

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-15-4-54-66

## ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА, ВОЗБУЖДАЕМОГО ПОВЕРХНОСТНЫМ ИЛИ ЗАГЛУБЛЕННЫМ ПОДВИЖНЫМ ОСЦИЛЛИРУЮЩИМ ИСТОЧНИКОМ КОЛЕБАНИЙ

Сыромятников П. В., Васильченко А. А., Лапина О. Н., Никитин Ю. Г.

DYNAMIC CHARACTERISTICS OF INHOMOGENEOUS HALF-SPACE, EXCITED BY A SURFACE OR INTERNAL MOVING SOURCE OF OSCILLATIONS

P. V. Syromyatnikov<sup>1, 2</sup>, A. A. Vasilchenko<sup>2</sup>, O. N. Lapina<sup>2</sup>, Yu. G. Nikitin<sup>2</sup><sup>1</sup> Federal Research Center Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, 344006, Russia<sup>2</sup> Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia  
e-mail: syromyatnikov\_pv@mail.ru

*Abstract.* The oscillations of a single-layer half-space excited by an oscillating moving source of oscillations are studied numerically. Layer and half-space have contrasting mechanical properties. The problem is considered in a flat formulation, the behavior of the amplitude of the oscillations of the stamp is investigated either on the surface of the layer or on the half-space level depending on the frequency of oscillations and the speed of movement. Surface, internal, vertical and horizontal sources, two components of displacements are considered. The speed varies from zero to the speed of the fastest longitudinal wave, the frequency varies from zero to several tens of hertz. Homogeneous boundary value problems are solved using the integral Fourier transform, the algorithm for constructing the symbol of the block Green matrix, and the numerical method for calculating Fourier integrals. The calculations of eighteen amplitude-frequency characteristics and amplitude-speed characteristics of the oscillations of the stamp are presented. Analysis of the calculations showed that for the region of low frequencies and velocity values that are less than the velocity of the transverse wave for the upper layer, the most dramatic changes in characteristics occur. The maximum amplitudes correspond to zero frequency and the Rayleigh velocity in the layer, somewhat smaller amplitude values are associated with the Rayleigh velocity in the half-space. The amplitudes of vertical displacements caused by a vertical source have the largest range of variation. Their range exceeds by several decimal orders the corresponding ranges for horizontal displacements.

*Keywords:* single-layer elastic half-space, mobile oscillating source, amplitude-frequency and amplitude-speed characteristic, numerical integration.

## Введение

Внимание к исследованию скоростного движения по поверхности или внутри упруго тела в значительной степени определяется общемировой тенденцией развития высокоскоростного наземного и подземного железнодорожного транспорта [1]. Как правило,

скоростное движение исследуется с помощью различных вариантов метода конечного и граничного элемента [2–5], однако данные методы эффективны только в конечных областях и могут требовать значительных вычислительных ресурсов. Другие подходы, основанные, например, на построении фундаменталь-

Сыромятников Павел Викторович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математики и механики краснодарского отделения Южного научного центра РАН, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov\_pv@mail.ru.

Васильченко Александр Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры радиофизики и нанотехнологий Кубанского государственного университета; e-mail: a\_vas2002@mail.ru.

Лапина Ольга Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: olga\_ln@mail.ru.

Никитин Юрий Геннадиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики и компьютерных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: yug@fpm.kubsu.ru.

Работа выполнена в рамках реализации Госзадания ЮНЦ РАН на 2018 г. (проект 01201354241) при частичной поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края (проект 16-48-230336 p\_a).

ных решений, встречаются значительно реже [6–9]. Между задачами с движущимся и неподвижным источником возмущений существуют глубокие внутренние связи [7], что позволяет применять к задачам с подвижным источником некоторые подходы и методы решения задач, разработанных ранее для неподвижного источника [6, 7]. Помимо этого, выраженная специфика задач высокоскоростного движения требует разработки новых, более экономичных и точных методов.

Данная работа продолжает цикл исследований [8, 9] по численному моделированию (в зависимости от частоты колебаний, скорости движения, и прочих параметров задачи) амплитудно-частотных и амплитудно-скоростных характеристик (АЧСХ) системы «упругая многослойная среда – осциллирующий поверхностный или заглубленный подвижный источник». Данная характеристика дает ценную информацию о динамических свойствах решения краевой задачи, наглядно показывает локализацию неограниченных или ограниченных резонансов и антирезонансов, участках монотонности, определяет численные значения амплитуд. В случае сосредоточенного источника эта характеристика описывает соответствующее фундаментальное решение. При ненулевых размерах она характеризует меру взаимодействия источника с упругой средой.

Точный расчет АЧСХ в случае источника ненулевых размеров требует решения смешанной контактной задачи, что на сегодняшний день технически весьма сложно [7]. Решение соответствующей однородной краевой задачи, описываемой ниже, дает приближенное значение осредненной амплитуды колебаний невесомого жесткого штампа или невесомого жесткого тонкого включения. Кроме того, расчеты показали, что решения соответствующих двумерных и трехмерных задач качественно очень сходны и количественно могут различаться незначительно. Последнее обстоятельство важно, поскольку расчеты для трехмерной задачи значительно сложнее, чем для двухмерной.

Как и в работах [8, 9], задача решается с помощью интегральных преобразований Фурье, алгоритмов построения символов блочной матриц Грина и метода прямого контурного интегрирования. Большое количество вариантов структуры среды, видов источников, и других параметров приводит к необхо-

димости рассмотрения краевых задач в более узкой постановке, чем для соответствующих однородных сред [8, 9].

### 1. Постановка задачи

В плоской постановке рассматривается составное полупространство, состоящее из изотропного упругого слоя, идеально сцепленного с изотропным полупространством вне области задания внутреннего источника. Слой образован двумя прямыми  $y = y_j : -\infty < y_2 < y_1 = 0$ , в декартовой системе координат  $\{x_1, x_2\} = \{x, y\}$  слой занимает объем  $-\infty < x < \infty, y_2 \leq y \leq y_1$ , полупространство  $-\infty \leq y \leq y_2$ . Параметры Ламе  $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$ , плотности  $\rho^{(n)}$  верхнего слоя и подстилающего полупространства могут быть различными. Значение  $n = 1$  соответствует верхнему слою,  $n = 2$  — полупространству. Векторы перемещений в упругой среде  $\mathbf{u}^{(n)} = \{u_1^{(n)}, u_2^{(n)}\}^T$  должны удовлетворять уравнениям Ламе

$$(\lambda^{(n)} + \mu^{(n)}) \frac{\partial \operatorname{div}(\mathbf{u}^{(n)})}{\partial x_i} + \mu^{(n)} \Delta u_i^{(n)} - \rho \frac{\partial^2 u_i^{(n)}}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

$$i = 1, 2.$$

Здесь  $\Delta$  — оператор Лапласа,  $\lambda^{(n)}, \mu^{(n)}$  — параметры Ламе,  $\rho^{(n)}$  — плотность,  $t$  — время. Гармоническая нагрузка  $q^{(n)} \exp(-i\omega t)$ , заданная на глубине  $y = y_n, n = 1, 2$  в области  $\Omega^{(n)}$ , движется вдоль прямой  $Ox$  с постоянной скоростью  $0 \leq v \leq \max(v_p^{(1)}, v_p^{(2)})$ . В дальнейшем общий экспоненциальный множитель  $\exp(-i\omega t)$  опускается. В подвижной системе координат  $\{\tilde{x}, y\}$

$$\tilde{x} = x - vt, \quad \tilde{y} = y, \quad (1.2)$$

области  $\Omega^{(n)}$  задаются следующим образом:

$$-\frac{L_x^{(n)}}{2} \leq \tilde{x} \leq \frac{L_x^{(n)}}{2}, \quad (1.3)$$

$$y = y_n \leftrightarrow \Omega^{(n)}, \quad n = 1, 2.$$

В случае поверхностного источника  $q_i^{(1)}$  граничные условия следующие:

$$\sigma_{ij}^{(1)}(\tilde{x}, y) = q_i^{(1)}, \quad (1.4)$$

$$i, j = 1, 2, \quad (\tilde{x}, y) \in \Omega^{(1)},$$

$$\sigma_{i2}^{(1)}(\tilde{x}, y) = 0, \quad (\tilde{x}, y) \notin \Omega^{(1)}.$$

В случае заглубленного источника поверхность тела  $y = y_1 = 0$  свободна от механических напряжений

$$\sigma_{i2}^{(1)}(\tilde{x}, y) \Big|_{y=0} = 0, \quad (1.5)$$

$$i = 1, 2; \quad -\infty \leq \tilde{x} \leq \infty.$$

На поверхности раздела полупространства и слоя  $y = y_2$  в области  $\Omega^{(2)}$  заданы условия скачка напряжений, что соответствует жесткому бесконечно тонкому включению

$$\left( \sigma_{ij}^{(1)}(\tilde{x}, y) - \sigma_{ij}^{(2)}(\tilde{x}, y) \right) = q_i^{(2)}, \quad (1.6)$$

$$i, j = 1, 2, \quad (\tilde{x}, y) \in \Omega^{(2)},$$

$$\left( \sigma_{ij}^{(1)}(\tilde{x}, y) - \sigma_{ij}^{(2)}(\tilde{x}, y) \right) = 0, \quad (\tilde{x}, y) \notin \Omega^{(2)}.$$

Для полупространства должны выполняться либо условия излучения [7], либо условия убывания (в области эллиптичности решения)

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \left| \mathbf{u}^{(2)}(\tilde{x}, y) \right| = 0. \quad (1.7)$$

На первом этапе требуется определить смещения  $\mathbf{u}^{(n)}(\tilde{x}, y, v, \omega)$  как функцию координат  $\{\tilde{x}, y\}$ , скорости  $v$ , частоты осцилляций  $\omega$ , значения  $y_2$ , вида источника  $q_j^{(n)}$ , типа граничных условий (1.6)–(1.7), и затем на этой основе рассчитать АЧСХ (формула приводится ниже) исследуемых сред.

### 2. Метод решения

Задачу (1.1)–(1.7) можно рассматривать как специфический случай задачи для неподвижного гармонического источника [6, 7]. Данное обстоятельство позволяет для ее решения использовать некоторые методы и подходы, разработанные для задач с неподвижным источником [7].

Преобразование Фурье  $G(\alpha_1) = F_x [g(x)]$  от функции  $g(x)$  по переменной  $(x)$  с параметром  $(\alpha_1)$  обозначим  $G(\alpha_1)$ . Решение однородных задач (1.1)–(1.7) может быть представлено в виде интеграла Фурье [6–9]

$$u_{jm}^{(n)}(\tilde{x}, y, \omega, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_1} K_{jm}^{(n)}(\alpha_1, y, (\omega - \alpha_1 v)) \times$$

$$\times Q_m^{(n)}(\alpha_1) \exp(-i(\alpha_1 \tilde{x})) d\alpha_1, \quad (2.1)$$

$$j, m, n = 1, 2.$$

Здесь для удобства обозначений у величины смещений  $u_{jm}^{(n)}$  введены три индекса: верхний индекс  $(n = 1)$  соответствует слою,  $(n = 2)$  — полупространству, первый нижний индекс  $(j = 1)$  соответствует горизонтальным смещениям  $u_{1m}^{(n)}$ ,  $(j = 2)$  — вертикальным смещениям  $u_{2m}^{(n)}$ , второй нижний индекс  $(m = 1)$  соответствует горизонтальным нагрузкам  $q_1^{(n)}$ ,  $(m = 2)$  — вертикальным нагрузкам  $q_2^{(n)}$ . Матрица  $\mathbf{K}^{(n)}(\alpha_1, y, \omega) = F_x [\mathbf{k}^{(n)}(x, y, \omega)]$  является образом Фурье блочной матрицы Грина  $\mathbf{k}^{(n)}$  для поверхностных и внутренних (заглубленных) неподвижных источников. Нагрузке  $q_m^{(n)}(\tilde{x})$  в подвижной системе координат соответствует образ Фурье  $Q_m^{(n)}(\alpha_1) = F_{\tilde{x}} [q_m^{(n)}(\tilde{x})]$ . Контур  $\Gamma_1$  в комплексной плоскости  $\{\alpha_1\}$  отклоняется при обходе вещественных полюсов и точек ветвления матрицы  $\mathbf{K}$  в соответствии с принципом предельного поглощения [7].

В формуле (2.1) отличие от соответствующих представлений для неподвижных источников состоит в замене частоты  $\omega$  на выражение  $(\omega - \alpha_1 v)$  в символе матрицы Грина.

Алгоритм построения символа блочной матрицы Грина для однослойного полупространства и методы расчета интеграла (2.1) подробно описаны в работах [8, 9] и здесь не повторяются.

Для установившихся колебаний в зависимости от величины скорости тип уравнений может быть эллиптическим, гиперболическим или смешанным [6].

### 3. Численные результаты

В данной работе исследовались однослойное (составное) полупространство с контрастными механическими параметрами покрывающего слоя и подстилающего полупространства. В численных расчетах рассматривались следующие механические параметры Ламе более жесткого материала:

$$\lambda_h = 2,38833 \times 10^7 \text{ Н/м}^2, \quad (3.1)$$

$$\mu_h = 2,448 \times 10^7 \text{ Н/м}^2,$$

$$\rho_h = 1,7 \cdot 10^3 \text{ Кг/м}^3.$$

Более мягкий материал имеет следующие параметры:

$$\lambda_s = \lambda_h/2, \quad \mu_s = \mu_h/2, \quad \rho_s = \rho_h. \quad (3.2)$$

Здесь и далее буква « $h$ » в индексе относится к жесткому материалу, « $s$ » — к мягкому. Координаты линий раздела везде одинаковы  $y_1 = 0$  м,  $y_2 = -100$  м.

Значениям параметров (3.1)–(3.2) соответствуют следующие скорости поперечных объемных волн  $v_{s,h}$ ,  $v_{s,s}$ , продольных объемных волн  $v_{p,h}$ ,  $v_{p,s}$ , релеевских волн  $v_{r,h}$ ,  $v_{r,s}$  в полупространствах:

$$v_{s,h} = \sqrt{\frac{\mu_h}{\rho_h}} = 120 \text{ м/с}, \quad (3.3)$$

$$v_{p,h} = \sqrt{\frac{\lambda_h + 2\mu_h}{\rho_h}} = 207 \text{ м/с},$$

$$v_{r,h} \approx 110,267 \text{ м/с},$$

$$v_{s,s} = v_{s,h}/\sqrt{2} = 84,853 \text{ м/с},$$

$$v_{p,s} = v_{p,h}/\sqrt{2} = 146,371 \text{ м/с},$$

$$v_{r,s} \approx 77,9708 \text{ м/с}.$$

Характерная скорость, на величину которой нормирована шкала скоростей,  $v_0 = 100$  м/с.

Далее параметры для расчетов и результаты расчетов приводятся в безразмерном виде. Приведем соответствующие величинам (3.1)–(3.3) безразмерные значения

$$v_{s,h} = 1,2, \quad v_{p,h} = 2,07, \quad (3.4)$$

$$v_{r,h} \approx 1,10267,$$

$$v_{s,s} = 0,84853, \quad v_{p,s} = 1,46371,$$

$$v_{r,s} \approx 0,779708,$$

$$\lambda_h = 2,38833, \quad \mu_h = 2,448, \quad \rho_h = 1,7,$$

$$\lambda_s = 1,6888, \quad \mu_s = 1,731, \quad \rho_s = 1,7,$$

$$y_1 = 0, \quad y_2 = -1, \quad \omega = 2\pi f/f_0, \quad f_0 = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Здесь  $\omega$  — безразмерная частота,  $f$  — частота в герцах,  $f_0$  — характерная частота в герцах.

В качестве вертикального (нижний индекс 2) или горизонтального (нижний индекс 1) поверхностного (верхний индекс 1) или заглубленного (верхний индекс 2) подвижного источника  $q_j^{(n)}$  (1.4), (1.6) рассматривались источники

$$q_j^{(n)} = q(\tilde{x}, y)|_{y=y_n} = -1, \quad (3.5)$$

$$n, \quad j = 1, 2, \quad L_x^{(n)} = 0,1.$$

Приведенные далее на рис. 1–6 функции  $\tilde{u}_{ij}^{(n)}$  нормированных амплитуд горизонтальных  $\tilde{u}_{1j}^{(n)}$  и вертикальных  $\tilde{u}_{2j}^{(n)}$  смещений в логарифмическом масштабе

$$\tilde{u}_{ij}^{(n)}(\omega, v) =$$

$$= \lg \left| u_{ij}^{(n)}(\tilde{x}, y, \omega, v) \right|_{\tilde{x}=0, y=y_n} -$$

$$- \lg \left| u_{ij}^{(n)}(\tilde{x}, y, 0, 0) \right|_{\tilde{x}=0, y=y_n}, \quad (3.6)$$

$$n, i, j = 1, 2.$$

рассчитаны по формулам (2.1). Данные величины представляют собой приближенные значения АЧСХ для упругой среды и жесткого невесомого штампа или жесткого невесомого тонкого включения, движущегося со скоростью  $v$  вдоль прямой  $Ox$  на глубине  $y = y_n$  и совершающего колебания с частотой  $\omega$ . Интегралы (2.1) рассчитывались методом прямого контурного интегрирования [8, 9] при введении комплексной частоты  $\omega_\varepsilon = \omega + i\varepsilon$  с малой мнимой частью (в расчетах  $\varepsilon = 10^{-3}$ ) и с использованием программ вычисления интегралов от быстро осциллирующих функций пакета NAG [10].

Перейдем к сравнительному анализу функций  $\tilde{u}_{ij}^{(n)}(\omega, v)$  (3.6), представленных на рис. 1–6 для различных типов источников и конфигураций полупространства. В правой колонке всех рисунков изображены поверхности  $\tilde{u}_{ij}^{(n)}(\omega, v)$ , в левой колонке те же поверхности представлены в виде линий уровня вместе с соответствующими шкалами десятичных порядков. Везде на рисунках букве а) соответствуют горизонтальные или вертикальные смещения на поверхности  $y = y_1 = 0$  однородного полупространства, возбуждаемые поверхностным горизонтальным или вертикальным источником  $q_j^{(1)}$ . Букве б) соответствует те же величины, что и для случая а), но теперь полупространство является составным (жесткий слой на мягком полупространстве или наоборот). Букве в) соответствуют горизонтальные или вертикальные смещения на линии  $y = y_2$  составного полупространства (того же самого, что в рисунке б)), возбуждаемые заглубленным горизонтальным или вертикальным источником  $q_j^{(2)}$ .

Рис. 1 представляет величины горизонтальных смещений  $\tilde{u}_{11}^{(n)}$ , возбуждаемых горизонтальным источником  $q_1^{(n)}$  в однородном

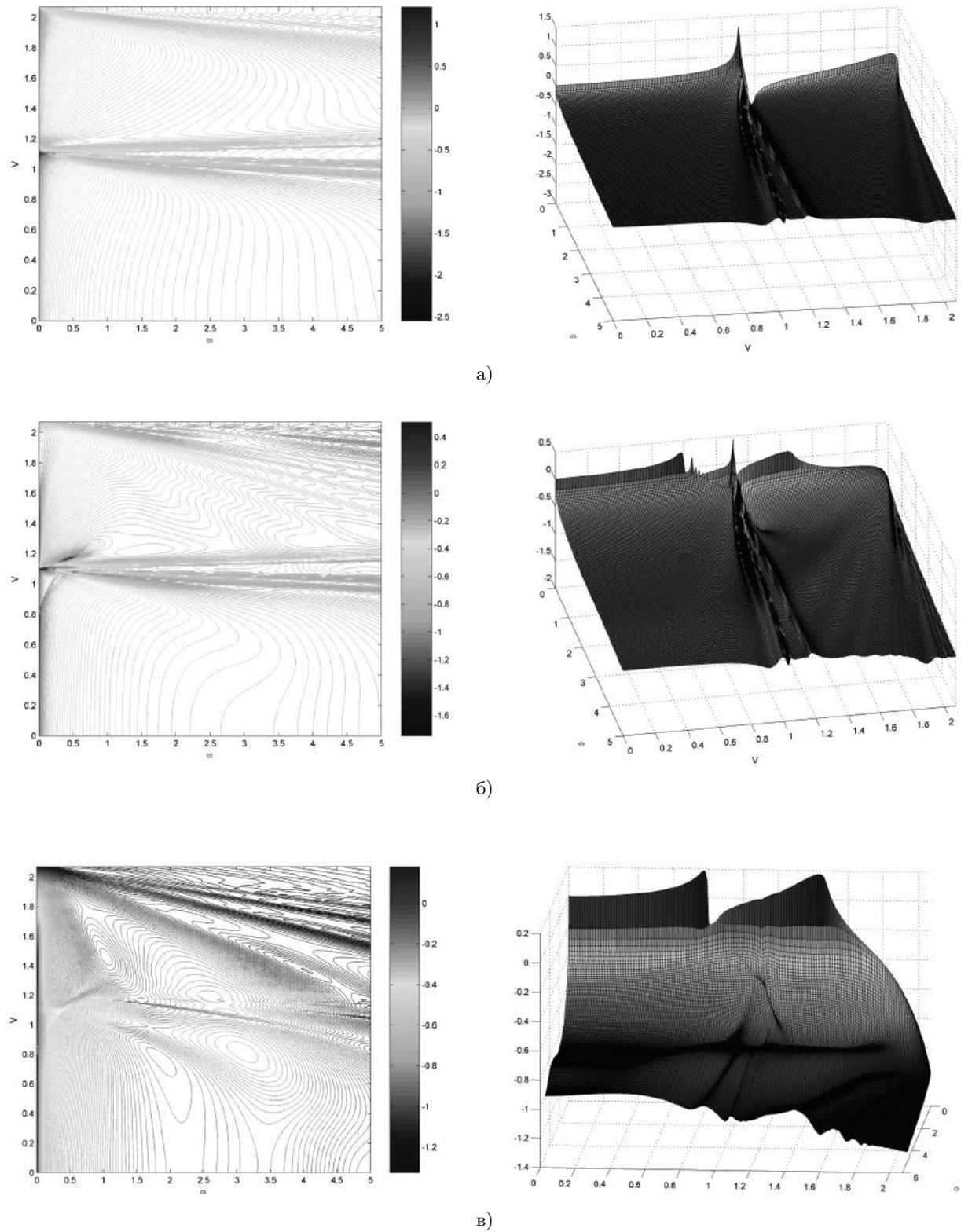
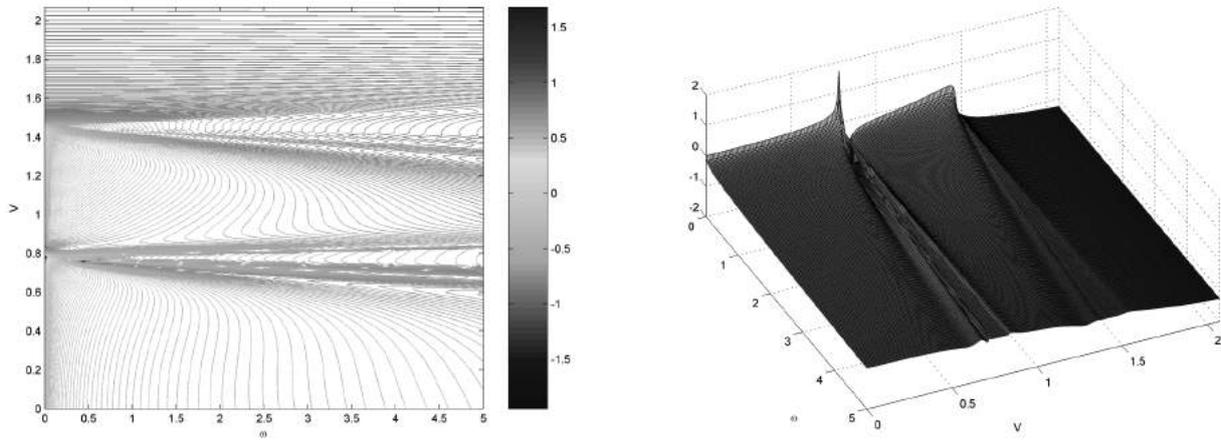
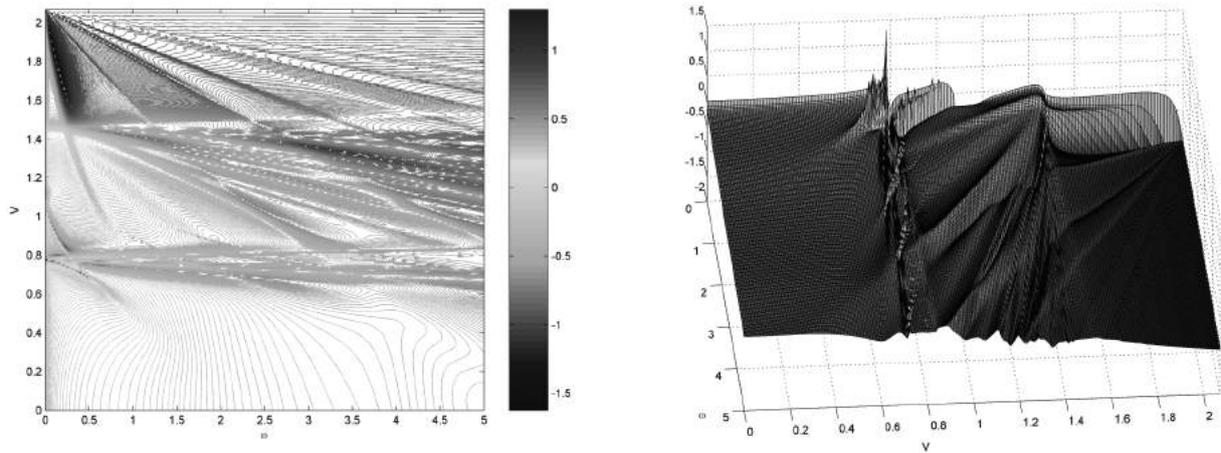


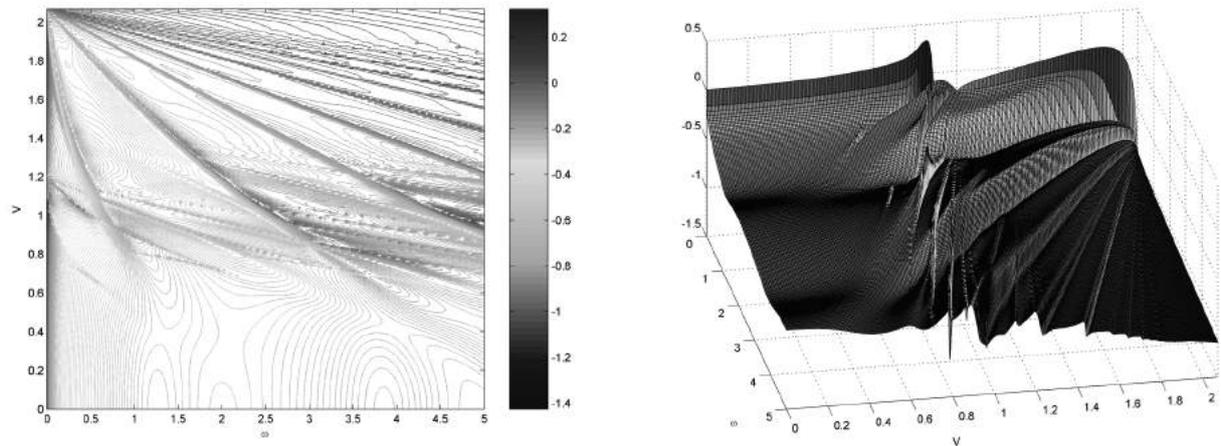
Рис. 1. Вид АЧСХ для  $\tilde{u}_{11}^{(n)}(\omega, v)|_{y=y_n}$ : а)  $\tilde{u}_{11}^{(1)}(\omega, v)|_{y=y_1}$  — однородное полупространство со свойствами жесткого материала, б)  $\tilde{u}_{11}^{(1)}(\omega, v)|_{y=y_1}$  — составное полупространство (верхний слой — жесткий материал, полупространство — мягкий материал), в)  $\tilde{u}_{11}^{(2)}(\omega, v)|_{y=y_2}$  — составное полупространство (верхний слой — жесткий материал, полупространство — мягкий материал)



а)



б)



в)

Рис. 2. Вид для АЧСХ для  $\tilde{u}_{11}^{(n)}(\omega, \nu)|_{y=y_n}$ : а)  $\tilde{u}_{11}^{(1)}(\omega, \nu)|_{y=y_1}$  — однородное полупространство со свойствами мягкого материала, б)  $\tilde{u}_{11}^{(1)}(\omega, \nu)|_{y=y_1}$  — составное полупространство (верхний слой — мягкий материал, полупространство — жесткий материал), в)  $\tilde{u}_{11}^{(2)}(\omega, \nu)|_{y=y_2}$  — составное полупространство (верхний слой — мягкий материал, полупространство — жесткий материал)

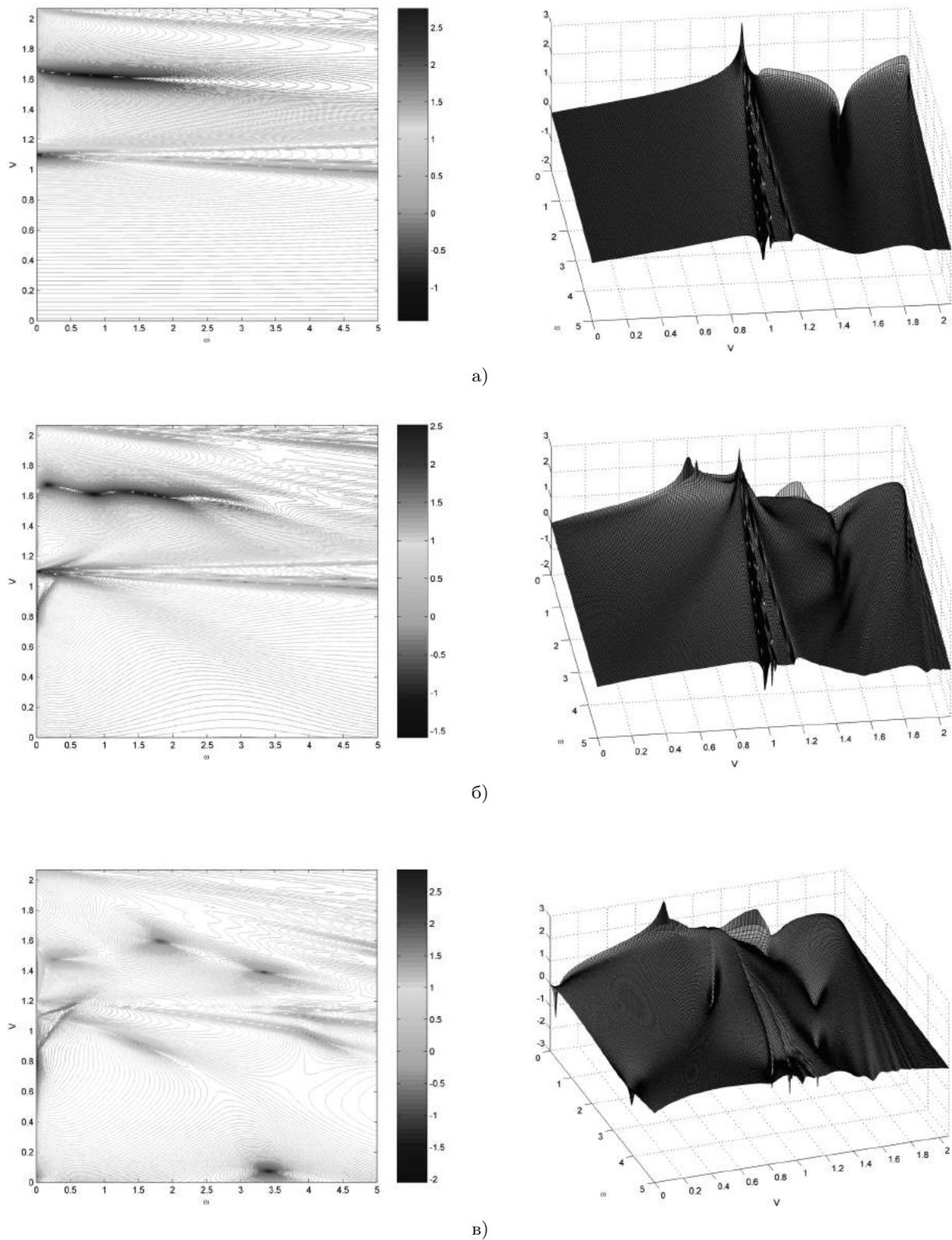


Рис. 3. Вид АЧСХ для  $\tilde{u}_{12}^{(n)}(\omega, v)|_{y=y_n}$ : а)  $\tilde{u}_{12}^{(1)}(\omega, v)|_{y=y_1}$  — однородное полупространство со свойствами жесткого материала, б)  $\tilde{u}_{12}^{(1)}(\omega, v)|_{y=y_1}$  — составное полупространство (верхний слой — жесткий материал, полупространство — мягкий материал), в)  $\tilde{u}_{12}^{(2)}(\omega, v)|_{y=y_2}$  — составное полупространство (верхний слой — жесткий материал, полупространство — мягкий материал)

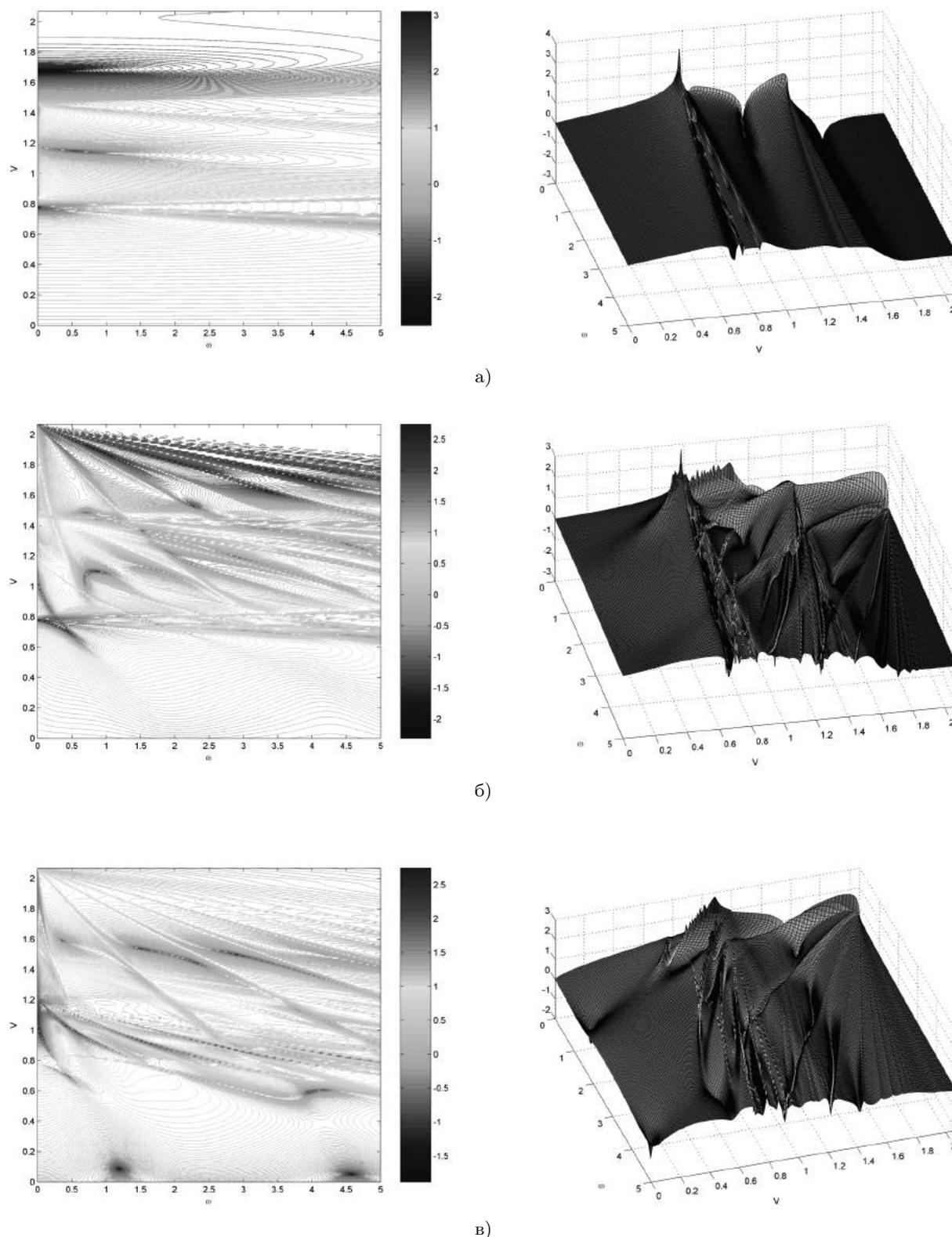


Рис. 4. Вид АЧСХ для  $\tilde{u}_{12}^{(n)}(\omega, \nu)|_{y=y_n}$ : а)  $\tilde{u}_{12}^{(1)}(\omega, \nu)|_{y=y_1}$  — однородное полупространство со свойствами мягкого материала, б)  $\tilde{u}_{12}^{(1)}(\omega, \nu)|_{y=y_1}$  — составное полупространство (верхний слой — мягкий материал, полупространство — жесткий материал), в)  $\tilde{u}_{12}^{(2)}(\omega, \nu)|_{y=y_2}$  — составное полупространство (верхний слой — мягкий материал, полупространство — жесткий материал)

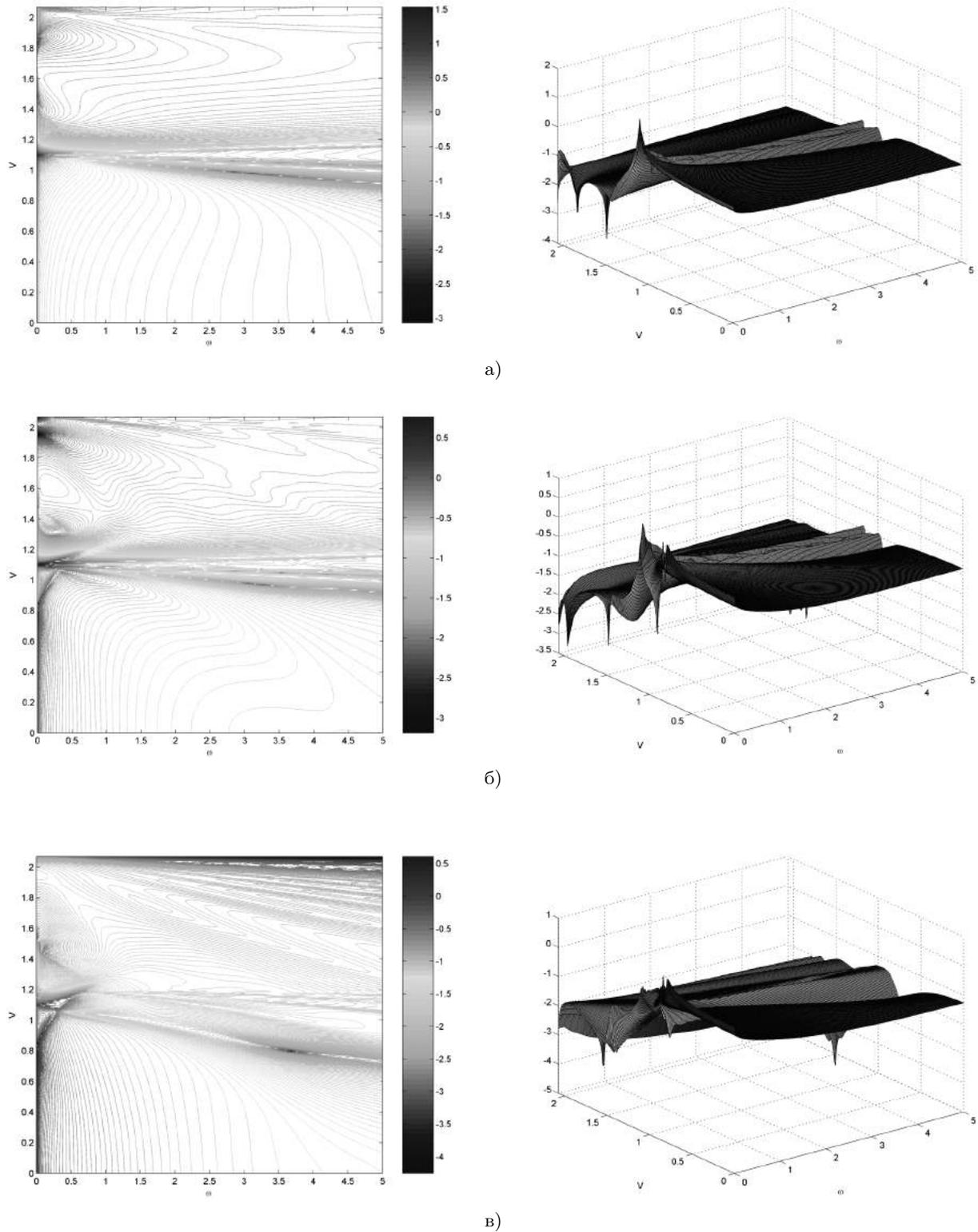
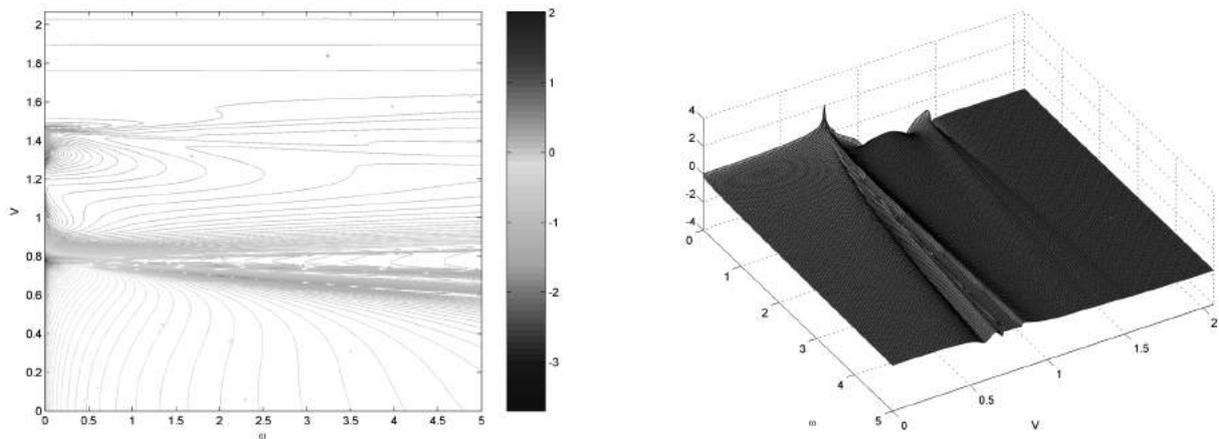
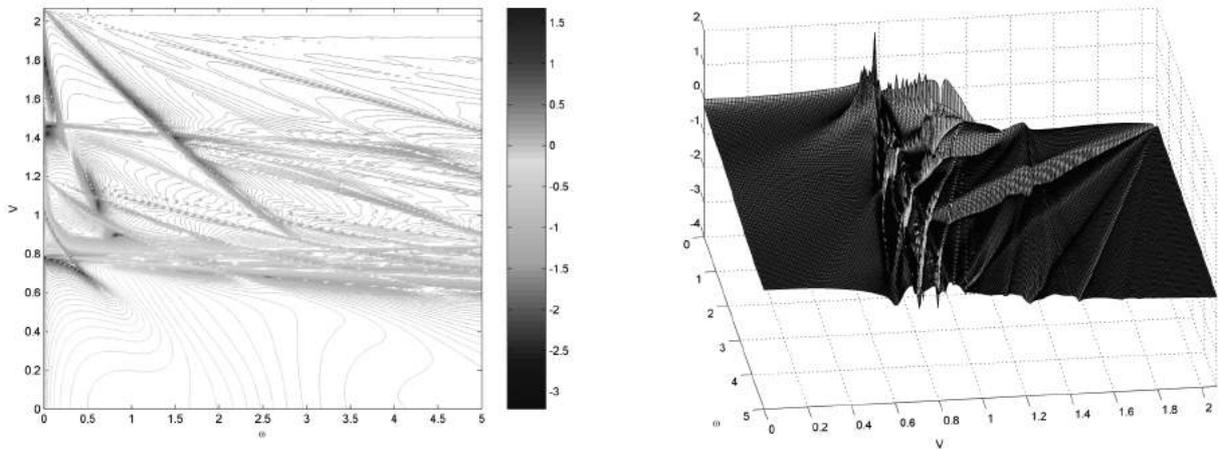


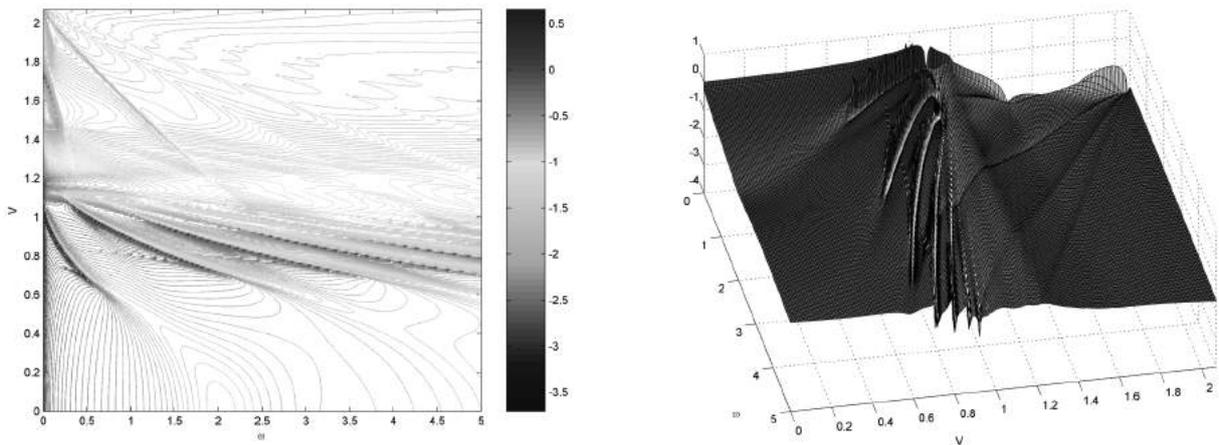
Рис. 5. Вид АЧСХ для  $\tilde{u}_{22}^{(n)}(\omega, v)|_{y=y_n}$ : а)  $\tilde{u}_{22}^{(1)}(\omega, v)|_{y=y_1}$  — однородное полупространство со свойствами жесткого материала, б)  $\tilde{u}_{22}^{(1)}(\omega, v)|_{y=y_1}$  — составное полупространство (верхний слой — жесткий материал, полупространство — мягкий материал), в)  $\tilde{u}_{22}^{(2)}(\omega, v)|_{y=y_2}$  — составное полупространство (верхний слой — жесткий материал, полупространство — мягкий материал)



а)



б)



в)

Рис. 6. Вид АЧСХ для  $\tilde{u}_{22}^{(n)}(\omega, v)|_{y=y_n}$ : а)  $\tilde{u}_{22}^{(1)}(\omega, v)|_{y=y_1}$  — однородное полупространство со свойствами мягкого материала, б)  $\tilde{u}_{22}^{(1)}(\omega, v)|_{y=y_1}$  — составное полупространство (верхний слой — мягкий материал, полупространство — жесткий материал), в)  $\tilde{u}_{22}^{(2)}(\omega, v)|_{y=y_2}$  — составное полупространство (верхний слой — мягкий материал, полупространство — жесткий материал)

(рис. 1а) и составных (рис. 1б, 1в) полупространствах. Вид  $\tilde{u}_{11}^{(n)}$  для однородного жесткого полупространства оказывается наиболее простым. Глобальный максимум, теоретически неограниченный при уменьшении до нуля комплексной части частоты  $\varepsilon \rightarrow 0$ , соответствует релеевской скорости  $v = v_{r,h}$  при нулевой частоте  $\omega = 0$ . Из точки  $(0, v_{r,h})$  выходят две прямые, образующие угол, биссектриса которого почти параллельна оси  $O\omega$ , вдоль которых расположены локальные максимумы и минимумы. Глобальный минимум соответствует точке  $(0, v_{s,h})$  — скорости поперечных волн  $v_{s,h}$  при нулевой частоте.

Для составного полупространства (рис. 1б, жесткий верхний слой на мягком полупространстве) отличия от однородного полупространства ограничены областью низких частот  $0 \leq \omega \leq 0,5$  и наиболее заметны для  $\omega \approx 0$ . Помимо глобального максимума, также связанного с  $v = v_{r,h}$ , выражен максимум, соответствующий  $v_{r,s}$ . В области высоких скоростей  $v \approx v_{p,h}$  при увеличении частоты наблюдается более быстрый спад амплитуды, чем в случае однородного полупространства (рис. 1а). Глобальный минимум по-прежнему связан со скоростью поперечных волн  $v_{s,h}$ , но смещен с нулевой частоты на частоту  $\omega \approx 0,4$ .

Графики  $\tilde{u}_{11}^{(2)}(\omega, v)|_{y=y_2}$  на рис. 1в, соответствующие горизонтальным смещениям от горизонтального заглубленного источника, существенно отличаются от двух предыдущих (рис. 1а, 1б). Некоторое сходство со случаем 1б наблюдается только для нулевой частоты, при увеличении частоты имеет место резкий спад амплитуды, более заметный в диапазоне  $v_{p,s} \leq v \leq v_{p,h}$ . При ненулевой частоте график (рис. 1в) не имеет резких перепадов.

Общим для рис. 1а, 1б, 1в является монотонность в диапазоне  $0 \leq v \leq v_{r,h}$ ,  $0,5 < \omega \leq 5$ .

Рис. 2 представляет аналогичные рисунку 1 величины  $\tilde{u}_{11}^{(n)}(\omega, v)|_{y=y_n}$ , но для полупространства с измененным порядком чередования мягких и жестких материалов. На рис. 2а для мягкого полупространства рельеф  $\tilde{u}_{11}^{(1)}(\omega, v)|_{y=y_1}$  весьма сходен с рис. 1а: глобальный максимум и минимум расположены соответственно в точках  $(0, v_{r,s}), (0, v_{s,s})$ . При  $v_{s,s} < v \leq v_{p,s}$  наблюдается характерный рельеф спада амплитуды, для  $v_{p,s} \leq v \leq v_{p,h}$  амплитуда спадает монотонно. На рис. 2б в

диапазоне скоростей  $0 \leq v \leq v_{r,s}$  проявляются в основном свойства мягкого полупространства, в диапазоне  $v_{r,s} < v \leq v_{p,s}$  преобладают характерные признаки мягкого слоя, при  $v_{p,s} \leq v \leq v_{p,h}$  — выступают характерные признаки жесткого слоя. На рис. 2в в диапазоне  $v_{r,s} < v \leq v_{p,h}$  преобладают признаки жесткого слоя. На всех рис. 2а, 2б, 2в при  $0 < v < v_{r,s}$  амплитуды изменяются монотонно. Рис. 3, 4 представляют величины  $\tilde{u}_{12}^{(n)}(\omega, v)$  амплитуд горизонтальных смещений, вызванных вертикальным источником  $q_2^{(n)}$ , при тех же конфигурациях полупространства, что и на рис. 1 и 2 соответственно. Очевидно общее сходство рис. 1 и 3, но заметны и различия. Так, на рис. 3а глобальный минимум уже не связан с  $v_{s,h}$ , величина  $\tilde{u}_{12}^{(1)}(\omega, v)$  имеет обширную область локальных минимумов, сосредоточенных вдоль отрезка  $\{0 \leq \omega \leq 2, v \approx 1,65\}$ . Рельеф рис. 3б отличается от 1б наличием области минимумов, несколько искривленной по отношению к 3а, рельефы 3б и 3в весьма схожи, но на графике 3в локальные минимумы расположены не вдоль одной кривой, а разбросаны в семи удаленных друг от друга областях. Различия 1в и 3в значительны.

Сравнивая рис. 3 и 1, 4 и 2, необходимо отметить их качественное сходство для случаев поверхностного источника и значительно меньшее — для заглубленного источника.

На рис. 5, 6 представлена величина  $\tilde{u}_{22}^{(n)}(\omega, v)$  амплитуд вертикальных смещений, возбуждаемых вертикальным источником  $q_2^{(n)}$ . Сравнивая рис. 5 и 3, можно отметить большое сходство рельефов максимумов, расположение минимумов существенно различное. Аналогичные выводы справедливы и относительно рис. 6 и 4. В проведенных расчетах диапазон АЧСХ для  $\tilde{u}_{22}^{(n)}$  примерно на 4 десятичных порядка больше, чем для  $\tilde{u}_{11}^{(n)}, \tilde{u}_{12}^{(n)}$ .

## Выводы

1. В случае неоднородного полупространства наибольшим диапазоном изменения АЧСХ обладают вертикальные смещения от вертикального источника, их диапазон превышает на 4 десятичных порядка соответствующие диапазоны АЧСХ для горизонтальных смещений. Это подчеркивает первостепенную важность для теоретического анализа и практических целей именно этих величин.

2. Во всех рассмотренных случаях для полупространства наиболее резкие изменения АЧСХ приходятся на значения скорости  $0 \leq v \leq v_s^{(1)}$ , нулевую частоту и область малых частот  $0 \leq \omega < \omega_0$ .

3. Для однородного полупространства максимум амплитуды приходится на значение релейской скорости  $v_r$  и нулевую частоту. Для неоднородного полупространства максимум амплитуд приходится на значение релейской скорости  $v_r^{(1)}$  и нулевую частоту, несколько меньшие значения амплитуды связаны с  $v_r^{(2)}$ . При ненулевом внутреннем трении максимумы ограничены, при отсутствии трения – не ограничены.

4. Наиболее монотонными областями изменений являются диапазоны скоростей  $0 \leq v \leq v_r^{(1)}$  и  $v > v_p^{(1)}$  при  $0 < \omega_0 < \omega$ .

5. АЧСХ полупространства с покрывающим жестким слоем незначительно отличается от АЧСХ однородного жесткого полупространства, в то же время, АЧСХ полупространства с покрывающим мягким слоем значительно отличается от АЧСХ мягкого полупространства при  $v_{r,s} \leq v$ .

6. В случае вертикальных смещений имеется выраженное сходство между АЧСХ поверхности и заглубленного источника, для АЧСХ горизонтальных смещений различия велики.

7. В случае однородного или многослойного полупространства метод прямого контурного интегрирования позволяет избежать сложностей, связанных с расчетами контурных интегралов вдоль разрезов в комплексной плоскости, проводимых из точек ветвления символа матрицы Грина.

8. В рассмотренной задаче о расчете АЧСХ составного полупространства разработанный алгоритм построения символа блочной матрицы Грина и методы расчета интеграла Фурье доказали свою высокую эффективность. Данные методы могут быть с успехом применяться как для теоретических исследований, так и для инженерных расчетов.

### Литература

1. Курбасов А. С. Увеличение скоростей на железных дорогах России: возможности и преимущества // Транспорт Российской Федерации. 2011. № 6 (37). С. 20–23.
2. Leonardi G. and Buonsanti M. Reduction of train-induced vibrations by using barriers // Research J. of Applied Sciences. Engineering

and Technology. 2014. Vol. 17. No. 7. P. 3623–3632. DOI: 10.19026/rjaset.7.715

3. Wu J.J. Transverse and longitudinal vibrations of a frame structure due to a moving trolley and the hoisted object using moving finite element // Int. J. of Mechanical Sciences. 2008. Vol. 50. P. 613–625.
4. Hubert W., Friedrich K., Pflanz G. et al. Frequency- and time-domain BEM analysis of rigid track on a half-space with vibration barriers // Meccanica. 2001. Vol. 36. P. 421. DOI: 10.1023/A:1015053326558
5. Forrest J.A. Modelling of Ground Vibration from Underground Railways: A dissertation submitted to the University of Cambridge for the degree of Doctor of Philosophy by Pembroke College, 1999. 205 p.
6. Калинин В. В., Белянкова Т. И. Динамика поверхности неоднородных сред. М.: Физматлит, 2009. 240 с.
7. Белоконь А. В., Наседкин А. В. Взаимодействие движущихся штампов с упругими и вязкоупругими телами // Механика контактных взаимодействий. М.: Физматлит, 2001. 672 с.
8. Сыромятников П. В. Амплитудно-частотные и амплитудно-скоростные характеристики жесткого осциллирующего включения, движущегося внутри двухслойной изотропной среды // Политематический сетевой электронный научный журнал Кубанского государственного аграрного университета (Научный журнал КубГАУ). 2017. № 09(133). Режим доступа: <http://ej.kubagro.ru/2017/09/pdf/35.pdf>. DOI: 10.21515/1990-4665-133-035
9. Сыромятников П. В. Моделирование возмущений двухслойной упругой полуограниченной среды, вызываемых заглубленным подвижным осциллирующим источником // Экологический вестник Черноморского экономического сотрудничества. 2017. № 4. Вып. 1. С. 62–73.
10. D01AKF Subroutine. The NAG Fortran Library, The Numerical Algorithms Group (NAG), Oxford, United Kingdom. Режим доступа: <http://www.nag.com>

### References

1. Kurbasov, A.S. Uvelichenie skorostey na zheleznykh dorogakh Rossii: vozmozhnosti i preimushchestva [Increasing speeds on the railways of Russia: opportunities and benefits]. *Transport Rossiyskoy Federatsii* [Transport of the Russian Federation], 2011, no. 6(37), pp. 20–23. (In Russian)
2. Leonardi, G., Buonsanti, M. Reduction of Train-induced Vibrations by using Barriers. *Research J. of Applied Sciences, Engineering and Tech-*

- nology*, 2014, vol. 17, iss. 7, pp. 3623–3632. DOI: 10.19026/rjaset.7.715
3. Wu, J.J. Transverse and longitudinal vibrations of a frame structure due to a moving trolley and the hoisted object using moving finite element. *Int. J. of Mechanical Sciences*, 2008, vol. 50, pp. 613–625.
  4. Hubert, W., Friedrich, K., Pflanz, G. et al. Frequency- and time-domain BEM analysis of rigid track on a half-space with vibration barriers. *Meccanica*, 2001, vol. 36, pp. 421. DOI: doi.org/10.1023/A:1015053326558
  5. Forrest, J.A. *Modelling of ground vibration from underground railways*: A dissertation submitted to the University of Cambridge for the degree of Doctor of Philosophy by Pembroke College, 1999, 205 p.
  6. Kalinchuk, V.V., Belyankova, T.I. *Dinamika poverkhnosti neodnorodnykh sred* [The dynamics of the surface of inhomogeneous media]. Fizmatlit, Moscow, 2009. (In Russian)
  7. Belokon, A.V., Nasedkin, A.V. *Vzaimodeystvie dvizhushchikhsya shtampov s uprugimi i vyazkouprugimi telami* [Interaction moving punches with elastic and viscoelastic bodies. Contact mechanics]. Fizmatlit, Moscow, 2001. (In Russian)
  8. Syromyatnikov, P.V. Amplitudno-chastotnye i amplitudno-skorostnye kharakteristiki zhestkogo ostsilliruyushchego vklyucheniya, dvizhushchegosya vnutri dvukhsloynoy izotropnoy sredy [Amplitude-frequency and amplitude-speed characteristics of a rigid oscillating inclusion moving inside a two-layer isotropic medium]. *Politematicheskiiy setevoy elektronnyy nauchnyy zhurnal Kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta (Nauchnyy zhurnal KubGAU)* [Polythematic network electronic scientific journal of the Kuban State Agrarian University (Scientific journal of KubSAU)], 2017, no. 09 (133). Access at: <http://ej.kubagro.ru/2017/09/pdf/35.pdf>. DOI: 10.21515/1990-4665-133-035 (In Russian)
  9. Syromyatnikov, P.V. Modelirovanie voz-mushcheniy dvukhsloynoy uprugoy poluo-granichennoy sredy, vyzyvaemykh zaglublennym podvizhnym ostsilliruyushchim istochnikom [Simulation of perturbations of a two-layer elastic semi-bounded environment caused by a recessed moving oscillating source]. *Ecological Bulletin of the Black Sea Economic Cooperation*, 2017, no. 4. pt. 1, pp. 62–73. (In Russian)
  10. D01AKF Subroutine. The NAG Fortran Library, The Numerical Algorithms Group (NAG), Oxford, United Kingdom. Access at: <http://www.nag.com>