УДК 539.375 DOI: 10.31429/vestnik-16-1-21-25

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО КРИТЕРИЯ РАЗРУШЕНИЯ ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ

Дунаев В. И., Титов Н. Г., Кесова Е. Ф., Приходько М. Г.

RESEARCH OF MATHEMATICAL MODEL OF THE ENERGY CRITERION FOR FRACTURE OF BRITTLE MATERIALS

V. I. Dunaev[1], N. G. Titov[2], E. F. Kesova[1], M. G. Prikhodko[1]

[1] Kuban State Technological University, Krasnodar, 350072, Russia
[2] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: liza-kesova@mail.ru

Abstract. In this paper, we study a mathematical model of the criterion for the destruction of fragile materials at $\varepsilon \ll 1$ where ε is the relative size of the resulting defect. Under the assumption that the crack does not “close” during development, it is shown that the marginal curve represents an ellipse in the space of main stresses P_1, P_2. If we additionally assume that we have the physico-mechanical meaning of the determining parameter of the limiting curve, it is found that the relative size of the resulting defect ε can be chosen significantly less than one. At the same time, the crack “opens” during development. An estimate of the relative size of the crack from the bottom was obtained from the condition of the non-closure of the crack faces.

Keywords: destruction, brittle material, defect, cracks, mathematical model, stretching, compression.

1. Об энергетическом критерии хрупкого разрушения при образовании «узкого» изолированного дефекта

В [1, 2] получен макроскопический критерий хрупкого разрушения в виде предельной кривой в пространстве главных напряжений P_1 и P_2, определяющий комбинации главных напряжений P_1 и P_2, при которых возможно развитие узкого изолированного дефекта.

Этот критерий справедлив при $\varepsilon = b\left(a_*\right)/a_* \ll 1$ и имеет вид

$$P_1^2 + P_2^2 - 2\nu_* P_1 P_2 + \\ + 2\alpha_0 T_0 k_1 \left(1-\nu_*\right)\left(P_1 - P_2\right) = \\ = \frac{32\mu\left(1-\nu_*\right)}{\chi+1}\frac{\gamma}{a_*}. \quad (1.1)$$

Здесь a_*, $b\left(a_*\right)$ — характерно критические линейные размеры образовавшегося дефекта, α_0 — линейный коэффициент теплового расширения, T_0 — абсолютная температура, $k_1 = \frac{E}{1-\nu}$ — для плоского напряженного состояния, $k_1 = \frac{E}{1-2\nu}$ — для плоской деформации, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ — модуль сдвига, $\chi = \frac{3-\nu}{1+\nu}$ — для плоского напряженного состояния $\chi = 3-4\nu$ — для плоской деформации, γ — удельная внутренняя энергия, затраченная на образование единицы новой поверхности, $\nu_* = \nu(a_*)$ — параметр предельной кривой.

При этом, следуя [3], в качестве наиболее простой модели тела при образовании в нем изолированного дефекта целесообразно принять плоскость, ослабленную достаточно узкой полостью (дефектом) эллиптической

Дунаев Владислав Игоревич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры оборудования нефтяных и газовых промыслов Института нефти, газа и энергетики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: dunaevatv@mail.ru.

Титов Николай Георгиевич, преподаватель Института среднего профессионального образования Кубанского государственного университета; e-mail: titov_nik@mail.ru.

Кесова Елизавета Феодоровна, преподаватель кафедры оборудования нефтяных и газовых промыслов Института нефти, газа и энергетики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: liza-kesova@mail.ru.

Приходько Марина Геннадьевна, магистрант кафедры оборудования нефтяных и газовых промыслов Института нефти, газа и энергетики Кубанского государственного технологического университета; e-mail: aniram-m03@mail.ru.

формы [1,2], когда на границе дефекта напряжения обращаются в нуль, а на бесконечности приложены главные напряжения P_1 и P_2, действующие во взаимно перпендикулярных направлениях, напряжения P_1 при этом составляет с осью ox_1 на плоскости x_1ox_2 угол α.

В данном случае [1–3] имеем

$$\nu(a) = \frac{\varepsilon(a) + b'(a)}{2 + \varepsilon(a) + b'(a)(1 + 2\varepsilon(a))}. \quad (1.2)$$

Здесь $\varepsilon(a) = \frac{b(a)}{a}$, a, $b(a)$ — относительный и характерные линейные размеры соответственно.

При этом для определения положения дефекта критических размеров с учетом условия $\varepsilon \ll 1$ при $a = a_*$ [1–3] имеем

$$|\cos 2\alpha| = \frac{a_*^2}{a^2}, \quad a \geqslant a_* > 0. \quad (1.3)$$

Здесь $\alpha(a)$ — величина, определяющая положения трещины относительно направления действия главных напряжений P_1 и P_2.

Из выражения (1.3) следует, что независимо от комбинаций критических напряжений P_1 и P_2 соответствующих точкам, лежащим на предельной кривой (1.1), дефект всегда ориентирован или перпендикулярно к линии действия растягивающего напряжения, или вдоль линии действия сжимающего напряжения, т.е. величина $\alpha(a_*)$ принимает одно из двух значений: 0, либо $\frac{\pi}{2}$.

Допустим, что при развитии трещина не закрывается. Это означает, что $b'(a) \geqslant 0$ в некоторой окрестности значения a_*.

Оценим выражение (1.2):

$$0 < \frac{\varepsilon + b'}{2 + \varepsilon + b'(1 + 2\varepsilon)} < \frac{\varepsilon + b'}{2 + \varepsilon + b'} = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon + b'} + 1} < 1,$$

т.е. $0 < \nu(a) < 1$.

Выразим коэффициенты придельной кривой (1.1) через экспериментальные значения пределов прочности материала при одноосном растяжении P^+ и сжатии P^- при температуре опыта $T = T_0$. При $P_2 = 0$, $P_1 = P$ выражение (1.1) можно представить в виде

$$P^2 + 2\alpha_0 T_0 k_1 (1 - \nu_*) P - \frac{32\mu (1 - \nu_*)}{(\chi + 1)\pi} \frac{\gamma}{a_*} = 0.$$

Это квадратное уравнение относительно P. Поскольку $\nu_* < 1$ его решение имеет вид

$$P^{\pm} = -\alpha_0 T_0 (1 - \nu_*) k_1 \sqrt{\psi_1},$$

$$\psi_1 = [\alpha_0 T_0 (1 - \nu_*) k_1]^2 + 32\mu (1 - \nu_*) \gamma [\pi (\chi + 1) a_*]^{-1},$$

выполняются равенства

$$P^+ + P^- = -2\alpha_0 T_0 (1 - \nu_*) k_1,$$
$$P^+ P^- = -32 (1 - \nu_*) \gamma [\pi (\chi + 1) a_*]^{-1}. \quad (1.4)$$

Коэффициент Пуассона ν для всех хрупких материалов удовлетворяет неравенствам $0 < \nu < 0{,}5$. Тогда $k_1 \neq 0$. Если дополнительно предположить, что $\alpha_0 \neq 0$, $T_0 \neq 0$, из первого равенства (1.4) имеем

$$2\nu_* = 2 + \frac{P^+ + P^-}{\alpha_0 T_0 k_1}.$$

С учетом второго равенства (1.4) и последней формулы представим критерий (1.1) в следующем виде:

$$P_1^2 + P_2^2 - \left(2 + \frac{P^+ + P^-}{\alpha_0 T_0 k_1}\right) P_1 P_2 - \left(P^+ + P^-\right)(P_1 + P_2) + P^+ P^- = 0. \quad (1.5)$$

Итак, предельная кривая имеет вид (1.5), если экспериментальные значения P^+ и P^- известны.

При этом, если $\nu_* < 1$, а сумма $P^+ + P^-$ всегда отрицательна, для хрупких материалов выражение (1.5) соответствует эллипсу в пространстве главных напряжений P_1 и P_2.

Если в (1.1) заведомо предложить, что $\nu_* = \nu_1 = \nu$ [4] при плоском напряженном состоянии и $\nu_* = \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}$ при плоской деформации, выражение (1.1) примет вид

$$P_1^2 + P_2^2 - 2\nu_1 P_1 P_2 + 2\alpha_0 T_0 E_1 (P_1 + P_2) = \frac{4E_1 (1 - \nu_1)}{\pi} \frac{\gamma}{a_*}. \quad (1.6)$$

В выражении (1.6) $E_1 = E$ для плоского напряжённого состояния и $E = \frac{E_1}{1-\nu_1^2}$ для плоского деформированного состояния.

Очевидно, что для построения предельной кривой (1.1) в данном случае достаточно найти из эксперимента предел прочности только при растяжении или только при сжатии. Действительно, полагая в критерии (1.6) $P_2 = 0$, $P_1 = P$ получаем

$$P^2 + 2\alpha_0 T_0 E_1 P - \frac{4E_1\,(1-\nu_1)}{\pi}\frac{\gamma}{a_*} = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$\begin{gathered} P^{\pm} - \alpha_0 T_0 E_1 \pm \sqrt{\theta}, \\ \theta = (\alpha_0 T_0 E_1)^2 + 4E_1\,(1-\nu_1)\,\gamma(\pi a_*)^{-1}, \\ P^+ + P^- = -2\alpha_0 T_0 E_1, \\ P^+ P^- = -4E_1\,(1-\nu_1)\,\gamma\,(\pi a_*)^{-1}. \end{gathered} \tag{1.7}$$

Тогда с учётом выражений (1.7) критерий (1.6) запишем в виде

$$\begin{gathered} P_1^2 + P_2^2 - 2\,\nu_1 P_1 P_2 + 2\alpha_0 T_0 E_1\,(P_1 + P_2) - \\ - P^+\left(2\alpha_0 T_0 E_1 + P^+\right) = 0 \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} P_1^2 + P_2^2 - 2\,\nu_1 P_1 P_2 + 2\alpha_0 T_0 E_1\,(P_1 + P_2) - \\ - P^-\left(2\alpha_0 T_0 E_1 + P^-\right) = 0. \end{gathered}$$

В этом случае для построения предельной кривой достаточно определить из эксперимента предел прочности только при растяжении P^+ или только при сжатии P^-.

При принятом предположении относительное значение ν_* первая формула (1.7) имеет смысл физического соотношения между физико-механическими параметрами материала P^+, P^-, E и температуры T_0, которое может быть проверено экспериментально.

Из второго равенства (1.7) следует также, что

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{a_*} &= -\frac{P^+P^-}{4E_1\,(1-\nu_1)} = \\ &= \frac{P^-\,(2\alpha_0 T_0 E_1 + P^-)\,\pi}{4E_1\,(1-\nu_1)} = \\ &= \frac{P^+\,(2\alpha_0 T_0 E_1 + P^+)}{4E_1\,(1-\nu_1)}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Выражение (1.8) позволяет теоретически определить величину γ, если известен критический размер дефекта a_* [5].

2. К исследованию математической модели критерия хрупкого разрушения

Если допустить, что величина ν_1 является физико-механическим параметром материала [4], то можно дополнительно предположить, что $\nu(a) = \nu_1$ при всех a. Это предположение позволяет определить зависимость $\varepsilon\,(a)$

Определим зависимость $\varepsilon\,(a)$ при образовании дефекта эллиптической формы. В этом случае зависимость $\nu(a)$ имеет достаточно простой вид. С учётом выражения (1.2) при всех a имеем

$$\frac{\varepsilon + b'}{2 + \varepsilon + b'(1 + 2\varepsilon)} = \nu_1. \tag{2.1}$$

Поскольку $b' = \varepsilon + a\varepsilon'$, из равенства (2.1) получим уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{(1-\nu_1) - 2\,\nu_1\varepsilon}{2\left[\nu_1\varepsilon^2 - (1-\nu_1)\,\varepsilon + \nu_1\right]}d\varepsilon = \frac{da}{a}. \tag{2.2}$$

Общее решение уравнения (2.2) имеет вид $a = \frac{C_0}{|\nu_1\varepsilon^2 - (1-\nu_1)\varepsilon + \nu_1|}$.

Здесь C_0 — произвольная постоянная, которую определим из начального условия $\varepsilon\,(a_*) = \varepsilon_0$, где ε_0 — любое достаточно малое положительное число. Такому начальному условию удовлетворяет зависимость

$$\varepsilon\,(a) = \frac{(1-\nu_1) - \sqrt{\psi_2}}{2\nu_1}, \tag{2.3}$$

$$\begin{gathered} \psi_2 = (1-\nu_1)^2 - 4\nu_1^2 + \\ + 4\nu_1\frac{a_*^2}{a^2}\left[\nu_1\varepsilon_0^2 - (1-\nu_1)\,\varepsilon_0 + \nu_1\right]. \end{gathered}$$

Рассмотрим выражение под корнем в правой части равенства (2.3). Для любого фиксированного $a_* > 0$ имеем

$$\begin{gathered} (1-\nu_1)^2 - 4\nu_1^2 + \\ + 4\nu_1\frac{a_*^2}{a^2}\left[\,\nu_1\varepsilon_0^2 - (1-\nu_1)\,\varepsilon_0 + \nu_1\right] = \\ = ((1-\nu_1) - 2\varepsilon_0\nu_1)^2. \end{gathered}$$

Следовательно, функция $\varepsilon\,(a)$ определена в некоторой окрестности значения a_* и

$$\varepsilon\,(a) = \varepsilon\,(a_*) = \varepsilon_0,$$

где ε_0 — сколь угодно малая величина для любого фиксированного значения a_*. Предположение $\varepsilon \ll 1$ в данном случае оправданно.

Вычислим $\varepsilon'(a)$

$$\varepsilon'(a) = \frac{a_*^2\left[\nu_1\varepsilon_0^2 - (1-\nu_1)\,\varepsilon_0 + \nu_1\right]}{a^3\sqrt{\psi_3}}, \qquad (2.4)$$

$$\psi_3 = (1-\nu_1)^2 - 4\nu_1^2 + \\ + 4\nu_1\frac{a_*^2}{a^2}\left[\nu_1\varepsilon_0^2 - (1-\nu_1)\,\varepsilon_0 + \nu_1\right].$$

Тогда для любого $a_* > 0$ существует окрестность значения a_*, в которой с учетом равенства $b' = \varepsilon + a\varepsilon'$ и равенства (2.4) при надлежащем выборе чисел ε_0 $(0 < \varepsilon_0 < \frac{1-\nu}{2\nu}$, $0 < \nu < 0{,}5)$ $b'(a) > 0$.

Таким образом, при сформулированном предположении трещина не закрывается при развитии.

Оценим величину $\varepsilon(a_*)$ снизу. Рассмотрим условие «несмыкания» берегов трещины.

В криволинейной системе координат (ρ,θ), связанной с конформным преобразованием $z = \omega(\xi)$ внешности единичного круга $|z| = 1$ на внешность криволинейного (в частности, эллиптического) отверстия, имеет место соотношение [6]

$$2\mu\left|\omega'(\xi)\right|(u_\rho + iu_\theta) = \\ = \frac{\bar{\xi}}{\rho}\overline{\omega'(\xi)}\left\{\chi\varphi(\xi) - \frac{\omega(\xi)}{\omega'(\xi)}\overline{\varphi'(\xi)} - \psi(\xi)\right\}. \qquad (2.5)$$

В (2.5) u_ρ и u_θ — компоненты перемещения относительно криволинейной системы координат, $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ — комплексные потенциалы, регулярные во внешности единичного круга $|\xi| = 1$ функции, определяющие по формулам Колосова–Мусхелишвили [6] решение соответствующей задачи теории упругости.

Поскольку на границе дефекта напряжения обращаются в ноль, граничные условия для функции $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ при $|\xi| = 1$ имеют вид [6]

$$\overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)}\varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = 0,$$

$$\sigma = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi$$

и выражение (2.5) принимает, с учетом последнего равенства при $|\xi| = 1$, вид

$$u_\rho + iu_\theta = \frac{\chi+1}{2\mu}e^{-i\theta}\frac{\overline{\omega'(e^{i\theta})}}{|\omega'(e^{i\theta})|}\varphi\left(e^{i\theta}\right). \qquad (2.6)$$

В (2.6) для соответствующей задачи теории упругости (для плоскости ослабленной эллиптическим отверстием) имеем [3, 6]

$$\omega(\xi) = R\left(\xi + \frac{m}{\xi}\right), \quad R = \frac{a}{2}(1+\varepsilon),$$

$$m = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a},$$

a и b — полуоси эллипса

$$\varphi(\xi) = R\Gamma\xi - R\left(\Gamma m + \bar{\Gamma}'\right)\frac{1}{\xi}, \qquad (2.7)$$

$$\Gamma = \frac{1}{4}(P_1 + P_2), \quad \Gamma' = -\frac{1}{2}(P_1 + P_2)\,e^{-2i\alpha}.$$

С учётом выражений (2.7) формула (2.6) принимает вид

$$u_\rho + iu_\theta = \\ = \frac{\chi+1}{2\mu}R\frac{(1-me^{2i\theta})(\Gamma - \left(\Gamma m + \bar{\Gamma}'\right)e^{-2i\theta})}{\sqrt{1-2m\cos 2\theta + m^2}}. \qquad (2.8)$$

Отделяя в равенстве (2.8) мнимую и вещественную части, получим

$$u_\rho = \frac{\chi+1}{16\mu}\frac{a}{\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}}\times \\ \times\left[2(P_1+P_2)\left(\varepsilon^2\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + (P_1 - P_2)\times\right. \\ \left.\times\left((1+\varepsilon)^2\cos 2(\alpha-\theta) - \left(1-\varepsilon^2\right)\cos 2\alpha\right)\right];$$

$$u_\theta = \frac{\chi+1}{32\mu}\frac{a}{\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}}\times \\ \times\left[(P_1 - P_2)((1+\varepsilon)^2\sin 2(\alpha-\theta) - \right. \\ \left. - \left(1-\varepsilon^2\right)(1+\varepsilon)^2\sin 2\alpha)\right]. \qquad (2.9)$$

Из геометрического смысла компонентов смещения u_ρ и u_θ относительно криволинейной системы координат, связанной с соответствующим конфорным преобразованием следует, что набегание берегов трещины возможно только при отрицательных значениях компоненты u_ρ. Компонента u_ρ принимает отрицательные значения для всех $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ при

$P_1 = P_2 = P < 0$, т.е. в случае всестороннего сжатия. При этом компонента u_θ тождественно равна нулю. В случае всестороннего сжатия из (2.9) получаем

$$u_\rho = \frac{\chi+1}{16\mu} aP\sqrt{\varepsilon^2\cos^2\theta + \sin^2\theta}. \qquad (2.10)$$

Из соотношения (2.10) следует, что компонента u_ρ достигает максимального значения при $\theta = \frac{\pi}{2}$. Тогда условие несмыкания берегов трещины имеет вид

$$b - \left| u_\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| > 0. \qquad (2.11)$$

Подставив в условие (2.11) значение $u_\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)$, окончательно получаем

$$\varepsilon\left(a_*\right) > \frac{\chi+1}{4\mu}\left|P_*^-\right|. \qquad (2.12)$$

В выражении (2.12) P_*^- — предел прочности при всестороннем сжатии в условиях плоского напряженного состояния или плоской деформации соответственно.

Заметим, что величина $\frac{\chi+1}{4\mu}\left|P_*^-\right|$ в выражении (2.12) значительно меньше единицы для известных хрупких материалов.

Литература

1. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Об энергетическом условии разрушения твёрдых тел // ДАН. 2000. Т. 372. № 1. С. 43–45.
2. *Дунаев И.М., Дунаев В.И.* Энергетическое условие разрушения твёрдых тел // Механика твёрдого тела. 2003. № 6. С. 69–81.
3. *Дунаев В.И., Молдованов С.Ю., Лозовой С.Б, Георгияди В.Г.* Хрупкое разрушение материалов при развитии «узких» изолированных дефектов // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. 2015. №3. С. 26–37.
4. *Dunaev I.M., Dunaev V.I.* Macroscopic Criterion for Brittle Fructure of Solids // Proc. Of the 7-th EVROMECH. Solid Mechanics Conference 2009. Portugal, Lisbon. P. 117–118.
5. *Ильюшин А.А., Ленский Б.С.* Сопротивление материалов. М.: Гос. из-во физ.-мат. лит., 1959. 371 с.
6. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966. 707 с.

References

1. Dunaev, I.M., Dunaev, V.I. On the energy condition for fracture of solids. *Proc. of Physics*, 2000, vol. 372, no. 1, pp. 43–45. (In Russian)
2. Dunaev, I.M., Dunaev, V.I. Energy condition for fracture of solids. *Mechanics of solids*, 2003, no. 6, pp. 69–81. (In Russian)
3. Dunaev, V.I., Moldavanov, S.Yu., Lozova, S.B., Georgiadi, V.G. Fragile destruction of materials in the development of “narrow” isolated defects. *Ecological Bulletin of the scientific centers of the black sea economic cooperation*, 2015, no. 3, pp. 26–37. (In Russian)
4. Dunaev, I.M., Dunaev, V.I. Macroscopic Criterion for Brittle Fracture of Solids. *Proc. Of the 7-th EVROMECH. Solid Mechanics Conference 2009.* Portugal, Lisbon, pp. 117–118.
5. Ilyushin, A.A., Lenski, B.S. *Mechanics of materials.* GOS. iz-vo Fiz.-Mat. lit., Moscow, 1959. (In Russian)
6. Muskhelishvili, N.A. *Some basic problems of mathematical theory of elasticity.* Nauka, Moscow, 1966. (In Russian)

Статья поступила 25 января 2019 г.