Математика

УДК 517.5

DOI: 10.31429/vestnik-16-1-6-12

О СОЮЗНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ И РАВНОВЕСНЫХ ФОРМАХ ЖИДКИХ КАПЕЛЬ

Щербаков М. Е.

CONJUGATE FUNCTIONAL OF GAUSS CURVATURE AND EQUILIBRIUM FORMS OF LIQUID DROP

M. E. Shcherbakov

Kuban State University, Krasnodar, 350065, Russia

e-mail: latiner@mail.ru

Abstract. The conjugate Gauss curvature functional is constructed. It is considered on the class of axisymmetrical surfaces generated by the curves represented by the graphs of functions whose domains are orthogonal to the axis of symmetry. The functional is applied to the variational study of equilibrium forms of liquid drops. It is responsible for the formation of intermediate layer between two phases, that of the liquid and of the gas. In the variational study presented the energies of surface tension, adhesion and of the gravitational forces are included. In contrast with classical approach it is not necessary to consider the adhesion's angle as known beforehand. It can be calculated if the width of the intermediate layer is given.

Keywords: axisymmetrical surface, Gauss curvature, mean curvature, equilibrium form, intermediate layer, surface tension, variational problem, conjugate Gauss curvature functional.

В [1] впервые был предложен функционал, определённый на классе осесимметричных поверхностей, вариация которого определяется гауссовой кривизной. Впоследствии он нашёл применение в различных задачах математической физики и геометрии [2–5] при исследовании равновесных форм осесимметричных поверхностей с помощью вариационного метода. При этом предполагалось, что образующие допустимых поверхностей представляют собой графики функций, область определения которых находится на оси вращения. В данной работе изучаются равновесные формы в классе поверхностей, образующие которых представляют собой графики функций, области определения которых находится на оси, ортогональной к оси вращения.

Рассмотрим осесимметричную каплю, свисающую с горизонтальной плоскости P. Обозначим через S поверхность капли, через S^* — ее проекцию на плоскость P.

Введем, декартовы координаты (x, y) в меридиональной плоскостисечения капли. Ориентируем ось OX вдоль перпендикуляра к поверхности S.

Нас интересуют условия существования «равновесной капли» на классе осесимметричных поверхностей S, образующие l которых представляет собой спрямляемые кривые. Образующая поверхности является графиком функции x от y. Такие поверхности назовем допустимыми. Обозначим через $x_1 = x_1\,(s)\,y_1 = y_1\,(s)$, $s \in [0, |l|]$, естественное параметрическое представление кривой l образующей допустимой поверхности.

Такого рода поверхности могут возникать в сложных гравитационных полях и при рассмотрениях различного рода геометрических задач. При этом, как и в работах [1, 3–5], будем принимать во внимание промежуточный слой, возникающий в двухфазных средах, находящихся в состоянии равновесия.

Для отыскания равновесных форм используется вариационный метод.

С этой целью введём следующий функционал $F(S)$ энергии всех сил, действующих на каплю

$$F(S) = \sigma\big[\Lambda(S) + l_p\Xi(S) - \beta S^* + \lambda V(S) + \sigma^{-1}V(S)\Gamma\rho\big]. \quad (1)$$

Здесь $\Lambda\,(S)$ — функционал площади поверхности капли, $S^*\,(S)$ — функционал площади прилипания капли, β — коэффициент адгезии

Щербаков Михаил Евгеньевич, преподаватель кафедры функционального анализа и алгебры Кубанского госуниверситета; e-mail: latiner@mail.ru.

$V(S)$ — функционал объёма, $\sigma^{-1}V(S)\,\Gamma\rho$ — функционал поля гравитационных сил, l_p — толщина промежуточного слоя между жидкостью и газом, σ — коэффициент поверхностного натяжения, λ — коэффициент Лагранжа, Γ — коэффициент гравитации, ρ — плотность жидкости, $\Xi(S)$ — функционал энергии формирования промежуточного слоя,

$$\Xi(S) = 2\pi \int\limits_0^{|l|} f(\dot{x}_1)\,\mathrm{d}s.$$

Здесь $f = f(\tau)$ — решение дифференциального уравнения

$$\sqrt{1-\tau^2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}\tau^2}\frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} + \frac{f}{\sqrt{1-\tau^2}} = \\ = \frac{\tau}{\left(\sqrt{1-\tau^2}\right)^3}. \quad (2)$$

Отметим здесь, что функционал $\Xi(S)$ имеет плотность, отличную от плотности функционала, используемого в работах [1–5]. Данное обстоятельство связано с тем, что эти функционала определяются на различных классах допустимых кривых. Естественно назвать новый функционал союзным по отношению к прежнему.

1. Вариационная задача

В классе допустимых поверхностей найти поверхность S, на которой функционал F принимает наименьшее значение.

Как и в классическом случае, при отсутствии промежуточного слоя [6], выводится условие Эйлера существования экстремума. С этой целью вычислим вариации функционала F, определяемых двумя классами вариаций экстремальных поверхностей.

Первые вариации функционала первого класса будем обозначать символом δ_1, определяется локальным изменением экстремальной поверхности в точках, не лежащих на её краю.Вариации второго класса будем обозначать символом δ_2. Они определяются изменением экстремальной поверхности в окрестности точки, лежащей на краю поверхности.

В нижеследующих леммах устанавливаются значения вариаций функционала F.

Лемма 1. Для произвольной константы D функция

$$f(\tau) = \tau \ln \frac{D}{\sqrt{1-\tau^2}} + \\ + \sqrt{1-\tau^2}\arcsin\tau - \tau \quad (1.3)$$

является решением уравнения (2).

Доказательство. Нетрудно убедиться в том, что уравнение (2) сводится к следующему уравнению первого порядка с произвольной постоянной D

$$\left(1-\tau^2\right)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\tau} + f\tau = \int \frac{\tau}{1-\tau^2}\,\mathrm{d}\tau = \\ = \ln\frac{D}{\sqrt{1-\tau^2}}. \quad (1.4)$$

Из (1.4) очевидным образом получаем (1.3).

Лемма доказана. □

Лемма 2. Пусть S — допустимая поверхность, образующая которой представляется графиком функции $x = x(y)$. Рассмотрим поверхность S_ε, образующая l_ε которой является графиком функции

$$x_\varepsilon(y) = x(y) + \varepsilon t(y). \quad (1.5)$$

Здесь $t = t(y)$ — финитная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой расположен внутри проекции образующей на ось y Тогда

$$\delta_1(\Xi) = 2\pi\varepsilon \int\limits_0^{|l|} t\dot{y}Ky\,\mathrm{d}s.$$

Здесь K — Гауссова кривизна поверхности.

Доказательство. Из (1.5) получаем, что длина образующей поверхности S_ε равна

$$s_\varepsilon(s) = \int_0^s \sqrt{\left(\dot{x_1}(\tau) + \varepsilon\dot{t_1}(\tau)\right)^2 + \dot{y}^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \\ = s + \varepsilon\int\limits_0^s \dot{t_1}((\tau\dot{x}_1(\tau))\,\mathrm{d}\tau + o(\varepsilon),$$

$$t_1(s) = t\circ y(s), \quad x_1(s) = x\circ y(s),$$

Исходя из этого, найдем

$$\Xi\left(S_\varepsilon\right)=2\pi\int\limits_0^{|l_\varepsilon|} f(\dot{x_1}(s_\varepsilon)+\varepsilon\dot{t_1}(s_\varepsilon))\,\mathrm{d}s_\varepsilon=$$

$$=2\pi\int\limits_0^{|l|} f\left[(\dot{x}_1+\varepsilon(\dot{t}_1-\dot{t}_1\dot{x_1}^2)\right]\times$$

$$\times\left(1+\varepsilon\dot{t_1}(s)\dot{x_1}\left(s\right)\right)\mathrm{d}s=$$

$$=\Xi\left(S\right)+2\pi\varepsilon\int\limits_0^{|l|}\dot{t_1}\Psi(s)\,\mathrm{d}s+o\left(\varepsilon\right),\quad(1.6)$$

$$\Psi(s)=\left(1-\dot{x_1}^2\right)\frac{\mathrm{d}f(\dot{x}_1(s))}{\mathrm{d}\dot{x_1}(s)}+$$

$$+f(\dot{x}_1\left(s\right))\dot{x}_1\left(s\right).$$

Интегрируя по частям и пользуясь финитностью $t_1(s)$, приходим к равенству

$$\Xi\left(S_\varepsilon\right)=\Xi(S)-2\pi\varepsilon\int\limits_0^{|l|}t_1\,\mathrm{d}\Psi(s)+o\left(\varepsilon\right),$$

$$\varepsilon\longrightarrow 0.$$

В силу того, что функция f удовлетворяет уравнению (2) получаем

$$\Xi\left(S_\varepsilon\right)=\Xi\left(S\right)-2\pi\varepsilon\int\limits_0^{|l|}t_1\dot{y}Ky\,\mathrm{d}s+o(\varepsilon),$$

$$\varepsilon\longrightarrow 0.$$

Это означает, что первая вариация функционала Ξ равна

$$\delta_1\left(\Xi\right)=2\pi\varepsilon\int\limits_0^{|l|}Kt_1\dot{y}y\,\mathrm{d}s.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. Пусть S — допустимая поверхность с образующей l и $\Lambda(S)$

$$\Lambda(S)=2\pi\int_0^{|l|}y(s)\,\mathrm{d}s,\qquad(1.7)$$

площадь её поверхности. Пусть l_1 — вариация кривой, определяемая условием (1.5). Пусть

$$\Lambda\left(S_\varepsilon\right)=2\pi\int\limits_0^{|l_1|}y(s_\varepsilon)\,\mathrm{d}s_\varepsilon$$

площадь поверхности, определяемой проварьированной кривой. Тогда первая вариация $\delta_1\left(\Lambda\right)$ вариации $\Lambda\left(S_\varepsilon\right)-\Lambda\left(S\right)$ функционала площади капли равна

$$\delta_1\left(\Lambda\right)=\Lambda-2\pi\varepsilon\int\limits_0^{|l|}t_1\dot{y}y2H\,\mathrm{d}s,\qquad(1.8)$$

Доказательство. Образующая варьированной поверхности есть график функции

$$x_\varepsilon\left(y\right)=x\left(y\right)+\varepsilon t\left(y\right).$$

Дифференциал $\mathrm{d}s_\varepsilon$ длины дуги её образующей при этом равен

$$\mathrm{d}s_\varepsilon=\left[\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}+\varepsilon\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}}\right]\mathrm{d}y+$$

$$+o\left(\varepsilon\right),$$

$$\varepsilon\longrightarrow 0.$$

Заметим, что когда s изменяется от 0 до $|l|$, переменная y изменяется от 0 до Y_A. Поэтому первая вариация $\delta_1\left(\Lambda\right)$ вариации $\Lambda\left(S_\varepsilon\right)-\Lambda\left(S\right)$ равна

$$\delta_1\left(\Lambda\right)=2\pi\varepsilon\int\limits_0^{Y_A}y\frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2}}\,\mathrm{d}y.$$

Интегрируя представление $\delta_1\left(\Lambda\right)$ по частям и используя финитность t, получим

$$\delta_1\left(\Lambda\right)=$$

$$-2\pi\varepsilon\int\limits_0^{Y_A}yt\left[\frac{y\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^3}{y\left(\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)^3}\right]\mathrm{d}y=$$

$$=-2\pi\varepsilon\int\limits_0^{|l|}2Ht\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}y\,\mathrm{d}s.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4. Первая вариация $\delta_1\big(\sigma^{-1}V(S)\,\Gamma\rho\big)$ функционала $\sigma^{-1}V\left(S\right)\Gamma\rho$

$$\sigma^{-1}V\left(S\right)\Gamma\rho=\sigma^{-1}2\pi\int\limits_{0}^{Y_A}\Gamma\rho x(y)y\,\mathrm{d}y$$

гравитационного поля на классе вариаций образующих допустимых поверхностей, определяемых формулой (1.5), равна

$$\delta_1\left(\sigma^{-1}V\left(S\right)\Gamma\rho\right)=\sigma^{-1}2\pi\varepsilon\int\limits_{0}^{|l|}\Gamma\rho t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Доказательство. Значение функционала гравитационного поля на кривой l_1, получаемый из кривой l с помощью преобразования (1.5) равно

$$2\pi\sigma^{-1}\int\limits_{0}^{Y_A}\Gamma\rho\left(x\left(y\right)+\varepsilon t\left(y\right)\right)y\,\mathrm{d}y.$$

Поэтому при постоянных Γ, ρ получаем

$$\delta_1\left(\sigma^{-1}V\left(S\right)\Gamma\rho\right)=\sigma^{-1}2\pi\varepsilon\int\limits_{0}^{Y_A}\Gamma\rho t\left(y\right)y\,\mathrm{d}y=$$

$$=2\pi\varepsilon\int\limits_{0}^{|l|}\sigma^{-1}\Gamma\rho t_1(s)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Лемма доказана. □

Лемма 5. Первая вариация функционала равна

$$\delta_1\left(\lambda V\left(S\right)\right)=2\pi\varepsilon\int\limits_{0}^{|l|}\lambda t_1(s)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}y(s)\,\mathrm{d}s.$$

Доказательство. Устанавливается простыми непосредственными вычислениями.

Лемма доказана. □

Лемма 6. Первая вариация $\delta_1\left(\beta S^{*}(S)\right)$ функционала $\beta S^{*}(S)$ площади поверхности прилипания капли при вариации образующей, определяемой формулой (1.5), в которой носитель функции t имеет пустое пересечение с линией контакта, равна нулю.

Доказательство. При вариации образующей с помощью преобразования описанного в условии леммы типа форма пятна остаётся неизменной.

Лемма доказана. □

В следующей теореме мы сформулируем условие, являющееся обобщением условием Лапласа для нахождения равновесной капли.

Теорема 7. Пусть $F\left(\bar{S}\right)$ — функционал, определённый на классе допустимых поверхностей $\bar{S}$

$$F\left(\bar{S}\right)=\sigma\big[\Lambda\left(\bar{S}\right)+l_p\Xi\left(\bar{S}\right)-\beta S^{*}+ \\ +\lambda V\left(\bar{S}\right)+\sigma^{-1}V\left(\bar{S}\right)\Gamma\rho\big]$$

и S — поверхность, на которой достигается минимум его значений. Допустим, что экстремальная поверхность является дважды непрерывно дифференцируемой. В таком случае в точках $P=\left(x\left(y\right),y\right)$, принадлежащих её меридиональному сечению, выполняется обобщённое условие Лапласа

$$2H\left(x\left(y\right),y\right)+l_pK\left(x\left(y\right),y\right)= \\ =\lambda+\frac{1}{\sigma}\Gamma\varrho, \quad (1.9)$$

Доказательство. Используя результаты лемм 2–6 получаем первую вариацию $\delta_1\left(F\left(S\right)\right)$ в виде

$$\delta_1\left(F\left(S\right)\right)=2\pi\varepsilon\int\limits_{0}^{|l|}t_1(s)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\times \\ \times\big[-\left(2H+l_pK\right)+\lambda+\sigma^{-1}\Gamma\rho\big]\,y\,\mathrm{d}s. \quad (1.10)$$

По условию теоремы поверхность S является экстремальной, поэтому

$$\delta_1\left(F\left(S\right)\right)=0.$$

Учитывая произвольность функции $t_1=t_1(s)$ и непрерывность функции, находящейся в квадратных скобках, получаем из (1.10) условие (1.9).

Теорема доказана. □

Заметим здесь, что в том случае, когда толщина промежуточного слоя не принимается во внимание, получаем классическое условие Лапласа для определения формы равновесной капли [6].

Для установления граничных условий, выполняющихся на линии контакта, капли с плоскостью рассмотрим второй класс вариаций. Допустим, что образующая допустимой поверхности пересекается с плоскостью P под определённым углом. В таком случае в окрестности точки $(0, y_A)$ образующая допустимой поверхности представляет собой график монотонной функции

Пусть S — экстремальная поверхность и $(x, y(x))$ — локальное представление её образующей l в окрестности точки $(0, y_A)$ для значений переменной x в окрестности нуля. Обозначим через s натуральный параметр образующей l.

Пусть

$$(x, y) \longrightarrow (x, y(x) + \varepsilon t(x)) \qquad (1.11)$$

— локальный диффеоморфизм, определённый в окрестности точки $(0, y_A)$. Здесь $t = t(x)$ — бесконечно дифференцируемая функция, заданная в правосторонней окрестности нуля. Функция t отлична от нуля в нуле и равна нулю во внешности определённой окрестности. Пусть l_ε — кривая, полученная из кривой l с помощью этого локального преобразования, и S_ε — определяемая ею поверхность вращения.

Лемма 8. Первая вариация $\delta_2(\Xi)$ функционала Ξ, определяемая описанной вариацией образующей, равна

$$\delta_2(\Xi) = 2\pi\varepsilon t_1(0)\left[\tan\gamma - \gamma\right].$$

Здесь γ — угол контакта образующей поверхности с плоскостью P и $t_1(s) = t(x(s))$.

Доказательство. Пусть s_ε — натуральный параметр кривой l_ε и

$$(x_\varepsilon(s_\varepsilon), y_\varepsilon(s_\varepsilon)) = (x(s), y(x(s)) + \varepsilon t(x(s)))$$

её естественное параметрическое представление. Пусть

$$y_1 := y(x(s)), \quad t_1 := t(x(s)).$$

Тогда

$$\Xi(S_\varepsilon) = 2\pi\int\limits_0^{|l_\varepsilon|} f\left(\frac{\mathrm{d}x_\varepsilon(s_\varepsilon)}{\mathrm{d}s_\varepsilon}\right)\mathrm{d}s_\varepsilon = \Xi(S) +$$
$$+ 2\pi\varepsilon\int\limits_0^{|l|}\left[\dot{y_1} f(\dot{x}(s)) + (-\dot{y_1}\dot{x})\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\dot{x}(s)}\right]\mathrm{d}t_1(s). \qquad (1.12)$$

Так как носитель финитной функции t_1 может быть считаться сколь угодно малым, то

$$\Xi(S_\varepsilon) - \Xi(S) =$$
$$2\pi\varepsilon t_1\left[\dot{y_1} f(\dot{x}(s)) + (-\dot{y_1}\dot{x})\frac{df}{d\dot{x}(s)}\right]\frac{|l|}{0} + o(\varepsilon), \qquad (1.13)$$
$$\varepsilon \longrightarrow 0.$$

Используя (1.13) и (1.4), находим

$$\delta_2(\Xi) = 2\pi\varepsilon t_1(0)\left[\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}\ln\frac{D}{\cos\gamma} - \right.$$
$$\left. - \left(\sin\gamma ln\frac{D}{\cos\gamma} + \gamma\cos\gamma - \sin\gamma\right)\left(\frac{1}{\cos\gamma}\right)\right] =$$
$$= 2\pi\varepsilon t_1(0)\left[\tan\gamma - \gamma\right].$$

Лемма доказана. □

Лемма 9. Первая вариация $\delta_2(\Lambda)$ функционала $\Lambda(S)$ поверхностного натяжения, порождённая диффеоморфизмом (1.11), равна

$$\delta_2(\Lambda) = 2\pi\varepsilon Y_A\cos\gamma t(0). \qquad (1.14)$$

Доказательство. Находя по частям интеграл, представляющий разность $\Lambda(S_\varepsilon) - \Lambda(S)$, получим

$$\Lambda(S_\varepsilon) - \Lambda(S) =$$
$$= 2\pi\varepsilon y_1\dot{y_1}t_1|\frac{|l|}{0} - 2\pi\varepsilon\int\limits_0^{|l|} t_1 dy_1\dot{y_1}. \qquad (1.15)$$

В силу произвольности выбора носителя функции t из (1.15) очевидным образом получаем (1.14).

Лемма доказана. □

Лемма 10. Первая вариация функционала гравитационного поля $\delta_2\left(\sigma^{-1}V(S)\Gamma\rho\right)$, определяемая диффеоморфизмом (1.11), равна нулю.

Доказательство. Прежде всего заметим, что имеет место следующее равенство

$$\sigma^{-1}V(S_\varepsilon)\Gamma\rho - \sigma^{-1}V(S)\Gamma\rho =$$
$$= \sigma^{-1}\left[\pi\int\limits_0^{X_A}\Gamma\rho\left(y(x) + \varepsilon t(x)\right)^2\mathrm{d}x - \right.$$
$$\left. - \pi\int\limits_0^{X_A}\Gamma\rho\left(y(x)\right)^2\mathrm{d}x\right]. \qquad (1.16)$$

Так как носитель функции $t = t(x)$ может быть выбран произвольным образом, то имеет место равенство

$$\delta_2\left(\sigma^{-1}V\left(S\right)\Gamma\rho\right) = \\ = \Gamma\rho\sigma^{-1}\pi\left[\int\limits_0^{X_A} 2\varepsilon y(x)t(x)\,\mathrm{d}x\right] = 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 11. Первая вариация функционала λV объёма, определяемая диффеоморфизмом (1.11), равна нулю.

Доказательство. Рассмотрим разность $\lambda V\left(S_\varepsilon\right) - \lambda V\left(S\right)$,

$$\lambda V\left(S_\varepsilon\right) - \lambda V\left(S\right) = \\ = \int\limits_0^{X_A}\lambda\left(y(x) + \varepsilon t(x)\right)^2\mathrm{d}x - 2\pi\int\limits_0^{X_A}\lambda\left(y(x)\right)^2\mathrm{d}x = \\ = \varepsilon 2\int\limits_0^{X_A}\lambda t(x)y(x)\,\mathrm{d}x, \quad (1.17)$$

$$\varepsilon \longrightarrow 0.$$

Из (1.17) следует равенство

$$\delta_2\left(\lambda V\left(S\right)\right) = 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 12. Первая вариация функционала βS^* площади прилипания, определяемая диффеоморфизмом (1.11), равна $2\varepsilon\pi Y_A t\left(0\right)$.

Доказательство. Очевидным образом следует из определения функционала βS^*.

Лемма доказана. □

Теорема 13. Пусть S — экстремальная поверхность рассматриваемой вариационной задачи. Допустим, что она является дважды непрерывно дифференцируемой и её образующая пересекает плоскость P под определённым углом. Тогда на линии контакта поверхности с плоскостью P имеет место равенство

$$Y_A\cos\gamma + l_p\left(\operatorname{tg}\gamma - \gamma\right) - \beta Y_A = 0. \quad (1.18)$$

Доказательство. Объединяя результаты лемм 8–12, получаем, что первая вариация $\delta_2\left(F\right)$ функционала $F(S)$, определяемая диффеоморфизмом (1.11), имеет вид

$$\delta_2(F) = 2\pi\varepsilon t(0)\sigma\times \\ \times\left[(\beta - \cos\gamma)Y_A + l_p(\operatorname{tg}\gamma - \gamma\right]. \quad (1.19)$$

Так как для экстремальной поверхности выполняется равенство

$$\delta_2\left(F\right) = 0,$$

то из (1.19) следует (1.18).

Теорема доказана. □

Заметим здесь, что в том случае, когда толщина l_p промежуточного слоя не принимается во внимание, условие (1.18) превращается в классическое условие для угла смачивания.

Выясним теперь, чему рано значение множителя λ Лагранжа.

Теорема 14. ПустьS — экстремальная поверхность рассматриваемой вариационной задачи. Тогда её множитель Лагранжа λ определяется из условия

$$\lambda = \frac{1}{\pi Y_A^2}\left[2\pi\sin\gamma + \frac{l_p\pi Y_A^2}{2}\cos^2\gamma - \kappa V\right]. \quad (1.20)$$

Доказательство. Интегрируя обе части равенства (1.9) по поверхности S^* после несложных вычислений, получаем равенство (1.20).

Теорема доказана. □

Заметим снова, что в том случае, когда толщина l_p промежуточного слоя не принимается во внимание, условие (1.20) переходит в классическое условие.

Основные теоремы 7, 13, 14 были доказаны здесь в предположении, что экстремальная поверхность S является дважды непрерывно дифференцируемой. Доказательство гладкости осуществляется также как в [4].

Результаты работы позволяют исследовать вариационную задачу, изученную в [4]. Доказательство существования экстремальной поверхности в таком случае проводится аналогичным образом.

Методы, изложенные в работе, могут быть применены к исследованию задач, связанных с проблемой Уиллмора [7].

Литература

1. *Chtchterbakov E.* Free boundary value problem for ideal fluid with surface and wedging forces // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 1998. Vol. 17, № 4. P. 937–961.
2. *Shcherbakov E.* Equilibrium state of a pending drop with inter-phase layer // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen. 2012. Vol. 31. P. 1–15.
3. *Shcherbakov E., Shcherbakov M.* On equilibrium of the pendant drop taking into account the flexural rigidity of intermediate layer // Doklady Physics. 2012. Vol. 53. Iss. 6. P. 243–244.
4. *Shcherbakov E., Shcherbakov M.* Equilibrium of the pendant drop its flexural rigidity of intermediate layer being accounted for // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2016. № 3. С. 87–94.
5. *Shcherbakov E.* Generalized minimal Liouville Surfaces // Int. Journal of Pure and Applied Mathematics. 2009. Vol. 54. №2. C. 179–192.
6. *Finn R.* Equilibrium capillary surfaces. New York, Springer, 1986, 2016.
7. *Toda M.* Willmore Energy: Brief Introduction and Survey. In: Toda M. (ed.) Willmore Energy and Willmore Conjecture. New York. CRC Press. A Chapman & Hall Book, 2018.

References

1. Chtchterbakov E. Free boundary value problem for ideal fluid with surface and wedging forces. *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, 1998, vol. 17, iss. 4, pp. 937–961.
2. Shcherbakov E. Equilibrium state of a pending drop with inter-phase layer. *Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen*, 2012, vol. 31, pp. 1–15.
3. Shcherbakov E., Shcherbakov M. On equilibrium of the pendant drop taking into account the flexural rigidity of intermediate layer. *Doklady Physics*, 2012, vol. 53, iss. 6, pp. 243–244.
4. Shcherbakov E., Shcherbakov M. Equilibrium of the pendant drop its flexural rigidity of intermediate layer being accounted for. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2016, no 3, pp. 87–94.
5. Shcherbakov E. Generalized minimal Liouville Surfaces. *Int. Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2009, vol. 54, iss. 2, pp. 179–192.
6. Finn R. *Equilibrium capillary surfaces*. New York, Springer, 1986, 2016.
7. Toda M. Willmore Energy: Brief Introduction and Survey. In: Toda M. (ed.) *Willmore Energy and Willmore Conjecture*. New York. CRC Press. A Chapman & Hall Book, 2018.

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2019
© Щербаков М. Е., 2019

Статья поступила 9 января 2019 г.