в последнем интеграле эту область можно заменить кругом $K(t, x)$ достаточно большого радиуса. В круге удобно ввести подвижные координаты (τ, α):

$$y_1 = x_1 - \tau V + \sqrt{(C\tau)^2 - x_3^2}\cos\alpha,$$

$$y_2 = x_2 + \sqrt{(C\tau)^2 - x_3^2}\sin\alpha,$$

в которых явно можно вычислить

$$\frac{x_3}{4\pi C} \iint\limits_{K(t,x)} \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{1}{R(t_0, x, y)\; r(t_0, x, y)}\right) \mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2$$

и показать, что при $x_3 \to 0$ это произведение стремится к $-\frac{1}{2C}$. Далее в окрестности точки (x_1, x_2) учитывается непрерывность функции γ, а на остальной части круга с учетом множителя $x_3 \to 0$ достаточно интегрируемости этой функции. Здесь в качестве окрестности точки (x_1, x_2) в области D можно взять круг $K(\delta, x)$, при $x_3 < \delta C\sqrt{1 - M^2}$ эта точка попадает в круг. Более того, считаем x_3 настолько малым, что расстояние от точки (x_1, x_2) до границы круга равномерно по x_3 отделено от нуля, например, не меньше $\frac{\delta C(1-M)}{2}$. В свою очередь, число δ близко к нулю так, что значения функции γ во всех точках круга достаточно близки к ее значению в центре круга.

В производной по x_3 первого слагаемого в правых частях равенств (3.1) и (3.2) присутствует также

$$\frac{1}{4\pi C} I_1(x) = \frac{1}{2C} \int\limits_{x_3/C}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t} S_{\sqrt{(Ct)^2 - x_3^2}} [\gamma] \, \mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

Это слагаемое учитывается вместе с производной второго слагаемого в правых частях равенств (3.1) и (3.2). Здесь также появится

$$\frac{1}{4\pi} I_2(x) = \\ = \frac{1}{2} \int\limits_{x_3/C}^{\infty} e^{i\omega t} \int\limits_0^{\sqrt{(Ct)^2 - x_3^2}} \frac{\rho}{\left(\rho^2 + x_3^2\right)^{\frac{3}{2}}} S_\rho [\gamma] \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}t. \tag{4.2}$$

В $I_2(x)$ зависимость от x_3 есть в пределах обоих интегралов. Производная по нижнему пределу первого интеграла равна нулю для любых значений $x_3 \neq 0$, так как при ее вычислении пределы второго интеграла совпадут, а подынтегральная функция особенностей не имеет. Производная по x_3 в верхнем пределе второго интеграла в $\frac{x_3}{4\pi} I_2(x)$ имеет вид

$$-\frac{x_3^2}{2C^3} \int\limits_{x_3/C}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t^3} S_{\sqrt{(Ct)^2 - x_3^2}} [\gamma] \, \mathrm{d}t. \tag{4.3}$$

Продифференцируем по x_3 подынтегральную функцию в $\frac{x_3}{4\pi} I_2(x)$, получим

$$-3 \frac{x_3^2}{2} \int\limits_{x_3/C}^{\infty} e^{i\omega t} \int\limits_0^{\sqrt{(Ct)^2 - x_3^2}} S_\rho [\gamma] \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + x_3^2\right)^{\frac{5}{2}}} \, \mathrm{d}t. \tag{4.4}$$

По-отдельности каждый из интегралов (4.1)–(4.4) может не иметь предела при $x_3 \to 0$, поскольку предельные выражения подынтегральных функций имеют неинтегрируемые особенности на луче $y_1 = x_1 - tV$. Покажем, что их сумма имеет предел в каждой точке области D, где функция γ предполагается дважды непрерывно дифференцируемой и абсолютно интегрируемой.

Сначала заметим, что, если в выражениях (4.1)−(4.4) заменить усреднения значениями усредняемых функций в центре окружности усреднения, то при каждом значении $t > x_3/C$ сумма подынтегральных выражений равна нулю при любых значениях $x_3 \neq 0$. Напомним, что асимптотика $S_\rho [\gamma] (x_1 - tV, x_2) - \gamma (x_1 - tV, x_2) = O\left(\rho^2\right)$ имеет локальный характер, она не применима вдоль всего луча $y_1 = x_1 - tV$. Этой асимптотикой воспользуемся в малой окрестности точки $(x_1, x_2, 0)$ в пространстве переменных (y_1, y_2, t). Эта точка является вершиной косого конуса, к которому при $x_3 \to 0$ стремятся гиперболоиды — области интегрирования в (4.2) и (4.4).

Как описано выше, выберем достаточно малое значение δ, меньшее расстояния от точки (x_1, x_2) до границы области D. Из суммы интегралов (4.1)–(4.4) в пределах интегрирования по $t \in (x_3/C, \sqrt{\delta^2 + x_3^2}/C)$ вычтем указанную нулевую сумму и сгруппируем соответствующие интегралы в пары. Учитывая упомянутую асимптотику, найдем пределы при $x_3 \to 0$ для каждой из четырех пар интегралов.

Разность интегралов, соответствующих (4.1), в пределе при $x_3 \to 0$ дает сходящийся интеграл

$$\frac{1}{2\,C} \int\limits_0^{\delta/C} \frac{e^{i\omega t}}{t} \left(S_{Ct} [\gamma] - \gamma\right) \mathrm{d}t.$$

Аналогично разность интегралов, соответствующих (4.2), стремится к

$$\frac{1}{2} \int\limits_0^{\delta/C} e^{i\omega t} \int\limits_0^{Ct} \frac{1}{\rho^2} \left(S_\rho [\gamma] - \gamma\right) \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}t.$$

Здесь также подынтегральная функция особенностей не имеет. Заметим, что оба предельных выражения стремятся к нулю при $\delta \to 0$.

Разности, соответствующие слагаемым вида (4.3) и (4.4), стремятся к нулю при $x_3 \to 0$.

Двойные интегралы (4.1) и (4.3) в пределах интегрирования $t \in (\sqrt{\delta^2 + x_3^2}/C, \infty)$ с отделенными от нуля знаменателями при $x_3 \to 0$ стремятся к

$$\frac{1}{2C} \int\limits_{\delta/C}^{\infty} \frac{e^{i\omega t}}{t} S_{Ct} [\gamma] \, (x_1 - tV, \, x_2) \, \mathrm{d}t.$$

В силу финитности функции γ область интегрирования здесь конечна.

Тройные интегралы (4.2) и (4.4) в пределах интегрирования $t \in (\sqrt{\delta^2 + x_3^2}/C, \infty)$

рассмотрим сначала вне δ–окрестности луча $y_1 = x_1 - tV$. Здесь также знаменатели отделены от нуля, поэтому при $x_3 \to 0$ сумма этих интегралов дает

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\delta/C}^{\infty} e^{i\omega t}\int\limits_{\delta}^{Ct}\frac{1}{\rho^2}S_\rho\left[\gamma\right]\left(x_1 - tV,\, x_2\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}t.$$

Внутри δ-окрестности луча $y_1 = x_1 - tV$ сумма тройных интегралов (4.2) и (4.4) в пределе при $x_3 \to 0$ дает выражение вида

$$-\frac{1}{2\,\delta}\int\limits_{\delta/C}^{\infty} e^{i\omega t}S_\delta\left[\gamma\right]\left(x_1 - tV, x_2\right)\mathrm{d}t + O\left(\delta\right).$$

Здесь величина порядка δ возникает в процессе доказательства, когда в формуле усреднения замораживается второй аргумент функции γ, что возможно в предположении ограниченности первой и второй производных этой функции по второму аргументу.

Таким образом, при любых достаточно малых значениях δ сумма всех выражений, представляющих $\frac{\partial\phi_0(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_3}$, имеет конечный предел при $x_3 \to 0$. В итоговом выражении предела присутствует неопределенная величина порядка δ.

В задаче обтекания крыла неограниченным потоком условие непротекания (1.2) после несложных преобразований приводит в пределе при $\delta \to 0$ к интегральному уравнению второго рода

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2C}\gamma\left(x_1, x_2\right) + \\ &+\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{2}\int\limits_{\delta/C}^{\infty} e^{i\omega t}\left\{\frac{1}{Ct}\left(S_{Ct}\left[\gamma\right] - S_\delta\left[\gamma\right]\right) + \right. \\ &\left. + \int\limits_{\delta}^{Ct}\frac{1}{\rho^2}\left(S_\rho\left[\gamma\right] - S_\delta\left[\gamma\right]\right)\mathrm{d}\rho\right\}\mathrm{d}t = \\ &= -i\omega f\left(x_1, x_2\right) + \frac{\partial f}{\partial x_1}\left(x_1, x_2\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Здесь по-прежнему аргументы всех усреднений одинаковы:$(x_1 - tV, x_2)$.

В задаче с экраном амплитуда потенциала возмущенных скоростей имеет вид

$$\begin{aligned}\phi\left(x_1, x_2, x_3\right) = \phi_0\left(x_1, x_2, x_3\right) - \\ - \phi_0\left(x_1, x_2, x_3 + 2h\right).\end{aligned}$$

Функция $\phi_0\left(x_1, x_2, x_3\right)$ при ненулевой последней компоненте бесконечно дифференцируема и ее производная по x_3 при $x_3 > 0$ была вычислена выше. Интегральное уравнение для определения функции $\gamma\left(x_1, x_2\right)$ в задаче с экраном получается из (4.5) вычитанием из левой части последнего уравнения производной $\frac{\partial\phi_0}{\partial x_3}\left(x_1, x_2, 2h\right)$. Эта производная представлена суммой четырех выражений (4.1) – (4.4) при $x_3 = 2h$, а также еще двумя слагаемыми, возникающими при дифференцировании $I_1\left(x\right)$,

$$\begin{aligned} &\frac{i\omega h^2}{\pi C^2}\iint\limits_{D}\gamma\left(y_1, y_2\right)e^{i\omega t_0(x,y)}\frac{\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2}{Rr^2} - \\ &- \frac{h^2}{\pi C}\iint\limits_{D}\frac{\gamma\left(y_1, y_2\right)e^{i\omega t_0(x,y)}}{R^2\,r^2}\times \\ &\times\left(1 + \left(1 - M^2\right)\frac{R}{r}\right)\mathrm{d}y_1\,\mathrm{d}y_2. \end{aligned}$$

Здесь аргументы функций r и R одинаковы и при $x_3 = 2h$ имеем

$$\begin{aligned} &r\left(t_0, x, y\right) = \\ &= \sqrt{\left(x_1 - y_1\right)^2 + \left(1 - M^2\right)\left(\left(x_2 - y_2\right)^2 + 4h^2\right)}, \end{aligned}$$

$$R\left(t_0, x, y\right) = Ct_0\left(x, y\right),$$

$$t_0\left(x, y\right) = n\left(r\left(t_0, x, y\right) - M\left(y_1 - x_1\right)\right).$$

Заключение

Решение дифференциальной задачи, моделирующей гармоническое обтекание тонкого ограниченного крыла дозвуковым потоком сжимаемого газа, построено в форме потенциала двойного слоя с финитной плотностью. Удовлетворение граничному условию для заданной в области крыла нормальной составляющей поля возмущенных скоростей требует аккуратного предельного перехода для нормальной производной указанного потенциала. По-отдельности интегралы, составляющие эту производную, пределов не имеют, но предел их суммы существует. В работе найдена интегральная форма для предельного выражения, связывающего скачок давления в точке крыла с интегральными средними значениями этого скачка по расширяющимся окружностям распространения поля возмущенных скоростей.

Решение математической модели движения крыла над твердой поверхностью представлено через решение задачи, моделирующей обтекание крыла безграничным потоком. Учет твердого экрана в дифференциальной задаче приводит к дополнительным слагаемым в интегральном уравнении, но эти интегралы особенностей не имеют.

Полученное в работе интегральное уравнение второго рода позволяет применить итерационный метод поиска приближенного решения.

Литература

1. *Гайденко С.В.* Потенциал возмущенных скоростей как функция скачка давления в задаче нестационарного обтекания тонкого крыла дозвуковым потоком сжимаемого газа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2009. № 1. С. 24–31.
2. *Красильщикова Е.А.* Тонкое крыло в сжимаемом потоке. М.: Наука, 1986. 286 с.
3. *Белоцерковский С.М., Скрипач Б.К., Табачников В.Г.* Крыло в нестационарном потоке газа. М.: Наука, 1971. 767 с.
4. *Гайденко С.В.* Нестационарное обтекание тонкого профиля дозвуковым потоком сжимаемого газа вблизи твердой границы // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2008. № 4. С. 35–42.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 527 с.
6. *Гайденко С.В.* Нестационарное обтекание тонкого крыла конечного размаха дозвуковым потоком газа вблизи твердой границы / Кубанский гос. Университет. Краснодар, 2006. 29 с. Деп. в ВИНИТИ 13.06.2006, № 783-В2006.

References

1. Gaidenko, S.V. Potentsial vozmushchennykh skorostey kak funktsiya skachka davleniya v zadache nestatsionarnogo obtekaniya tonkogo kryla dozvukovym potokom szhimaemogo gaza [Perturbed velocity potential as a function of pressure jump in the problem of non-stationary streamline of a thin wing by subsonic flow of compressible gas]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2009, no. 1, pp. 24–31. (In Russian)
2. Krasilshchikova, E.A. *Tonkoe krylo v szhimaemom potoke* [Thin wing in a compressible flow]. Nauka, Moscow, 1986. (In Russian)
3. Belotserkovsky, S.M., Skripach, B.K., Tabachnikov, V.G. *Krylo v nestatsionarnom potoke gaza* [Wing in non-stationary gas flow]. Nauka, Moscow, 1971. (In Russian)
4. Gaidenko, S.V. Nestatsionarnoe obtekanie tonkogo profilya dozvukovym potokom szhimaemogo gaza vblizi tverdoy granitsy [Non-Stationary circumfluence of a thin profile by subsonic flow of compressible gas near solid boundary]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2008, no. 4, pp. 35–42.
5. Vladimirov, V.S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Nauka, Moscow, 1976. (In Russian)
6. Gaidenko, S.V. *Nestatsionarnoe obtekanie tonkogo kryla konechnogo razmakha dozvukovym potokom gaza vblizi tverdoy granitsy* [Non-Stationary circumfluence of a thin wing of a finite span by a subsonic gas flow near a solid boundary]. Deposited to VINITI 13.06.2006, no. 783-B2006. (In Russian)

Статья поступила 4 сентября 2018 г.