

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-15-4-40-53

## К ПРОХОЖДЕНИЮ ТРЕХМЕРНОЙ УПРУГОЙ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ ТРИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДВОЯКО-ПЕРИОДИЧЕСКИХ МАССИВА ТРЕЩИН

Сумбатян М. А., Ремизов М. Ю.

ON THE 3D ELASTIC WAVE PROPAGATION THROUGH A CASCADING SYSTEM  
OF THREE DOUBLY-PERIODIC ARRAYS OF CO-PLANAR CRACKS

М. А. Sumbatyan, М. Yu. Remizov

Southern Federal University, Rostov-on-Don, 344090, Russia  
e-mail: sumbatma@mail.ru

*Abstract.* The paper is devoted to the calculation of the reflection and transmission coefficients, when a plane wave is incident on a three-dimensional system of three parallel doubly-periodic gratings of rectangular cracks in the elastic material. In the one-mode frequency range the problem is reduced to a system of integral equations holding over the single chosen crack. The semi-analytical method previously introduced for three-dimensional scalar and two-dimensional elastic problems gives an explicit representations for the wave field and the scattering parameters.

*Keywords:* double-periodic crack array, low-frequency mode, integral equation, transformation of hypersingular integral equation kernel, semi-analytical method, reflection and transmission coefficient, acoustic filter.

### Введение

Исследование прохождения упругих волн через периодические решетки является важной проблемой в области ультразвукового неразрушающего контроля материалов, при распространении звука, а также для электромагнитных волноводов с диафрагмами. Различные численные методы были применены в двумерных задачах с периодическими отверстиями произвольной формы, которые дают достаточно точные результаты, однако для оценки качественных свойств более предпочтительны аналитические теории. На практике аналитические результаты могут быть получены в предположении режима низких частот при слабом взаимодействии волн, где некоторые приближенные результаты можно установить в аналитической форме. Таким образом, аналитические методы, приводящие к явным формулам для соответствующих параметров рассеяния, справедливы, как правило, только в определенном низкочастотном

пределе. В плоских задачах распространения волн через периодические массивы трещин в упругих твердых телах одно-периодические и двояко-периодические системы рассматривались в работах [1–6]. Все упомянутые источники относятся к скалярной волновой теории. В работах [7, 8] получены явные аналитические формулы для параметров отражения и прохождения в режиме одной моды для акустических и упругих волн, проникающих сквозь двояко и тройко-периодические массивы отверстий и объемных препятствий.

В настоящей работе продолжается изучение распространения упругих волн в двояко-периодических структурах параллельных трещин произвольной конфигурации в трехмерной постановке. Обсуждается пример прямоугольных трещин. Тематика исследования связана с [1, 5] и с другими опубликованными работами, однако здесь применяется методика, отличная от упомянутых работ. Волновые процессы являются гармоническими по времени. Как и в некоторых предшествующих

Сумбатян Межлум Альбертович, д-р физ.-мат. наук, профессор, главный научный сотрудник Южного федерального университета, профессор кафедры теоретической и компьютерной гидроаэродинамики Института математики, механики и компьютерных наук им. Воровича И.И. Южного федерального университета; e-mail: masumbatyan@sfned.ru.

Ремизов Михаил Юрьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент, старший научный сотрудник Института математики, механики и компьютерных наук им. Воровича И.И. Южного федерального университета; e-mail: remizov72@mail.ru.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 15-19-10008-И).

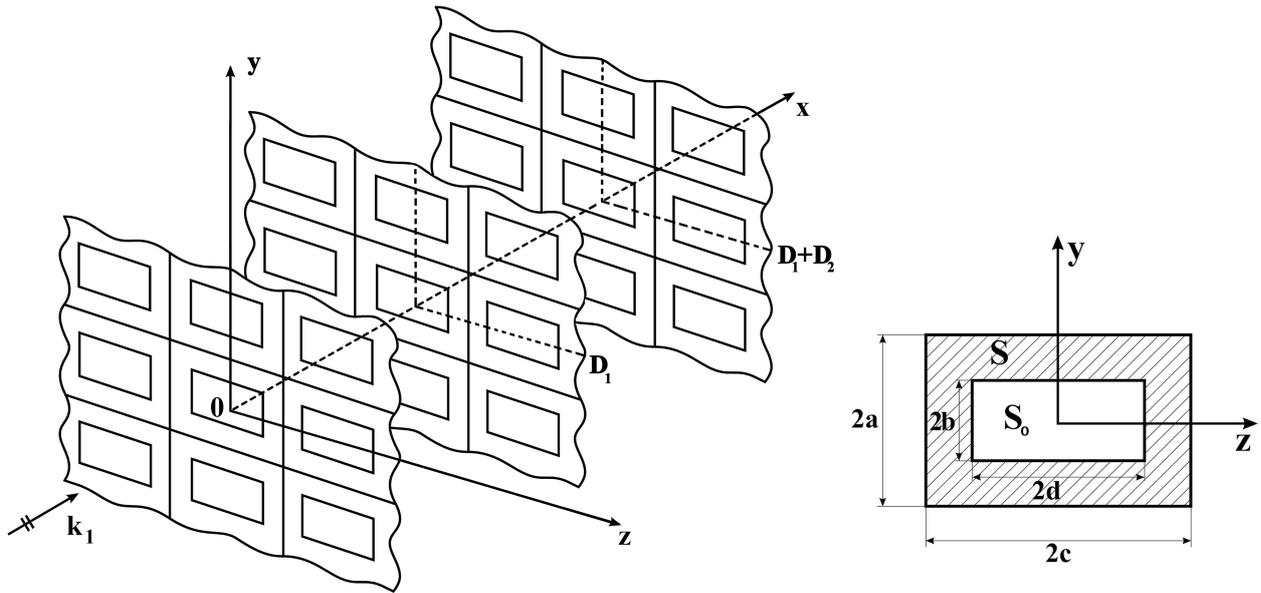


Рис. 1. Параллельные массивы двояко-периодических систем трещин. Общий вид решетки и отдельно выделенная ячейка

работах: а) распространяется только одно-модовый режим при нормальной падающей волне ( $ak_2, ck_2 < \pi$ ), где  $k_2$  — волновое число для поперечной волны,  $2a$  и  $2c$  — периоды решеток; б) вертикальные плоскости с массивами трещин находятся достаточно далеко друг от друга, так что отношения  $D_j/a, D_j/c$  являются большими величинами, где  $D_j, j = 1, 2$  — это расстояния между двумя плоскостями, в которых расположены трещины.

Целью настоящей работы является развитие полуаналитических подходов к вычислению характеристик отражения и прохождения для упругих трехмерных задач, а также обнаружение ряда новых физических свойств, характерных только для упругих задач, отсутствующих в скалярном случае. Проблемы, изученные в настоящей работе, связаны с теорией и практикой так называемых *акустически метаматериалов*, которые обладают, благодаря специфической внутренней структуре, свойствами акустических фильтров, то есть записыванием распространяющейся волны на определенных интервалах частот. Экспериментально это явление было недавно обнаружено и представлено в [9]. Ряд фундаментальных аспектов, связанных с акустическими метаматериалами, обсуждаются и в ряде других публикаций [10–13]. Особенности наличия неоднородностей в анизотропных упругих телах выявлены в работе [14].

### Математическая постановка задачи

Рассмотрим трехмерную упругую среду, которая содержит три бесконечных параллельных друг другу плоскости, расположенных при  $x = 0, D_1, D_1 + D_2$ , каждая из которых содержит бесконечный периодический массив двояко-периодических коллинеарных трещин одинаковой формы, симметричных относительно осей  $y$  и  $z$ . Период решетки вдоль оси  $y$  равен  $2a$ , вдоль оси  $z$  —  $2c$ . Расстояние между первой и второй системой трещин, второй и третьей есть  $D_1$  и  $D_2$  соответственно. Рассматривается гармонический во времени режим колебаний, в котором зависимость от времени содержит множитель  $e^{-i\omega t}$ , далее опущенный во всех формулах. Если изучается падение плоской продольной волны  $e^{ik_1x}$  на данную систему вдоль положительного направления оси  $x$ , то в силу симметрии, задача эквивалентна рассмотрению волновода шириной  $2a$  вдоль  $y$  и  $2c$  вдоль  $z$  (рис. 1). Принимается, что продольная плоская волна в форме

$$\varphi_0 = e^{ik_1x}, \quad \psi^l = 0, \quad l = 1, 2, 3, \quad (1a)$$

приходит из  $-\infty$ , порождая рассеянное поле перед первым массивом ( $x < 0$ ), между первым и вторым ( $0 < x < D_1$ ), между вторым и третьим ( $D_1 < x < D_2$ ) и после третьего ( $x > D_1 + D_2$ ). Тогда потенциалы Ламе, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца в

соответствующих областях

$$\Delta\varphi + k_1^2\varphi = 0, \quad \Delta\psi + k_2^2\psi = 0, \quad (1b)$$

могут быть представлены в виде тригонометрических рядов Фурье по переменным  $y$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} x < 0: \quad \varphi^l &= e^{ik_1x} + R e^{-ik_1x} + \\ &+ \sum A_{nj} e^{q_{nj}x} \cos(a_n y) \cos(c_j z), \\ \psi_1^l &= \sum_{n+j>0} B_{nj}^1 e^{r_{nj}x} \sin(a_n y) \sin(c_j z), \\ \psi_2^l &= \sum_{n+j>0} B_{nj}^2 e^{r_{nj}x} \cos(a_n y) \sin(c_j z), \\ \psi_3^l &= \sum_{n+j>0} B_{nj}^3 e^{r_{nj}x} \sin(a_n y) \cos(c_j z), \quad (2a) \end{aligned}$$

$0 < x < D_1$ :

$$\begin{aligned} \varphi^1 &= e^{ik_1x} + F_0^1 \cos k_1 x + H_0^1 \cos k_1(x - D_1) + \\ &+ \sum_{n+j>0} \{F_{nj}^1 \operatorname{ch} q_{nj}(x) + H_{nj}^1 \operatorname{ch} q_{nj}(x - D_1)\} \times \\ &\times \cos(a_n y) \cos(c_j z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1^1 &= \sum_{n+j>0} \{G_{nj}^1 \operatorname{ch} r_{nj}(x) + \\ &+ P_{nj}^1 \operatorname{ch} r_{nj}(x - D_1)\} \sin(a_n y) \sin(c_j z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2^1 &= \sum_{n+j>0} \{V_{nj}^1 \operatorname{sh} r_{nj}(x) + \\ &+ Q_{nj}^1 \operatorname{sh} r_{nj}(x - D_1)\} \cos(a_n y) \sin(c_j z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3^1 &= \sum_{n+j>0} \{W_{nj}^1 \operatorname{sh} r_{nj}(x) + \\ &+ Y_{nj}^1 \operatorname{sh} r_{nj}(x - D_1)\} \times \\ &\times \sin(a_n y) \cos(c_j z), \quad (2b) \end{aligned}$$

$D_1 < x < D_2$ :

$$\begin{aligned} \varphi^2 &= e^{ik_1x} + F_0^2 \cos k_1(x - D_1) + \\ &+ H_0^2 \cos k_1(x - D_1 - D_2) + \\ &+ \sum_{n+j>0} \{F_{nj}^2 \operatorname{ch} q_{nj}(x - D_1) + \\ &+ H_{nj}^2 \operatorname{ch} q_{nj}(x - D_1 - D_2)\} \times \\ &\times \cos(a_n y) \cos(c_j z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1^2 &= \sum_{n+j>0} \{G_{nj}^2 \operatorname{ch} r_{nj}(x - D_1) + \\ &+ P_{nj}^2 \operatorname{ch} r_{nj}(x - D_1 - D_2)\} \times \\ &\times \sin(a_n y) \sin(c_j z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2^2 &= \sum_{n+j>0} \{V_{nj}^2 \operatorname{sh} r_{nj}(x - D_1) + \\ &+ Q_{nj}^2 \operatorname{sh} r_{nj}(x - D_1 - D_2)\} \times \\ &\times \cos(a_n y) \sin(c_j z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3^2 &= \sum_{n+j>0} \{W_{nj}^2 \operatorname{sh} r_{nj}(x - D_1) + \\ &+ Y_{nj}^2 \operatorname{sh} r_{nj}(x - D_1 - D_2)\} \times \\ &\times \sin(a_n y) \cos(c_j z), \quad (2c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x > D_1 + D_2: \quad \varphi^r &= T e^{ik_1(x - D_1 - D_2)} + \\ &+ \sum_{n+j>0} C_{nj} e^{-q_{nj}(x - D_1 - D_2)} \times \\ &\times \cos(a_n y) \cos(c_j z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_1^r &= \sum_{n+j>0} D_{nj}^1 e^{-r_{nj}(x - D_1 - D_2)} \times \\ &\times \sin(a_n y) \sin(c_j z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_2^r &= \sum_{n+j>0} D_{nj}^2 e^{-r_{nj}(x - D_1 - D_2)} \times \\ &\times \cos(a_n y) \sin(c_j z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \psi_3^r &= \sum_{n+j>0} D_{nj}^3 e^{-r_{nj}(x - D_1 - D_2)} \times \\ &\times \sin(a_n y) \cos(c_j z), \quad (2d) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} q_{nj} &= \sqrt{a_n^2 + c_j^2 - k_1^2}, \\ r_{nj} &= \sqrt{a_n^2 + c_j^2 - k_2^2}, \\ a_n &= \frac{\pi n}{a}, \quad c_j = \frac{\pi j}{c}. \end{aligned} \quad (2e)$$

Здесь все большие буквы (кроме  $D_1, D_2, R, T$ ) означают неизвестные постоянные,  $k_1, k_2$  — продольные и поперечные волновые числа:  $k_1 = \omega/c_p$  и  $k_2 = \omega/c_s$ ,  $c_p$  и  $c_s$  — продольная и поперечная скорости волн в данной среде ( $c_p > c_s$ ),  $R$  и  $T$  — коэффициенты отражения и прохождения, соответственно.

Следует отметить, что представления (2) являются точными для произвольных значений волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$  даже в случае, когда квадратные корни  $q_{nj}$  и  $r_{nj}$  могут принимать комплексные значения. Однако ограничимся рассмотрением случая одной моды:  $0 < k_2 a < \pi$ ,  $0 < k_2 c < \pi$ , тогда  $q_{nj} > 0$ ,  $r_{nj} > 0$  для всех  $n + j = 1, 2, \dots$ . При  $n = j = 0$ ,  $q_{00} = -ik_1$  и  $r_{00} = -ik_2$  в соответствии с условием излучения. Кроме того, принимается, что массивы находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга. Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  могут быть выражены в терминах потенциалов Ламе в следующем виде:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}/\mu &= (2k_1^2 - k_2^2)\varphi + \\ &+ 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y\partial x} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z\partial x}\right), \\ \sigma_{xy}/\mu &= k_2^2\psi_3 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z\partial y}\right), \\ \sigma_{xz}/\mu &= -k_2^2\psi_2 + 2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi_3}{\partial z\partial y}\right), \\ u_x &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\psi_3}{\partial y} - \frac{\partial\psi_2}{\partial z}, \\ u_y &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\psi_1}{\partial z} - \frac{\partial\psi_3}{\partial x}, \\ u_z &= \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial x} - \frac{\partial\psi_1}{\partial y}.\end{aligned}\quad (3)$$

Потенциалы  $\psi_{1,2,3}$  следует рассматривать с дополнительным условием

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \frac{\partial\psi_3}{\partial z} = 0. \quad (4)$$

Принимая непрерывность поля перемещений  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  вне области трещины, введем следующие неизвестные функции  $g_x^s(y, z)$ ,  $g_y^s(y, z)$ ,  $g_z^s(y, z)$ ,  $s = 1, 2, 3$  такие, что

$x = 0$  :

$$u_x^l - u_x^1 = \begin{cases} g_x^1(y, z), & (y, z) \in S_0, \\ 0, & (y, z) \notin S_0; \end{cases}$$

$x = 0$  :

$$u_y^l - u_y^1 = \begin{cases} g_y^1(y, z), & (y, z) \in S_0, \\ 0, & (y, z) \notin S_0; \end{cases}$$

$x = 0$  :

$$u_z^l - u_z^1 = \begin{cases} g_z^1(y, z), & (y, z) \in S_0, \\ 0, & (y, z) \notin S_0; \end{cases} \quad (5a)$$

$x = D_1$  :

$$u_x^1 - u_x^2 = \begin{cases} g_x^2(y, z), & (y, z) \in S_0, \\ 0, & (y, z) \notin S_0; \end{cases}$$

$x = D_1$  :

$$u_y^1 - u_y^2 = \begin{cases} g_y^2(y, z), & (y, z) \in S_0, \\ 0, & (y, z) \notin S_0; \end{cases}$$

$x = D_1$  :

$$u_z^1 - u_z^2 = \begin{cases} g_z^2(y, z), & (y, z) \in S_0, \\ 0, & (y, z) \notin S_0; \end{cases} \quad (5b)$$

$x = D_1 + D_2$  :

$$u_x^2 - u_x^r = \begin{cases} g_x^3(y, z), & (y, z) \in S_0, \\ 0, & (y, z) \notin S_0; \end{cases}$$

$x = D_1 + D_2$  :

$$u_y^2 - u_y^r = \begin{cases} g_y^3(y, z), & (y, z) \in S_0, \\ 0, & (y, z) \notin S_0; \end{cases}$$

$x = D_1 + D_2$  :

$$u_z^2 - u_z^r = \begin{cases} g_z^3(y, z), & (y, z) \in S_0, \\ 0, & (y, z) \notin S_0, \end{cases} \quad (5c)$$

физический смысл которых — относительные смещения левого и правого берегов трещин вдоль соответствующих декартовых координат.

Ввиду очевидной геометрической симметрии, функция  $u_x$  является четной по переменным  $y$  и  $z$ , функция  $u_y$  является нечетной по  $y$  и четной по  $z$ , функция  $u_z$  — четной по  $y$  и нечетной по  $z$ .

Теперь формулы (5) могут быть использованы для представления всех постоянных, входящих в потенциалы (2)–(4) в терминах функций  $g_x^s(y, z)$ ,  $g_y^s(y, z)$ ,  $g_z^s(y, z)$ ,  $s = 1, 2, 3$ . По аналогии с плоской задачей [2] можно доказать, что с учетом естественной геометрической симметрии в данной задаче, относительные тангенциальные смещения между берегами трещин всюду равны нулю:

$g_y^{1,2} \equiv 0, g_z^{1,2} \equiv 0$ . Тогда ортогональность тригонометрических функций приводит соотношения (5) к следующим соотношениям:

$$-ik_1 R - H_0^1 k_1 \sin(k_1 D_1) = \frac{1}{4ac} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6a)$$

$$-F_0^1 k_1 \sin(k_1 D_1) - H_0^2 k_1 \sin(k_1 D_2) = \frac{1}{4ac} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6b)$$

$$ik_1 e^{ik_1(D_1+D_2)} - F_0^2 k_1 \sin(k_1 D_2) - ik_1 T = \frac{1}{4ac} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6c)$$

$$(A_{nj} + H_{nj}^1 \operatorname{sh}(q_{nj} D_1)) q_{nj} + (B_{nj}^3 + Y_{nj}^1 \operatorname{sh}(r_{nj} D_1)) a_n - (B_{nj}^2 + Q_{nj}^1 \operatorname{sh}(r_{nj} D_1)) c_j = \frac{2\delta_{nj}}{ac} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6d)$$

$$(F_{nj}^1 + H_{nj}^2) \operatorname{sh}(q_{nj} D_1) q_{nj} + (W_{nj}^1 + Y_{nj}^2) \operatorname{sh}(r_{nj} D_1) a_n - (V_{nj}^1 + Q_{nj}^2) \operatorname{sh}(r_{nj} D_1) c_j = \frac{2\delta_{nj}}{ac} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6e)$$

$$(F_{nj}^2 \operatorname{sh}(q_{nj} D_1) + C_{nj}) q_{nj} + (W_{nj}^2 \operatorname{sh}(r_{nj} D_1) - D_{nj}^3) a_n - (V_{nj}^2 \operatorname{sh}(r_{nj} D_1) - D_{nj}^2) c_j = \frac{2\delta_{nj}}{ac} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (6f)$$

где

$$\delta_{nj} = \begin{cases} 1/2, & (n, j) = 1, 2, \dots, \\ 1/4, & (n = 0, j = 1, 2, \dots), \\ & (j = 0, n = 1, 2, \dots). \end{cases}$$

Условия непрерывности поля напряжений и перемещений при  $x = 0, D_1, D_1 + D_2$  выражаются в виде

$$\sigma_{xx}^l = \sigma_{xx}^1, \quad \sigma_{xx}^1 = \sigma_{xx}^2, \quad \sigma_{xx}^2 = \sigma_{xx}^r, \quad (7a) \\ (y, z) \notin S_0,$$

$$\sigma_{xx}^l = \sigma_{xx}^1 = 0, \quad \sigma_{xx}^1 = \sigma_{xx}^2 = 0, \quad (7b) \\ \sigma_{xx}^2 = \sigma_{xx}^r = 0, \quad (y, z) \in S_0,$$

$$u_x^l = u_x^1, \quad u_x^1 = u_x^2, \quad u_x^2 = u_x^r, \quad (7c) \\ (y, z) \notin S_0,$$

где соотношения (7a) означают непрерывность поля напряжений и соотношения (7c) — непрерывность поля перемещений вне трещины. Условия для компонент тензора напряжений  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}$  и компонент вектора перемещений  $u_y, u_z$  записываются аналогично. Подставляя все постоянные в граничные условия отсутствия напряжений на берегах трещин при  $x = 0, D_1, D_1 + D_2, (y, z) \in S_0$ , используя основное предположение  $D_j/a \gg 1, D_j/c \gg 1$  ( $j = 1, 2$ ), после некоторых рутинных преобразований получается следующая основная система интегральных уравнений (см. Приложение),  $((y, z) \in S_0)$ :

$$\frac{1}{ac} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) \left\{ \frac{1}{8ik_1} - \frac{K(y - \eta, z - \zeta)}{k_2^4} \right\} d\eta d\zeta + \frac{e^{ik_1 D_1}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \frac{e^{ik_1(D_1+D_2)}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = 1, \\ \frac{e^{ik_1 D_1}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \frac{1}{ac} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) \left\{ \frac{1}{8ik_1} - \frac{K(y - \eta, z - \zeta)}{k_2^4} \right\} d\eta d\zeta + \frac{e^{ik_1 D_2}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = e^{ik_1 D_1}, \quad (8) \\ \frac{e^{ik_1(D_1+D_2)}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \frac{e^{ik_1 D_2}}{8acik_1} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + \frac{1}{ac} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) \left\{ \frac{1}{8ik_1} - \frac{K(y - \eta, z - \zeta)}{k_2^4} \right\} d\eta d\zeta = e^{ik_1(D_1+D_2)}.$$

Здесь  $R_{nj}$  — функция Рэлея

$$R_{nj} = [2(a_n^2 + c_j^2) - k_2^2]^2 - 4r_{nj}q_{nj}(a_n^2 + c_j^2). \quad (9a)$$

$$K(y, z) = \sum_{n+j>0} \delta_{nj} L_{nj} \cos(a_n y) \cos(c_j z), \quad (9b)$$

$$L_{nj} = \frac{R_{nj}}{q_{nj}}.$$

Рассмотрим вспомогательное интегральное уравнение

$$\frac{1}{ack_2^2} \int_{S_0} h(\eta, \zeta) K(y - \eta, z - \zeta) d\eta d\zeta = 1, \quad (10)$$

$$(y, z) \in S_0.$$

Очевидно, что

$$g_x^1(y, z) = \left( \frac{1}{8acik_1} J_1 + \frac{e^{ik_1 D_1}}{8acik_1} J_2 + \frac{e^{ik_1(D_1+D_2)}}{8acik_1} J_3 - 1 \right) k_2^2 h(y, z),$$

$$g_x^2(y, z) = \left( \frac{e^{ik_1 D_1}}{8acik_1} J_1 + \frac{1}{8acik_1} J_2 + \frac{e^{ik_1 D_2}}{8acik_1} J_3 - e^{ik_1 D_1} \right) k_2^2 h(y, z), \quad (11)$$

$$g_x^3(y, z) = \left( \frac{e^{ik_1(D_1+D_2)}}{8acik_1} J_1 + \frac{e^{ik_1 D_2}}{8acik_1} J_2 + \frac{1}{8acik_1} J_3 - e^{ik_1(D_1+D_2)} \right) k_2^2 h(y, z),$$

где

$$J_j = \int_{S_0} g_x^j(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

Интегрирование (11) по области  $S_0$  дает систему  $3 \times 3$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $J_j$ :

$$\left\{ \frac{1}{8acik_1} - \frac{1}{Hk_2^2} \right\} J_1 + \left\{ \frac{e^{ik_1 D_1}}{8acik_1} \right\} J_2 + \left\{ \frac{e^{ik_1(D_1+D_2)}}{8acik_1} \right\} J_3 = 1,$$

$$\left\{ \frac{e^{ik_1 D_1}}{8acik_1} \right\} J_1 + \left\{ \frac{1}{8acik_1} - \frac{1}{Hk_2^2} \right\} J_2 + \left\{ \frac{e^{ik_1 D_2}}{8acik_1} \right\} J_3 = e^{ik_1 D_1}, \quad (13)$$

$$\left\{ \frac{e^{ik_1(D_1+D_2)}}{8acik_1} \right\} J_1 + \left\{ \frac{e^{ik_1 D_2}}{8acik_1} \right\} J_2 + \left\{ \frac{1}{8acik_1} - \frac{1}{Hk_2^2} \right\} J_3 = e^{ik_1(D_1+D_2)},$$

где  $H$  — интеграл от решения вспомогательного уравнения:

$$H = \int_{S_0} h(\eta, \zeta) d\eta d\zeta. \quad (14)$$

Из (9b), (10) следует, что функция  $h(y, z)$  является вещественнозначной в режиме одной моды, значит и величина  $H$  в (14) имеет вещественное значение.

Как только вспомогательное уравнение (10) и система (8) решены, все необходимые характеристики волнового поля могут быть найдены. В частности, коэффициенты отражения и прохождения определяются по формулам

$$R = -\frac{J_1}{8acik_1} - \frac{J_2}{8acik_1} e^{ik_1 D_1} - \frac{J_3}{8acik_1} e^{ik_1(D_1+D_2)}, \quad (15a)$$

$$T = -\frac{J_1}{8acik_1} e^{ik_1(D_1+D_2)} - \frac{J_2}{8acik_1} e^{ik_1 D_2} - \frac{J_3}{8acik_1} + e^{ik_1(D_1+D_2)}. \quad (15b)$$

Можно показать, что для любого вещественного значения  $H$  выполняется естественное энергетическое условие  $|R|^2 + |T|^2 = 1$ .

Так как коэффициенты отражения и прохождения данная теория представляет в явном виде и единственной численной процедурой является построение решения вещественного интегрального уравнения (10), предлагаемый метод можно назвать «полуаналитическим». Эффективный способ преобразования ядра  $K(y, z)$  описан в следующем разделе.

### Эффективное преобразование ядра

Рассматривая ядро  $K(y, z)$  (9b), (10), прежде всего следует заметить, что  $L_{nj} \sim \sim -2(k_2^2 - k_1^2)(a_n^2 + c_j^2)^{1/2}$ ,  $(n, j) \rightarrow \infty$ . Следовательно, сумма, определяющая ядро, может быть представлена в виде

$$K(y, z) = -2(k_2^2 - k_1^2) \times \\ \times \sum_{n+j>0} \delta_{nj}(a_n^2 + c_j^2)^{1/2} \cos(a_n y) \cos(c_j z) + \\ + \sum_{n+j>0} \delta_{nj}[L_{nj} + 2(k_2^2 - k_1^2)(a_n^2 + c_j^2)^{1/2}] \times \\ \times \cos(a_n y) \cos(c_j z),$$

$$\sim K(y, z) = \\ = -2(k_2^2 - k_1^2)I(y, z) + K_r(y, z), \quad (16)$$

где второе ядро  $K_r$  — регулярная функция по сравнению с нерегулярной частью  $I$ , которая содержит регулярную и нерегулярной составляющие  $I(y, z) = I_r(y, z) + I_s(y, z)$ .

Для определенности далее демонстрируются математические преобразования для случая  $a = c$ . Вводя безразмерные переменные  $\tilde{y} = y/a$ ,  $\tilde{z} = z/c$  и затем опуская тильды, получаем представление

$$\frac{a}{\pi}I(y, z) = \\ = \sum_{n+j>0} \delta_{nj}(n^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi n y) \cos(\pi j z) = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n0} n \cos(\pi n y) + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{0j} j \cos(\pi j z) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{nj}(n^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi n y) \cos(\pi j z) = \\ = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos(\pi n y) - \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{\infty} j \cos(\pi j z) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} (n^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi n y) \cos(\pi j z). \quad (17)$$

Последнюю двойную сумму можно преобразовать. Для каждого  $j \geq 1$  сумма по  $n$  вычисляется по формуле Пуассона

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = \frac{p(0)}{2} + P(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} P(2\pi n), \quad (18)$$

где

$$p(t) = (t^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi t y), \\ P(u) = \int_0^{\infty} p(t) \cos(ut) dt. \quad (19)$$

Беря обобщенное значение расходящегося интеграла  $P(u)$ , получим

$$P(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{\infty} e^{-\varepsilon t} (t^2 + j^2)^{1/2} \times \\ \times \cos(\pi t y) \cos(ut) dt = \\ = -\frac{j}{2} \left[ \frac{K_1(j|\pi y + u|)}{|\pi y + u|} + \frac{K_1(j|\pi y - u|)}{|\pi y - u|} \right], \quad (20)$$

где были использованы табличные интегралы. Здесь  $K_1(\xi)$  — функция Макдональда. Теперь последняя сумма по  $n$  в (17) принимает вид ( $j \geq 1$ )

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + j^2)^{1/2} \cos(\pi n y) = \frac{j}{2} - \frac{jK_1(j\pi|y|)}{\pi|y|} - \\ - j \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{K_1(j|2\pi n + \pi y|)}{|2\pi n + \pi y|} + \frac{K_1(j|2\pi n - \pi y|)}{|2\pi n - \pi y|} \right]. \quad (21)$$

Окончательно  $I(y, z)$  в (17) переписывается в виде

$$\frac{a}{\pi}I(y, z) = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} n \cos(\pi n y) - \\ - \frac{1}{2\pi|y|} \sum_{j=1}^{\infty} j K_1(j\pi|y|) \cos(\pi j z) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{n,j=1}^{\infty} \left[ \frac{K_1(j|2\pi n + \pi y|)}{|2\pi n + \pi y|} + \right. \\ \left. + \frac{K_1(j|2\pi n - \pi y|)}{|2\pi n - \pi y|} \right] j \cos(\pi j z). \quad (22)$$

Первый ряд из первой строки в (22) вычисляются с использованием обобщенного значения следующего табличного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cos(\pi n y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} n \cos(\pi n y) = \\ = -\frac{1}{4 \sin^2(\pi y/2)}, \quad \left( \sim -\frac{1}{\pi^2 y^2}, y \rightarrow 0 \right). \quad (23)$$

Остальные ряды в (22) также вычисляются явно через сведение к табличным рядам

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} j K_1(j\pi|y|) \cos(\pi j z) &= \\ &= -\frac{\operatorname{sign}(y)}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{j=1}^{\infty} K_0(j\pi|y|) \cos(\pi j z) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{|y|}{(y^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{|y|} + \right. \\ &+ \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{|y|}{[y^2 + (2j + z)^2]^{3/2}} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{|y|}{[y^2 + (2j - z)^2]^{3/2}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $C = 0,5772157$  — постоянная Эйлера.

Следовательно, для ядра (16) основного интегрального уравнения (10) имеем

$$K(y, z) = K_r(y, z) - 2(k_2^2 - k_1^2)[I_r(y, z) + I_s(y, z)], \quad (24)$$

где сингулярная и регулярная части соответственно имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{a}{\pi} I_s &= -\frac{1}{4\pi^2(y^2 + z^2)^{3/2}}, \\ \frac{a}{\pi} I_r &= -\frac{1}{4\pi^2} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{1}{[y^2 + (2j + z)^2]^{3/2}} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{[y^2 + (2j - z)^2]^{3/2}} \right) - \frac{1}{2} \sum_{n,j=1}^{\infty} j \cos(\pi j z) \times \\ &\times \left[ \frac{K_1(j|2\pi n + \pi y|)}{|2\pi n + \pi y|} + \frac{K_1(|j(2\pi n - \pi y)|)}{|2\pi n - \pi y|} \right] + \\ &+ \frac{1}{4\pi^2 y^2} - \frac{1}{16 \sin^2(\pi y/2)}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что полученное сингулярное поведение ядра при малых аргументах содержит двумерный гиперсингулярный член  $1/(y^2 + z^2)^{3/2}$ , хорошо известный в линейной теории упругости для трещин в неограниченной среде.

### Численное решение вспомогательного уравнения

Используя новое представление ядра (24) основного интегрального уравнения (10), по-

следнее переписывается в следующей безразмерной форме ( $c = a = 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_2^2} \iint_{S_0} h(\eta, \zeta) \left\{ \Phi_r(y - \eta, z - \zeta) + \right. \\ \left. + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi[(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2]^{3/2}} \right\} d\eta d\zeta = 1, \\ \Phi_r(y, z) = -2(k_2^2 - k_1^2)I_r(y, z) + K_r(y, z), \\ (y, z) \in S_0. \quad (25) \end{aligned}$$

Для обеспечения устойчивого счета в представленных численных расчетах используются дискретные квадратурные формулы для двумерных гипер-сингулярных ядер, известные как «метод дискретных вихрей» [15], где доказано, что при дискретизации уравнения (25) устойчивое поведение гиперсингулярных ядер достигается за счет выбора двух различных сеток узлов для «внутренних» переменных  $\eta, \zeta$  и «внешних»  $y, z$ . Более точно, если разделить интервал интегрирования  $(-b, b)$  на  $N_1$  равных малых подынтервалов и интервал  $(-d, d)$  — на  $N_2$  подынтервалов, «внутренние» узлы по каждой из декартовых координат  $y$  и  $z$  взять точно в концах соответствующих подынтервалов, тогда «внешние» узлы следует брать каждый раз в середине между двумя соседними «внутренними» узлами:

$$\begin{aligned} \eta_k &= -b + k\varepsilon_1, \quad y_l = -b + (l - 1/2)\varepsilon_1, \\ \varepsilon_1 &= 2b/N_1, \\ \zeta_m &= -d + m\varepsilon_2, \quad z_p = -d + (p - 0.5)\varepsilon_2, \\ \varepsilon_2 &= 2d/N_2, \\ k &= 0, \dots, N_1, \quad l = 1, \dots, N_1, \\ m &= 0, \dots, N_2, \quad p = 1, \dots, N_2. \end{aligned}$$

Такая дискретизация в (25) означает

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_2^2} \sum_{k=1}^{N_1} \sum_{m=1}^{N_2} h(\eta_k, \zeta_m) \times \\ \times \left\{ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Phi_r(y_l - \eta_k, z_p - \zeta_m) + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi} \times \right. \\ \left. \times \int_{\eta_{k-1}}^{\eta_k} \int_{\zeta_{m-1}}^{\zeta_m} \frac{d\eta d\zeta}{[(y_l - \eta)^2 + (z_p - \zeta)^2]^{3/2}} \right\} = 1. \quad (26) \end{aligned}$$

В [15] показано, что интегрирование гиперсингулярных ядер в (26) может быть представлено, используя стандартные первообразные, так же, как и для обычных непрерывных функций. Для двойного интеграла используется следующий табличный интеграл:

$$\iint \frac{d\eta d\zeta}{[(y_l - \eta)^2 + (z_p - \zeta)^2]^{3/2}} = -\frac{\sqrt{(y_l - \eta)^2 + (z_p - \zeta)^2}}{(y_l - \eta)(z_p - \zeta)}.$$

В результате уравнение (26) сводится в дискретной форме к следующей системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_2^2} \sum_{k,m=1}^N h(\eta_k, \zeta_m) \{ \varepsilon_1 \varepsilon_2 \Phi_r(y_l - \eta_k, z_p - \zeta_m) + \\ + \frac{k_2^2 - k_1^2}{2\pi} \left[ \frac{\sqrt{(\eta_k - y_l)^2 + (\zeta_{m-1} - z_p)^2}}{(\eta_k - y_l)(\zeta_{m-1} - z_p)} - \right. \\ - \frac{\sqrt{(\eta_k - y_l)^2 + (\zeta_m - z_p)^2}}{(\eta_k - y_l)(\zeta_m - z_p)} + \\ + \frac{\sqrt{(\eta_{k-1} - y_l)^2 + (\zeta_m - z_p)^2}}{(\eta_{k-1} - y_l)(\zeta_m - z_p)} - \\ \left. - \frac{\sqrt{(\eta_{k-1} - y_l)^2 + (\zeta_{m-1} - z_p)^2}}{(\eta_{k-1} - y_l)(\zeta_{m-1} - z_p)} \right] \} = 1. \end{aligned}$$

В [15] доказывается, что применяемый метод дискретных вихрей автоматически обеспечивает требуемое условие того, что раскрытие трещины должно стремиться к нулю с приближением к внешней границе, к периметру области  $S_0$ . В исходной непрерывной форме (9) это следует из качественных свойств соответствующих гиперсингулярных уравнений. В дискретной форме это обеспечивается применяемым численным методом [15].

Некоторые примеры расчетов представлены на рис. 2–4, для квадратных трещин при соотношении скоростей в упругом материале  $c_p/c_s = 1,870$ . Все графики отражают поведение коэффициента прохождения  $|T|$  в зависимости от параметра частоты  $ak_2/\pi$ . Различные кривые соответствуют различным относительным размерам трещины при  $D_1 = D_2$  (рис. 2). Коэффициент прохождения для различных периодических систем при нескольких фиксированных значениях относительного размера трещины  $b/a$  изображен на рис. 3,

где сохранено условие  $D_1 = D_2$ . Рис. 4 отражает различие в поведении коэффициента в случае регулярной ( $D_1 = D_2$ ) и нерегулярной геометрии, когда  $D_1$  задано, а  $D_2$  принимает несколько значений, включая случай  $D_1 = D_2$ .

## Заключение

Полученные результаты анализируются на предмет свойств акустического фильтра метаматериалов, обладающих внутренней периодической геометрической структурой, как описано во введении.

1. Из рис. 2 следует, что подавление коэффициента прохождения  $|T(ak_2/\pi)|$  на двух частотных интервалах, где действительно имеет место явление запираания, проявляется сильнее с увеличением относительного размера трещины. Диапазоны частот запираания расположены в верхней и средней части одномодового интервала, что происходит при среднем ( $b/a = 0,6$  и  $b/a = 0,8$ ) и большом ( $b/a = 0,95$ ) размере трещины. Из этого рисунка также можно сделать вывод, для больших трещин верхний интервал частот запираания является более длинным, а свойство фильтра более характерным. Полное запираание достигается только для относительно крупных трещин.

2. Учитывая, что период решетки вдоль обоих направлений составляет  $2a = 2c$ , из рис. 3 неожиданно следует вывод, что свойство лучшей фильтрации на верхнем интервале одномодового диапазона при условии  $D_1 = D_2$  достигается в случае, когда период решетки вдоль всех трех направлений одинаков:  $D_1/a = D_2/a = 2,0, \Rightarrow D_1 = D_2 = 2a$ , (см. кривую 3).

3. При фиксированных значениях параметров  $b/a$  и  $D_1/a$  и изменяющихся значениях  $D_2/a$ , графики функции  $|T(ak_2/\pi)|$  снова демонстрируют наличие акустического фильтра (рис. 4). Регулярная система ( $D_1 = D_2$ , кривая 1) демонстрирует абсолютную фильтрацию. Нерегулярные системы (кривые 2–4) тоже обладают этим свойством, но в менее выраженной форме. Именно, интервалы частот запираания являются более узкими по сравнению со случаем  $D_1 = D_2$ . Это еще раз подтверждает вывод 2 о том, что регулярная геометрия решетки приводит к наиболее выраженным свойствам фильтрации.

4. Интересно оценить эффект от перемены местами значений параметров  $D_1$  и  $D_2$ . Интуитивно кажется, что коэффициенты прохож-

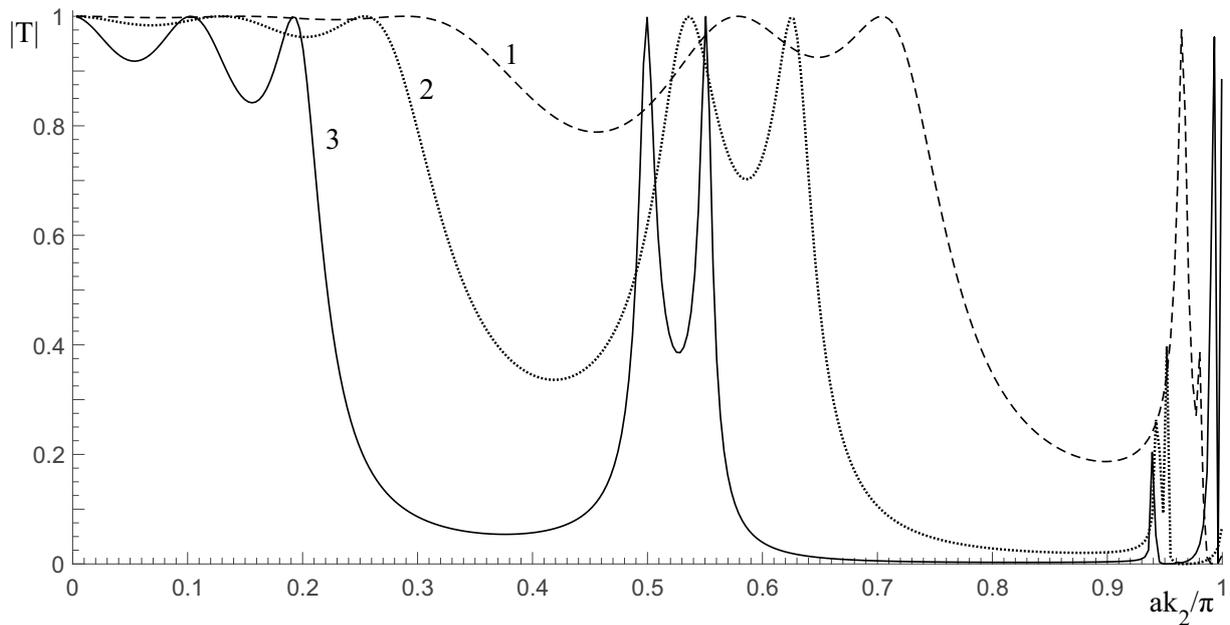


Рис. 2. Зависимость коэффициента прохождения от частоты для разных размеров трещин:  $b = d$ ,  $a = c$ ,  $c_p/c_s = 1,870$ ,  $D_1/a = D_2/a = 4$ , кривая 1 —  $b/a = 0,6$ , кривая 2 —  $b/a = 0,8$ , кривая 3 —  $b/a = 0,95$

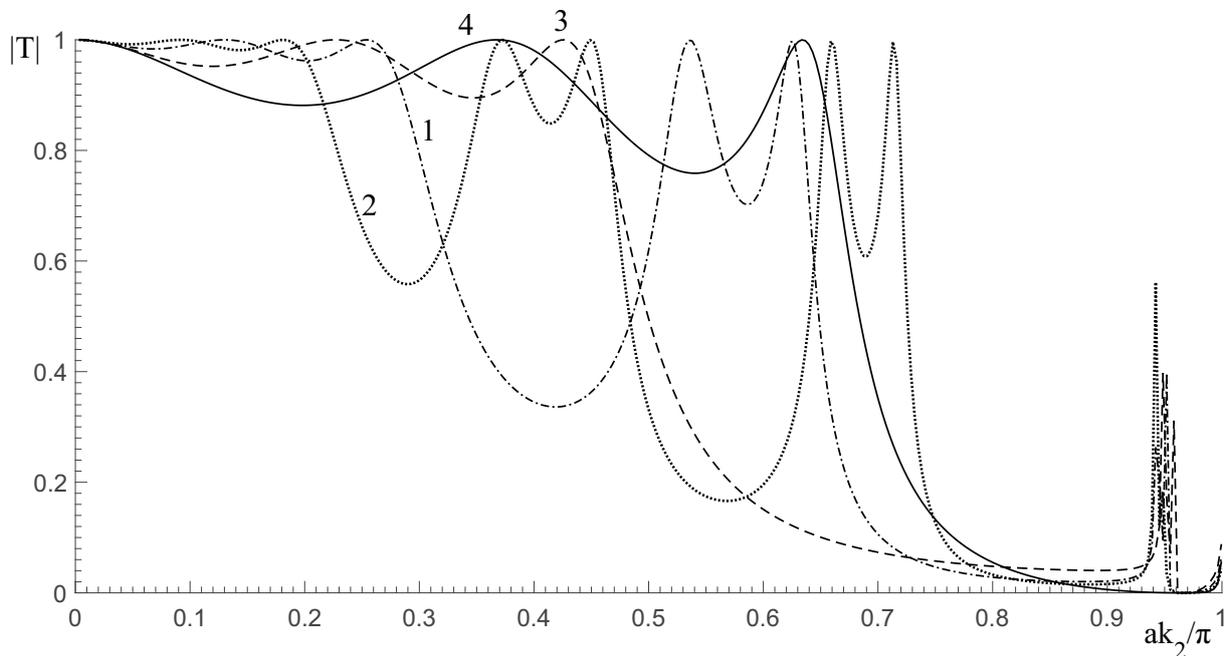


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения от частоты для разных расстояний между параллельными массивами трещин:  $b = d$ ,  $a = c$ ,  $c_p/c_s = 1,870$ ,  $b/a = 0,8$ , кривая 1 —  $D_1/a = D_2/a = 4,0$ , кривая 2 —  $D_1/a = D_2/a = 6,0$ , кривая 3 —  $D_1/a = D_2/a = 2,0$ , кривая 4 —  $D_1/a = D_2/a = 1,0$

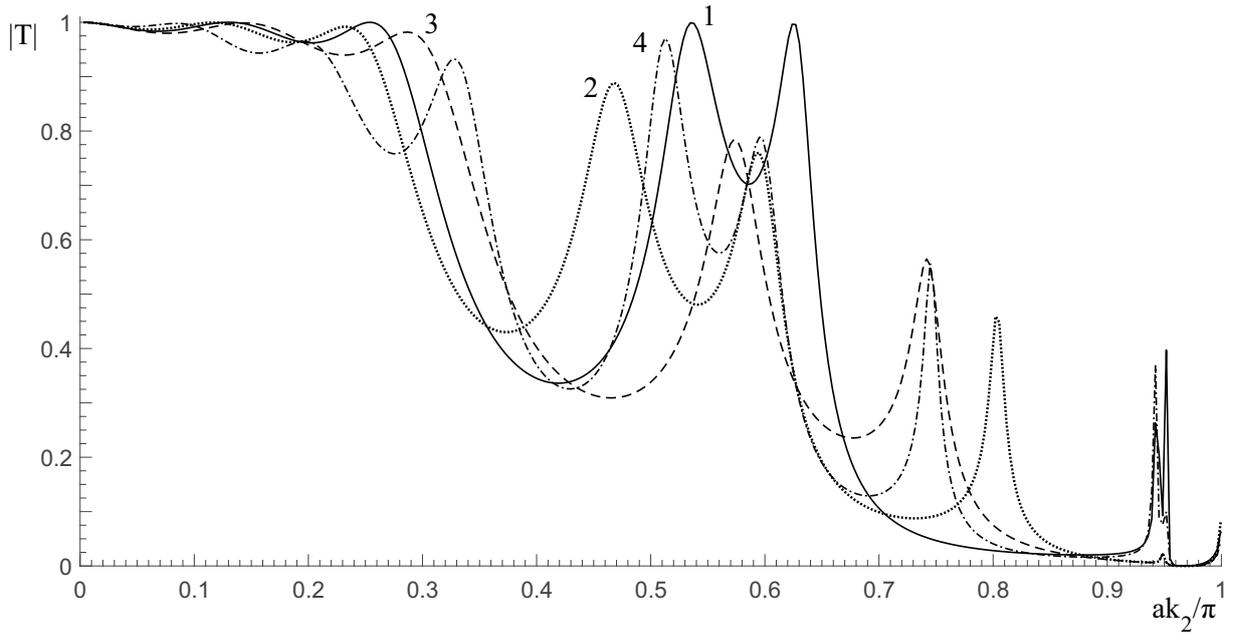


Рис. 4. Зависимость коэффициента прохождения от частоты для разных соотношений между соседними расстояниями  $D_1$  и  $D_2$ :  $b = d$ ,  $a = c$ ,  $c_p/c_s = 1,870$ ,  $b/a = 0,8$ ,  $D_1/a = 4,0$ , кривая 1 —  $D_2/a = 4,0$ , кривая 2 —  $D_2/a = 5,0$ , кривая 3 —  $D_2/a = 3,0$ , кривая 4 —  $D_2/a = 8,0$

дения и отражения должны сохранять свои значения при такой замене. Однако этот физически понятный вывод может быть строго доказан на основе приведенных выше математических формул.

Из вышеизложенного следует, что реальный интервал подавления коэффициента прохождения находится в верхней части одномодового диапазона частот. Подчеркнем, что свойство акустического фильтра более выражено для правильной геометрии решетки с одинаковыми периодами по всем трем направлениям.

Метод, разработанный в настоящей работе, позволяет решать и более сложные волновые задачи, когда число вертикальных массивов, содержащих рассматриваемую систему трещин, может быть больше трех.

### Приложение. К выводу основного интегрального уравнения

Из (7a), (7b) непосредственно следует, что компоненты  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  непрерывны при пересечении плоскостей  $x = 0$ ,  $D_1$ ,  $D_1 + D_2$  для всех  $(y, z)$ . Ортогональность тригонометрических функций сводит условия непрерывности напряжений к соотношениям, которые для

$x = 0$  имеют следующий вид:

$$\sum_{n+j>0} \cos(a_n y) \cos(c_j z) \times \{ \alpha [A_{nj} - H_{nj}^1 \text{ch}(q_{nj} D_1)] + [B_{nj}^3 - Y_{nj}^1 \text{ch}(r_{nj} D_1)] r_{nj} a_n - [B_{nj}^2 - Q_{nj}^1 \text{ch}(r_{nj} D_1)] r_{nj} c_j \} - (R - F_0^1 - H_0^1 \cos(k_1 D_1)) k_2^2 / 2 = 0, \quad (29a)$$

$$\sum_{n+j>0} \sin(a_n y) \cos(c_j z) \times \{ [A_{nj} + H_{nj}^1 \text{sh}(q_{nj} D_1)] q_{nj} a_n + [B_{nj}^3 + Y_{nj}^1 \text{sh}(r_{nj} D_1)] a_n^2 - [B_{nj}^3 + Y_{nj}^1 \text{sh}(r_{nj} D_1)] k_2^2 / 2 - [B_{nj}^2 + Q_{nj}^1 \text{sh}(r_{nj} D_1)] a_n c_j \} = 0, \quad (29b)$$

$$\sum_{n+j>0} \cos(a_n y) \sin(c_j z) \times \{ [A_{nj} + H_{nj}^1 \text{sh}(q_{nj} D_1)] q_{nj} c_j - [B_{nj}^2 + Q_{nj}^1 \text{sh}(r_{nj} D_1)] c_j^2 + [B_{nj}^2 + Q_{nj}^1 \text{sh}(r_{nj} D_1)] k_2^2 / 2 + [B_{nj}^3 + Y_{nj}^1 \text{sh}(r_{nj} D_1)] a_n c_j \} = 0, \quad (29c)$$

Остальные 6 условий непрерывности напряжений, соответствующих  $x = D_1$ ,  $D_1 + D_2$ ,

для краткости опускаем. Прямое интегрирование полученных соотношений по области  $S_0$  дает следующие 3 уравнения:

$$R - F_0^1 - H_0^1 \cos(k_1 D_1) = 0, \quad (30a)$$

$$F_0^1 \cos(k_1 D_1) - F_0^2 + H_0^1 - H_0^2 \cos(k_1 D_2) = 0, \quad (30b)$$

$$-F_0^2 \cos(k_1 D_2) - H_0^2 + T = e^{ik_1 2(D_1+D_2)}, \quad (30c)$$

которые вместе с (6a), (6b), (6c) образуют линейную систему алгебраических уравнений относительно неизвестных  $R, F_0^1, H_0^1, F_0^2, H_0^2, T$ .

Таким образом, соотношения (29) и (6d), (6e), (6f) приводят к системе

$$E_2 \gamma_0 \beta + E_6 a_n r_{nj} - E_5 c_j r_{nj} = 0, \quad (31a)$$

$$E_1 q_{nj} a_n \alpha + E_7 \left( a_n^2 - \frac{k_2^2}{2} \right) - E_4 c_j a_n = 0, \quad (31b)$$

$$E_1 q_{nj} c_j \alpha - E_4 \left( c_j^2 - \frac{k_2^2}{2} \right) + E_7 c_j a_n = 0, \quad (31c)$$

$$E_1 q_{nj} \alpha + E_7 a_n - E_4 c_j = \frac{2\delta_{nj}}{ac \operatorname{sh}(r_{nj} D_1)} \times \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (31d)$$

$$-E_2 a_n \beta + E_5 \frac{a_n c_j}{r_{nj}} - E_6 \left( r_{nj} - \frac{c_j^2}{r_{nj}} \right) = 0, \quad (31e)$$

$$-E_2 c_j \beta - E_6 \frac{a_n c_j}{r_{nj}} + E_5 \left( r_{nj} - \frac{a_n^2}{r_{nj}} \right) = 0. \quad (31f)$$

Здесь новые коэффициенты  $E_m, m = 1, \dots, 7$  и  $\gamma_0, \alpha, \beta$  определяются по формулам

$$E_1 = A_{nj} / \operatorname{sh}(q_{nj} D_1) + H_{nj}^1,$$

$$E_2 = A_{nj} / \operatorname{ch}(q_{nj} D_1) - H_{nj}^1,$$

$$E_3 = B_{nj}^1 / \operatorname{ch}(r_{nj} D_1) - P_{nj}^1,$$

$$E_4 = B_{nj}^2 / \operatorname{sh}(r_{nj} D_1) + Q_{nj}^1,$$

$$E_5 = B_{nj}^2 / \operatorname{ch}(r_{nj} D_1) - Q_{nj}^1,$$

$$E_6 = B_{nj}^3 / \operatorname{ch}(r_{nj} D_1) - Y_{nj}^1,$$

$$E_7 = B_{nj}^3 / \operatorname{sh}(r_{nj} D_1) + Y_{nj}^1,$$

$$\gamma_0 = \frac{k_1^2}{2} \left[ \left( 2 - \frac{k_2^2}{k_1^2} \right) + q_{nj}^2 \right],$$

$$\alpha = \operatorname{sh}(q_{nj} D_1) / \operatorname{sh}(r_{nj} D_1),$$

$$\beta = \operatorname{ch}(q_{nj} D_1) / \operatorname{ch}(r_{nj} D_1). \quad (32)$$

Кроме того, равенство (4) предполагает

$$E_5 a_n + E_6 c_j - E_3 r_{nj} = 0. \quad (33)$$

Очевидно, что уравнения (31) представляет систему порядка  $6 \times 6$  линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $E_m, m = 1, \dots, 6$ , которая распадается на две независимые алгебраические системы порядка  $3 \times 3$ , разрешив которые получаем шесть неизвестных постоянных  $A_{nj}, B_{nj}^2, B_{nj}^3, H_{nj}^1, Q_{nj}^1, Y_{nj}^1$  и затем из уравнений (6a), (6b), (6c) и (29) —  $R, F_0^1, H_0^1, F_0^2, H_0^2, T$ :

$$A_{nj} / \operatorname{sh}(q_{nj} D_1) = H_{nj}^1 = \alpha_1 \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (34a)$$

$$B_{nj}^2 / \operatorname{sh}(r_{nj} D_1) = Q_{nj}^1 = \beta_1 \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (34b)$$

$$B_{nj}^3 / \operatorname{sh}(r_{nj} D_1) = Y_{nj}^1 = \gamma_1 \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) \cos(a_n \eta) \cos(c_j \zeta) d\eta d\zeta, \quad (34c)$$

$$R = -\frac{1}{8iack_1} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta - \frac{e^{ik_1 D_1}}{8iack_1} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) d\eta d\zeta - \frac{e^{ik_1(D_1+D_2)}}{8iack_1} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \quad (34d)$$

$$T = -\frac{e^{ik_1(D_1+D_2)}}{8iack_1} \int_{S_0} g_x^1(\eta, \zeta) d\eta d\zeta - \frac{e^{ik_1D_2}}{8iack_1} \int_{S_0} g_x^2(\eta, \zeta) d\eta d\zeta - \frac{1}{8iack_1} \int_{S_0} g_x^3(\eta, \zeta) d\eta d\zeta + e^{ik_1(D_1+D_2)}, \quad (34e)$$

где

$$\alpha_1 = \frac{[k_2^2 - 2(a_n^2 + c_j^2)] \delta_{nj}}{k_2^2 q_{nj} a c \operatorname{sh}(q_{nj} D_1)},$$

$$\beta_1 = -\frac{2c_j \delta_{nj}}{k_2^2 a c \operatorname{sh}(r_{nj} D_1)}, \quad \gamma_1 = \frac{2a_n \delta_{nj}}{k_2^2 a c \operatorname{sh}(r_{nj} D_1)}.$$

Формулы для  $F_0^1, H_0^1, F_0^2, H_0^2$  для краткости опускаем. Решения соответствующих систем для  $x = D_1$  и  $x = D_1 + D_2$  получаются аналогично.

### Литература

1. Angel Y. C., Achenbach J. D. Harmonic waves in an elastic solid containing a doubly periodic array of cracks // *Wave Motion*. 1987. Vol. 9. P. 377–385.
2. Scarpetta E., Sumbatyan M. A. On wave propagation in elastic solids with a doubly periodic array of cracks // *Wave Motion*. 1997. Vol. 25. P. 61–72.
3. Zarrillo G., Aguiar K. Closed-form low frequency solutions for electromagnetic waves through a frequency selective surface // *IEEE Trans. Anten.* 1998. Vol. AP-35. P. 1406–1417.
4. Angel Y. C., Bolshakov A. In-plane waves in an elastic solid containing a cracked slab region // *Wave Motion*. 2000. Vol. 31. P. 297–315.
5. Mykhas'kiv V. V., Zhabdynskiy I. Ya., Zhang Ch. Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks // *J. Math. Sci.* 2014. Vol. 203. P. 114–122.
6. Liu J., Li L., Xia B., Man X. Fractal labyrinthine acoustic metamaterial in planar lattices // *Int. J. Solids Struct.* 2018. Vol. 132–133. P. 20–30.
7. Scarpetta E., Tibullo V. On the three-dimensional wave propagation through cascading screens having a periodic system of arbitrary openings // *Int. J. Eng. Sci.* 2008. Vol. 46. P. 105–111.
8. Remizov M. Yu., Sumbatyan M. A. On 3D theory of acoustic metamaterials with a triple-periodic system of interior obstacles // *Proc. of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*. 2017. Vol. 70. Iss. 4. P. 35–49.
9. Liu Z., Zhang X., Mao Y. Locally resonant sonic materials // *Science*. 2000. No. 289(5485). P. 1734–1736.

10. Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В. О трещинах в покрытиях в статических задачах сейсмологии и наноматериалов // *ДАН*. 2013. № 453(2). С. 162–166.
11. Glushkov Ye. V., Glushkova N. V., Golub M. V., Bostrom A. E. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack // *J. Acoust. Soc. Am.* 2006. Vol. 119. Iss. 6. P. 3589–3598.
12. Craster R. V. Guenneau S. Acoustic metamaterials. Springer series in materials science. Dordrecht: Springer, 2013. 166 p.
13. Golub M. V., Doroshenko O. V., Bostrom A. E. Transmission of elastic waves through an interface between dissimilar media with random and periodic distributions of strip-like microcracks // *Materials Physics and Mechanics*. 2018. Vol. 37. P. 52–59.
14. Бабешко В. А., Ратнер С. В., Сыромятников П. В. Анизотропные тела с неоднородностями; случай совокупности трещин // *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2007. № 5. С. 49–59.
15. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике. М.: Наука, 1985.

### References

1. Angel Y. C., Achenbach J. D. Harmonic waves in an elastic solid containing a doubly periodic array of cracks. *Wave Motion*, 1987, vol. 9, pp. 377–385.
2. Scarpetta E., Sumbatyan M. A. On wave propagation in elastic solids with a doubly periodic array of cracks. *Wave Motion*, 1997, vol. 25, pp. 61–72.
3. Zarrillo G., Aguiar K. Closed-form low frequency solutions for electromagnetic waves through a frequency selective surface. *IEEE Trans. Anten.*, 1998, vol. AP-35, pp. 1406–1417.
4. Angel Y. C., Bolshakov A. In-plane waves in an elastic solid containing a cracked slab region. *Wave Motion*, 2000, vol. 31, pp. 297–315.
5. Mykhas'kiv V. V., Zhabdynskiy I. Ya., Zhang Ch. Dynamic stresses due to time-harmonic elastic wave incidence on doubly periodic array of penny-shaped cracks. *J. Math. Sci.*, 2014, vol. 203, pp. 114–122.
6. Liu J., Li L., Xia B., Man X. Fractal labyrinthine acoustic metamaterial in planar lattices. *Int. J. Solids Struct.*, 2018, vol. 132–133, pp. 20–30.
7. Scarpetta E., Tibullo V. On the three-dimensional wave propagation through cascading screens having a periodic system of arbitrary openings. *Int. J. Eng. Sci.*, 2008, vol. 46, pp. 105–111.

8. Remizov M. Yu., Sumbatyan M. A. On 3D theory of acoustic metamaterials with a triple-periodic system of interior obstacles. *Proc. of National Academy of Sciences of Armenia. Mechanics*, 2017, vol. 70, iss. 4, pp. 35–49.
9. Liu Z., Zhang X., Mao Y. Locally resonant sonic materials. *Science*, 2000, no. 289(5485), pp. 1734–1736.
10. Babeshko V. A., Babeshko O. M., Evdokimova O. V. O treshchinakh v pokrytiyakh v staticheskikh zadachakh seysmologii i nanomaterialav [About the cracks in the coatings in static problems of seismology and nanomaterials]. *Doklady of Russian Academy of Science*, 2013, no 453, iss. 2, pp. 162–166. (In Russian)
11. Glushkov Ye. V., Glushkova N. V., Golub M. V., Bostrom A. E. Natural resonance frequencies, wave blocking, and energy localization in an elastic half-space and waveguide with a crack. *J. Acoust. Soc. Am.*, 2006, vol. 119, iss. 6, pp. 3589–3598.
12. Craster R. V. Guenneau S. *Acoustic metamaterials*. Springer series in materials science. Dordrecht: Springer, 2013, 166 p.
13. Golub M. V., Doroshenko O. V., Bostrom A. E. Transmission of elastic waves through an interface between dissimilar media with random and periodic distributions of strip-like micro-cracks. *Materials Physics and Mechanics*, 2018, vol. 37, pp. 52–59.
14. Babeshko V. A., Ratner S. V., Syromyatnikov P. V. Anizotropnye tela s neodnorodnostyami; sluchay sovokupnosti treshchin [Anisotropic bodies with inhomogeneities, the case of a set of cracks]. *News of wounds. Solid mechanics*, 2007, no. 5, pp. 49–59. (In Russian)
15. Belotserkovsky S. M. Lifanov I. K. *Chislennyye metody v singulyarnykh integral'nykh uravneniyakh i ikh primenenie v aerodinamike, teorii uprugosti, elektrodinamike* [Numerical methods in singular integral equations and their application in aerodynamics, elasticity theory, electrodynamics]. Nauka, Moscow, 1985. (In Russian)