

ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Иванычев Д. А.

AXISYMMETRIC THERMOELASTIC DEFORMATION OF TRANSVERSELY ISOTROPIC ROTATION BODIES

D. A. Ivanychev

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, 398055, Russia
e-mail: lsivdml@mail.ru

Abstract. The aim of the work is to determine the axisymmetric stress-strain state of anisotropic bodies of revolution under the influence of an external load, and unbalanced and under conditions of temperature influences with missing internal heat sources.

This problem is provided by the development of the method of boundary states on the class of axisymmetric problems of thermoelasticity for anisotropic bodies of revolution. Development of the theory of constructing the bases of spaces of internal states, including displacement, deformation, stresses and temperature. The basis is formed on the basis of the general solution of the thermoelasticity problem for a transversely isotropic body of revolution and the formation of the relations determining the desired elastic state.

To determine the elastic axisymmetric state from the action of mass forces, it is assumed that the inverse method is extended to a class of problems for anisotropic bodies. By rheology, the inverse method is similar to the method of boundary states. The basis of the space of states is formed with the help of fundamental polynomials. After the orthogonalization of the basis, the desired state is determined by the Fourier series, the coefficients of which are definite integrals whose nuclei constitute the multiplication of temperatures.

The solution of the boundary value problem of mechanics is assumed to be a means of the method of boundary states. The basis of the space of internal states is formed according to the fundamental system of Weierstrass polynomials. The mechanical characteristics are expanded in a series of elements of the orthonormal basis, where the scalar products having the energy sense act as coefficients.

The final result is written as the sum of three independent states. The solution of the test problem for a circular cylinder from a rock with the corresponding conclusions is given, the design problem for a body of revolution is a stepped cylinder. Explicit and indirect signs of the convergence of the solution of problems and graphical visualization of the results are presented.

Keywords: anisotropy, thermoelasticity, boundary state method, inverse method, mass forces, axisymmetric problems, boundary value problems.

Детали из современных материалов, интерпретируемых с точки зрения теории упругости как анизотропные в отношении упругих свойств, часто пребывают в сложных эксплуатационных условиях. Помимо нагрева, на них действуют поверхностные и массовые силы. Определение напряженно-деформированного состояния от совокупности таких воздействий в силу сложной физической природы материалов составляет актуальную научную задачу.

В случае упругих деформаций анизотропного тела напряжения, деформации и температура чаще всего связываются с помощью

уравнений Дюгамеля–Неймана, вывод которых с точки зрения термодинамики приведен в книге Новацкого [1]. Задачи термоупругости для анизотропных тел рассматривались в книгах Б.Е. Победри [2], А.С. Кравчука [3].

Задачи определения температурного поля по заданным на границе значениям температур, тепловых потоков для изотропных однородных и неоднородных тел исследовались методом граничных состояний с возмущениями в работе [4].

В работе [5] рассматривается осесимметричная задача статической термоупругости

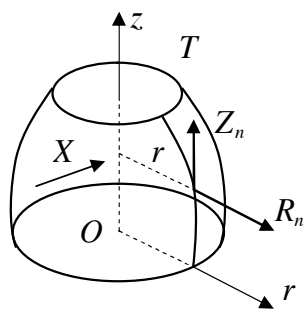


Рис. 1. Трансверсное тело вращения

для трансверсально-изотропного круглого цилиндра конечной длины. С помощью специальной функции напряжения выводится основное уравнение поставленной задачи. Доказывается, что оператор симметричный и положительно определенный, тем самым решение исходного уравнения сводится к задаче о минимальном функционале.

В работе [6] показан обратный метод определения напряженно-деформированного состояния упругого изотропного тела под действием непрерывных объемных сил.

Решение краевых осесимметричных задач теории упругости для тел вращения методом граничных состояний проведено в работе [7].

1. Постановка задачи

Рассматривается равновесие трансверсально-изотропного тела, ограниченного одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения, под действием поверхностных усилий R_n , Z_n , симметрично распределенных относительно оси вращения, массовых сил \mathbf{X} и находящегося в поле установившихся температур T (рис. 1). Поставленную задачу будем называть краевой задачей термоупругости.

Решение задачи можно разделить на три этапа: сначала решается температурная задача с определением внутреннего состояния ξ^0 , определяется упругое состояние от действия массовых сил ξ^X , затем решается краевая задача механики от заданных внешних сил, приложенных к поверхности тела или перемещений ξ , а полученные поля механических характеристик складываются:

$$\Omega = \xi^0 + \xi^X + \xi. \quad (1.1)$$

В этом случае можно проводить анализ, например, исходя из теорий прочности и жесткости от суммарного воздействия всех факторов

на деформируемое твердое тело, при необходимости изменяя кинематику движения, внешние нагрузки или температуру на стадии проектирования. Необходимость дискретизации задачи обусловлена тем, что сложно создать теорию, охватывающую все три воздействия разной физической природы, «тем более, что состояния от каждого из них удовлетворяют разным определяющим соотношениям».

Целью работы является распространение энергетического метода граничных состояний [8] на класс статических задач теории термоупругости для анизотропных тел, обобщение обратного метода [6] на класс задач по определению механических характеристик от массовых сил для анизотропных тел, а также решение классической краевой задачи теории анизотропной упругости, тем самым позволяя получать суммарный результат от действия всех факторов и проводить оценку уровня напряжений и конфигурации деформированной границы твердых тел, работающих в тяжелых условиях.

2. Общее решение осесимметричной задачи эластостатики без учета температурных деформаций

В работе [9] на основе метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных).

В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в цилиндрах с осью η , имеющих в каждой точке плоскость упругой симмет-

рии, параллельную плоскости zy [9]:

$$\begin{aligned}\sigma_z^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1^2 \phi_1'(\zeta_1) + \gamma_2^2 \phi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_y^{pl} &= \operatorname{Re}[\phi_1'(\zeta_1) + \phi_2'(\zeta_2)]; \\ \sigma_{zy}^{pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_1 \phi_1'(\zeta_1) + \gamma_2 \phi_2'(\zeta_2)]; \quad (2.1) \\ \sigma_\eta^{pl} &= \nu_r \sigma_y^{pl} + \nu_z \frac{E_r}{E_z} \sigma_z^{pl}; \quad \tau_{z\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0; \\ u_z^{pl} &= \operatorname{Re}[p_1 \phi_1(\zeta_1) + p_2 \phi_2(\zeta_2)]; \\ u_y^{pl} &= \operatorname{Re}[iq_1 \phi_1(\zeta_1) + iq_2 \phi_2(\zeta_2)],\end{aligned}$$

где константы q_1 и p_1 определены упругими параметрами материала, $\zeta_j = z/\gamma_j + iy$, γ_j — комплексные корни характеристического уравнения

$$\begin{aligned}\left(1 - \nu_z^2 \frac{E_r}{E_z}\right) \gamma_j^4 - \left[\frac{E_z}{G_z} - 2\nu_z(1 + \nu_r)\right] \gamma_j^2 + \\ + (1 - \nu_r^2) \frac{E_z}{G_r} = 0,\end{aligned}$$

где функции $\phi_j(\zeta_j)$ — аналитические по своим переменным, E_z и E_r — модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии, ν_z , ν_r — коэффициенты Пуассона, G_r и G_z — модули сдвига [9].

Переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям [7]

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \\ \sigma_{zr} &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad \sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta}, \\ \sigma_r - \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2 \sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad (2.2) \\ \sigma_r + \sigma_\theta &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \\ u &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_y^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \\ w &= \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u_z^{pl}}{r\sqrt{r^2 - y^2}} dy, \quad v = 0.\end{aligned}$$

3. Температурные деформации и напряжения трансверсально-изотропного тела

Установившееся температурное поле $T_0^{pl}(z, y)$ плоского вспомогательного состояния с отсутствующими внутри источниками тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности [9]

$$\left(k_z \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_r \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) T_0^{pl}(z, y) = 0, \quad (3.1)$$

где k_z и k_r — коэффициенты теплопроводности в направлении оси симметрии и перпендикулярно к ней,

$$\begin{aligned}T_0^{pl} &= \frac{g_0}{E_z} \operatorname{Re}[\phi_0'(\zeta_0)], \quad (3.2) \\ \zeta_0 &= z/\gamma_0 + iy, \quad \gamma_0 = \sqrt{k_z/k_r},\end{aligned}$$

$$g_0 = \frac{(E_z - \nu_z^2 E_r)(\gamma_1^2 - \gamma_0^2)(\gamma_2^2 - \gamma_0^2)}{\gamma_0^2(\alpha_z E_z + \alpha_r \nu_z E_r) - \alpha_r E_z(1 + \nu_r)}.$$

Перемещения, соответствующие температурному полю [9],

$$u_z^{0pl} = \operatorname{Re}[p_0 \phi_0(\zeta_0)]; \quad u_y^{0pl} = \operatorname{Re}[iq_0 \phi_0(\zeta_0)];$$

$$u_\eta^{0pl} = 0;$$

$$\begin{aligned}\sigma_z^{0pl} &= -\operatorname{Re}[\gamma_0^2 \phi_0'(\zeta_0)]; \\ \sigma_y^{0pl} &= \operatorname{Re}[\phi_0'(\zeta_0)];\end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\sigma_{zy}^{0pl} = -\operatorname{Re}[\gamma_0 \phi_0'(\zeta_0)];$$

$$\sigma_\eta^{0pl} = \operatorname{Re}[(1 - \varepsilon_0) \phi_0'(\zeta_0)]; \quad \tau_{z\theta} = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0,$$

где p_0 , q_0 , ε_0 — постоянные, зависящие от упругих констант и коэффициентов температурного расширения α_z и α_r , $\phi_0(\zeta_0)$ — некоторая аналитическая функция переменной ζ_0 .

Переход к пространственному осесимметричному температурному состоянию осуществляется по зависимостям (2.2), только берутся уже плоские температурные состояния.

4. Основные положения метода граничных состояний

Метод является новым энергетическим методом решения задач уравнений математической физики. Он показал свою эффективность в решении краевых задач теории упругости как для изотропных, так и для анизотропных сред, в решении задач термоупругости, гидродинамики идеальной жидкости, динамики (колебаний) изотропных тел.

Фундамент метода составляют пространства внутренних Ξ и граничных Γ состояний

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots\};$$

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k, \dots\}.$$

Внутреннее состояние определяется набором компонент вектора перемещений, теноров деформаций и напряжений

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}. \quad (4.1)$$

Основной сложностью формирования решения в МГС является конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды, также возможно использование каких-либо частных или специальных решений.

Скалярное произведение в пространстве Ξ внутренних состояний выражается через внутреннюю энергию упругого деформирования (отсюда и принадлежность метода к классу энергетических). Например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния тела, занимающего область V , получим

$$(\xi_1, \xi_2) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV,$$

причем в силу коммутативности состояний среды

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 dV = \int_V \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 dV.$$

Граничное состояние определяется компонентами вектора перемещения точек границы и поверхностных усилий

$$\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j,$$

где n_j – компонента нормали к границе.

В пространстве граничных состояний Γ скалярное произведение выражает работу

внешних сил по поверхности тела S , например для 1-го и 2-го состояния будем иметь

$$(\gamma_1, \gamma_2) = \int_S p_i^1 u_i^2 dS,$$

причем в силу принципа возможных перемещений

$$(\gamma_1, \gamma_2) = (\gamma_2, \gamma_1) = \int_S p_i^1 u_i^2 dS = \int_S p_i^2 u_i^1 dS.$$

Доказано, что в случае гладкой границы оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом [8]. По определению каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$, причем это соответствие взаимно-однозначное: $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет определение внутреннего состояния свести к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от краевых условий. В случае первой и второй основной задачи механики проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомого внутреннего (ξ) и граничного (γ) состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \xi_k; \quad \gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \gamma_k \quad (4.2)$$

или в явном виде:

$$p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k;$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k.$$

Коэффициенты Фурье в случае первой основной задачи с заданными на границе усилиями $\mathbf{p} \in \{p_r, p_\theta, p_z\}$ в цилиндрических координатах, имеют вид

$$c_k = (\mathbf{p}, \mathbf{u}^k) = \int_S (p_r u^k + p_\theta v^k + p_z w^k) dS, \quad (4.3)$$

где $\mathbf{u}^k \in \{u^k, v^k, w^k\}$ – вектор перемещения в базисном элементе $\gamma_k = \{u_i^k, p_i^k\}$.

5. Решение температурной задачи

В данной работе температурное поле, дающее значение температуры в любой точке тела, будем считать известным.

Определение механического состояния анизотропного тела от температурного поля осуществляется средствами, схожими по структуре со средствами МГС. В качестве внутреннего состояния $\Xi^0 = \{\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0, \dots\}$ принимаются наборы

$$\xi_k^0 = \left\{ \left\{ u^0, v^0, w^0 \right\}, \left\{ \varepsilon_z^0, \varepsilon_r^0, \varepsilon_\theta^0, \varepsilon_{zr}^0, \varepsilon_{z\theta}^0, \varepsilon_{r\theta}^0 \right\}, \left\{ \sigma_z^0, \sigma_r^0, \sigma_\theta^0, \tau_{zr}^0, \tau_{z\theta}^0, \tau_{r\theta}^0 \right\}, T^0 \right\}. \quad (5.1)$$

Плоские вспомогательные температурные состояния могут быть сконструированы, придавая функции ϕ_0 в (3.2), (3.3) следующие значения:

$$\phi_0 = \xi_0^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Далее по соотношениям (2.2) вычисляются компоненты пространственного температурного состояния, образуя базис Ξ^0 .

Ортонормирование базиса пространства Ξ^0 осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [10], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимаются (например, для 1-го и 2-го состояния)

$$(\xi_1^0, \xi_2^0) = \int_V T_1^0 T_2^0 dV.$$

Искомое температурное состояние представляет собой ряд Фурье

$$\xi^0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^0 \xi_k^0, \quad (5.2)$$

где ξ_k^0 — элементы ортонормированного базиса внутреннего состояния Ξ^0 , c_k^0 — коэффициенты Фурье, которые рассчитываются следующим образом:

$$c_k^0 = \int_V T T_k^0 dV, \quad (5.3)$$

где T_k^0 — температура в базисном элементе ξ_k^0 , T — заданное поле температуры. После восстановления поля температуры, удовлетворяющего уравнению теплопроводности (3.1), определяются вектор перемещения, тензоры деформаций и напряжений соответствующих температурному состоянию.

6. Состояние от массовых сил

В работе [6] изложена методика определения напряженно-деформированного состояния изотропных тел от действия неконсервативных непрерывных объемных сил.

Для построения поля перемещений от массовых сил для плоских вспомогательных состояний применяется фундаментальная система многочленов $y^\alpha z^\beta$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{Xpl}(y, z)$, образуя некоторое допустимое упругое состояние

$$\mathbf{u}^{Xpl} = \left\{ \left\{ y^\alpha z^\beta, 0 \right\}, \left\{ 0, y^\alpha z^\beta \right\} \right\}.$$

Далее согласно (2.2) определяются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}^X(r, z)$ пространственного осесимметричного состояния.

Перебор всевозможных вариантов в пределах $\alpha + \beta \leq n$, ($n = 1, 2, 3, \dots$) позволяет получить множество состояний, которое содержит конечномерный базис, дающий возможность разложить произвольный вектор непрерывных массовых сил в ряд Фурье по его элементам при увеличении числа n до бесконечности.

Наличие базиса позволяет провести его ортогонализацию [10] в соответствии со скалярным произведением (например, для 1-го и 2-го состояния)

$$(\mathbf{X}^{(1)}, \mathbf{X}^{(2)}) = \int_V \mathbf{X}^{(1)} \cdot \mathbf{X}^{(2)} dV;$$

$$\mathbf{X}^{(k)} = \{R^{(k)}(r, z), Z^{(k)}(r, z)\}.$$

Любой непрерывный вектор объемных сил может быть представлен в виде ряда Фурье, разложенного по элементам ортонормированного базиса,

$$\mathbf{X} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^X \mathbf{X}_{орт}^{(k)}, \quad c_k^X = (\mathbf{X}, \mathbf{X}_{орт}^{(k)}), \quad (6.1)$$

где $\mathbf{X} = \{R, Z\}$ заданные массовые силы.

Каждому базисному вектору $\mathbf{X}^{(k)}$ соответствуют вектор перемещения и тензоры деформаций и напряжений, в совокупности образующие внутреннее состояние от действия массовых сил

$$\xi^X = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^X \xi_k^X. \quad (6.2)$$

Таблица 1. Ортонормированный базисный набор функций температуры

	T^0
ξ_1^0	-0,70711
ξ_2^0	-0,61237z
ξ_3^0	$0,75375 + 0,07294r^2 - 0,59266z^2$
ξ_4^0	$1,28853z + 0,21475r^2z - 0,58163z^3$
ξ_5^0	$-0,6645 - 0,21216r^2 - 0,01278r^4 + 1,7238z^2 + 0,41552r^2z^2 - 0,56268z^4$

7. Построение базиса внутренних состояний в краевой задаче

Базисные наборы (4.1) можно конструировать, генерируя возможные варианты для двух аналитических функций $\phi_1(\varsigma_1)$ и $\phi_2(\varsigma_2)$ плоского вспомогательного состояния (2.1). Эти функции составляют наборы

$$\left(\begin{array}{c} \phi_1(\varsigma_1) \\ \phi_2(\varsigma_2) \end{array} \right) \in \left\{ \left(\begin{array}{c} \varsigma_1^n \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ \varsigma_2^n \end{array} \right), \right. \\ \left. \left(\begin{array}{c} i\varsigma_1^n \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ i\varsigma_2^n \end{array} \right), \dots \right\}, \quad (7.1)$$

$$n = 1, 2, \dots$$

В соответствии с (7.1) определяются все механические характеристики плоского вспомогательного состояния, и далее следует переход к трехмерному состоянию по зависимостям (2.2).

Дальнейший ход решения уже в пространственном состоянии осуществляется по методике, описанной в п.т. 4.

8. Решение задачи для цилиндра

Рассмотрим термоупругое равновесие трансверсально-изотропного кругового цилиндра, занимающего область $D = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$, из горной породы алевролита крупного темно-серого [11]. После процедуры обезразмеривания с масштабным коэффициентом $\eta^* = 10^5$ кгс/см² упругие характеристики материала: $E_z = 6,21$; $E_r = 5,68$; $G_z = 2,55$; $\nu_z = 0,22$; $\nu_r = 0,24$. В качестве температурных характеристик выберем характеристики схожей по структуре горной породы доломита. В качестве коэффициентов теплопроводности возьмем экстремальные значения коэффициента линейного температурного расширения [12, 13] $k_z = 1,6$, $k_r = 6,5$ (масштабный коэффициент $\eta^k = 1$ Вт/(м·К)).

Аналогично коэффициенты температурного расширения (масштабный коэффициент $\eta^\alpha = 1 \cdot 10^{-6}$ /град) $\alpha_z = 6,7$, $\alpha_r = 8,6$ [14, 15].

Рассмотрим первую основную задачу механики с внешними усилиями, имитирующим всестороннее растяжение:

$$p_r = 1, p_z = 0, (r = 1, -2 \leq z \leq 2);$$

$$p_r = 0, p_z = -1, (z = -2, 0 \leq r \leq 1);$$

$$p_r = 0, p_z = 1, (z = 2, 0 \leq r \leq 1),$$

и установившимся температурным полем $T = z$. На цилиндр действуют массовые силы, направленные противоположно осевому направлению $Z = -z - 2$ и имитирующие центробежные силы инерции $R = r$.

Температурная задача. Ортонормированный базис функций температуры T^0 в (5.1) представлен в табл. 1.

Коэффициенты Фурье (5.3)

$$c_k^0 \in \{0, -1,63299, 0, 0, 0, \dots\}.$$

Восстановленное температурное упругое поле (5.2) ξ^0

$$u^0 = -2,00736rz;$$

$$w^0 = -0,95057r^2 + 7,72338z^2; \quad T^0 = z;$$

$$\sigma_r^0 = -71,6334z; \quad \sigma_\theta^0 = -71,6334z;$$

$$\sigma_z^0 = 19,9333z; \quad \tau_{rz}^0 = -9,96667r;$$

$$\tau_{z\theta}^0 = \tau_{r\theta}^0 = 0.$$

Состояние от массовых сил. Ортонормированный усеченный базис массовых сил \mathbf{X} представлен в табл. 2. При формировании базиса первые семь элементов удалены в силу $\mathbf{X} = 0$.

Коэффициенты Фурье (6.1)

$$c_k^X \in \{2,82843, 1,6323, -1, 0, 0, \dots\}.$$

Восстановленное состояние от массовых сил (6.2) ξ^X :

$$u^X = -0,19607rz^2;$$

$$w^X = 0,13927z^2 + 0,10642z^3;$$

Таблица 2. Ортонормированный базисный набор массовых сил

	R	Z		R	Z
ξ_1^X	0	-0,707	ξ_6^X	0	$1,224 - 2,45r^2$
ξ_2^X	0	-0,612z	ξ_7^X	0	$1,403z - 0,584z^3$
ξ_3^X	-r	0	ξ_8^X	$1,118r - 0,838rz^2$	0
ξ_4^X	0	-0,79 - 0,593z ²	ξ_9^X	0	$1,060z - 2,121r^2z$
ξ_5^X	-0,866rz	0	ξ_{10}^X	$2,828r - 4,242r^3$	0

Таблица 3. Ортонормированный базисный набор компонент вектора перемещения в краевой задаче

	u	w
ξ_1	0,138r	-0,253z
ξ_2	-0,123r	-0,127z
ξ_3	0,101rz	$0,0492r^2 - 0,105z^2$
ξ_4	-0,11683rz	$0,1565r^2 - 0,0368z^2$
ξ_5	$-0,090r - 0,023r^3 + 0,0849rz^2$	$0,18204z + 0,0848r^2z - 0,05612z^3$
ξ_6	$0,198r - 0,028r^3 - 0,1278rz^2$	$-0,113z + 0,232r^2z - 0,0008z^3$

$$\begin{aligned} \sigma_r^X &= 0,56286z - 1,00571z^2; & \sigma_r^\Omega &= 1 - 71,0706z - 1,00571z^2; \\ \sigma_\theta^X &= 0,56286z - 1,00571z^2; & \sigma_\theta^\Omega &= 1 - 71,0706z - 1,00571z^2; \\ \sigma_z^X &= 2z + 1,5z^2; \quad \tau_{rz}^X &= -1rz; & \sigma_z^\Omega &= 1 + 21,9333z + 1,5z^2; \\ \tau_{z\theta}^X &= \tau_{r\theta}^X = 0; \quad R^X = r; \quad Z^X &= -2 - z. & \tau_{rz}^\Omega &= -9,96667r - rz; \quad \tau_{z\theta}^\Omega = \tau_{r\theta}^\Omega = 0. \end{aligned}$$

Полученные выражения для напряжений удовлетворяют уравнениям равновесия с учетом массовых сил [9].

Краевая задача теории упругости. Следует отметить, что заданные силы должны составлять уравновешенную систему. Компоненты вектора перемещения в ортонормированном базисном наборе (7.1) представлены в табл. 3.

Коэффициенты Фурье (4.3)

$$c_k \in \{0,04524, -0,74842, 0, 0, 0, 0, \dots\}.$$

Восстановленное состояние (4.2) от заданных сил ξ :

$$u = 0,09867r; \quad w = 0,08373z;$$

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = 1; \quad \tau_{rz} = \tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0.$$

Окончательное решение краевой задачи термоупругости (1.1) для трансформного цилиндра Ω :

$$u^\Omega = 0,09867r - 2,00736rz - 0,19608rz^2;$$

$$w^\Omega = -0,95057r^2 + 0,08373z + 7,86266z^2 + 0,106427z^3;$$

Решение тестовой задачи является строгим.

9. Решение расчетной задачи для тела вращения

Рассмотрим теперь тело вращения занимающего область D (рис. 2),

$$D = D_1 + D_2;$$

$$D_1 = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 2, 0 \leq z \leq 2\};$$

$$D_2 = \{(z, r) \mid 0 \leq r \leq 1, -1 \leq z \leq 0\}.$$

Граничные условия имитируют неоднородное растяжение в направлении r (рис. 2): $p_r = z \cdot 10^2, p_z = 0, (r = 2, 0 \leq z \leq 2)$; на остальных участках усилия равны нулю. Температурное поле $T = z^2$. Массовые силы $\mathbf{X} \in 10 \cdot \{r^2, z^2 + r\}$.

При определении упругого поля от температуры использовался ортонормированный базис в 20 элементов. Рис. 3 иллюстрирует восстановленное поле температуры, которое сопоставляется с заданным для верификации решения.

При определении упругого поля от массовых сил применялся усеченный ортонормированный базис в 16 элементов. Сравнение заданного поля массовых сил $|X| = \sqrt{R^2 + Z^2}$

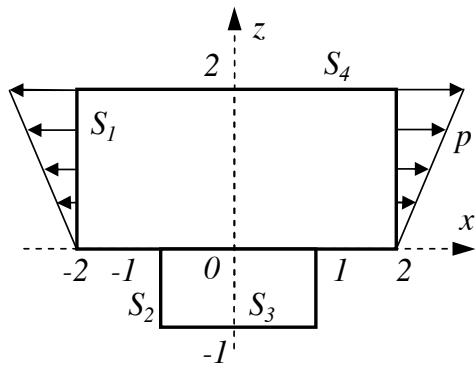


Рис. 2. Меридианное сечение тела вращения

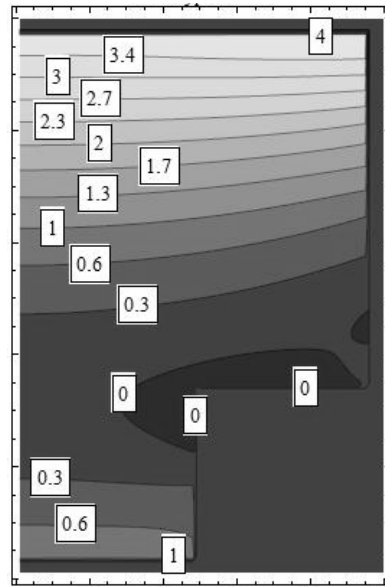
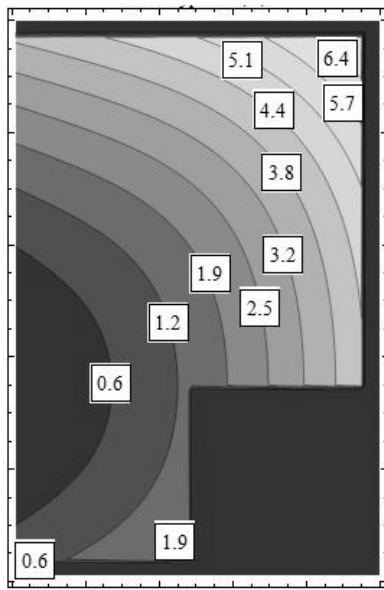
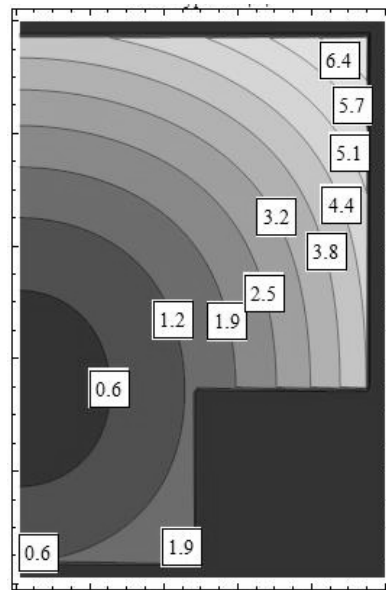


Рис. 3. Восстановленное поле температуры



а)



б)

Рис. 4. Изолинии: а) заданное поле массовых сил; б) полученное в ходе решения

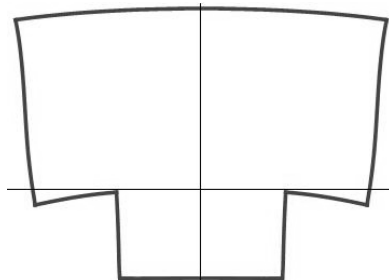


Рис. 5. Контур деформированного сечения

с восстановленным, представлено в графическом виде на рис. 4 (масштаб значений 1/10).

При решении краевой задачи применялся базис из 55 элементов. Проверка осуществлялась сопоставлением полученных на границе усилий с заданными.

Результирующее состояние представляет собой сумму трех найденных состояний от действия температуры, массовых сил и внешней нагрузки. На рис. 5 представлен контур результирующего деформированного меридианного сечения тела (приведен в гипертрофированном в виде в силу необозримости малых деформаций).

Таким образом, получена возможность определения напряженно-деформированного состояния анизотропных тел вращения от действия поверхностных и массовых сил, а также температуры. Точность решения в каждой из задач сильно зависит от геометрии тела и заданных условий, однако трудности преодолеваются наращиванием используемого базиса внутренних состояний.

Литература

1. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
2. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. М.: Изд-во МГУ, 1984. 336 с.
3. *Кравчук А.С., Кожевников В.П., Уржумцев Ю.С.* Механика полимерных и композиционных материалов. М.: Наука, 1985. 304 с.
4. *Пеньков В.Б., Викторов Д.В., Саталкина Л.В.* Развитие метода граничных состояний на класс задач термоупругости // *Материалы международной научной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики»* (Россия, Тула, 17-21 ноября 2008 г.). Тула: ТулГУ, 2008. С. 274–277.
5. *Ханьжов Б.Д.* Вариационное решение осесимметричной задачи термоупругости для трансверсально-изотропного цилиндра конечной длины. *Изв. вузов. Серия матем.*, 1967, № 12. С. 84–89.
6. *Левина Л.В., Кузьменко Н.В.* Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов* (Казань, 20–24 августа 2015 г.). / Сост. Д.Ю. Ахметов, А.Н. Герасимов, Ш.М. Хайдаров, под ред. Д.А. Губайдуллина, А.М. Елизарова, Е.К. Липачёва. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2015. С. 2276–2278.
7. *Иванычев Д.А.* Метод граничных состояний в приложении к осесимметричным задачам для

анизотропных тел // *Вести высших учебных заведений Черноземья. Научно-технический и производственный журнал.* Липецк, ЛГТУ. №1. 2014. С. 19–26.

8. *Пеньков В.Б., Пеньков В.В.* Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // *Дальневосточный математический журнал.* 2001. Т.2, №2. С. 115–137.
9. *Александров А.Я., Соловьев Ю.И.* Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1978, 464 с.
10. *Саталкина Л.В.* Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // *Сб. тезисов докладов научной конференции студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета.* Липецк: ЛГТУ, 2007. С. 130–131.
11. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, 416 с.
12. *Юдин В.А., Королёв А.В., Афанаскин И.В., Волыпин С.Г.* Теплоёмкость и теплопроводность пород и флюидов баженовской свиты – исходные данные для численного моделирования тепловых способов разработки // М.: ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН, 2015. 22 с.
13. *Добрынин В.М., Вендельштейн Б.Ю., Кожевников Д.А.* Петрофизика (Физика горных пород): Учеб. для вузов. 2-ое изд. перераб. и доп. под редакцией доктора физико-математических наук Д.А. Кожевникова // М.: ФГУП Издательство «Нефть и газ» РГУ нефти и газа им. И.М. Губкина, 2004, 368 с.
14. *Невилль А.М.* Свойства бетона. М.: Издательство литературы по строительству, 1972. 343 с.
15. *Физические свойства горных пород и полезных ископаемых (петрофизика). Справочник геофизика / Под ред. Н.Б. Дортман.* М.: Недра, 1984. 455 с.

References

1. Novaczki V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Mir, Moscow, 1975. (In Russian)
2. Pobedrya B.E. *Mexanika kompozicionny'x materialov* [Mechanics of composite materials]. Izdatelstvo MGU, Moscow, 1984. (In Russian)
3. Kravchuk A.S., Kozhevnikov V.P., Urzhumcev Yu.S. *Mexanika polimerny'x i kompozicionny'x materialov* [Mechanics of polymeric and composite materials]. Nauka, Moscow, 1985. (In Russian)
4. Penkov V.B., Viktorov D.V., Satalkina L.V. *Razvitie metoda granichny'x sostoyanij na klass zadach termouprugosti* [Development of the boundary state method for a class of thermoelasticity problems]. *Materialy' mezhdunarodnoj*

- nauchnoj konferencii "Sovremennyye problemy matematiki, mexaniki, informatiki"* [Proceedings of the international scientific conference "Current problems of mathematics, mechanics, computer science"], Rossiya, Tula, TulGU, 2008. pp. 274–277. (In Russian)
5. Xanzhov B.D. Variacionnoe reshenie osesimmetrichnoj zadachi termouprugosti dlya transversal'no-izotropnogo cilindra konechnoj dliny' [Variational solution of the axisymmetric problem of thermoelasticity for a transversely isotropic cylinder of finite length]. *Izvestiya vuzov. Matematika* [News of universities. Maths], 1967, No. 12, pp. 84–89. (In Russian)
 6. Levina L.V., Kuzmenko N.V. Obratny'j metod e'ffektivnogo analiza sostoyaniya uprugogo tela ot massovy'x sil iz klassa neprery'vny'x [The inverse method of effective analysis of the state of an elastic body from mass forces from the class of continuous]. *XI Vserossijskij s"ezd po fundamental'ny'm problemam teoreticheskoy i prikladnoj mexaniki: sbornik dokladov (Kazan', 20–24 avgusta 2015 g.)* [XI All-Russian Congress on the fundamental problems of theoretical and applied mechanics: a collection of reports (Kazan, August 20–24, 2015)]. *Cost. D.Yu. Axmetov, A.N. Gerasimov, Sh.M. Xajdarov, pod red. D.A. Gubajdullina, A.M. Elizarova, E.K. Lipachyova. Kazan': Izdatelstvo Kazan. un-ta, 2015, pp. 2276–2278. (In Russian)*
 7. Ivany'chev D.A. Metod granichny'x sostoyanij v prilozhenii k osesimmetrichny'm zadacham dlya anizotropny'x tel [The boundary state method applied to axisymmetric problems for anisotropic bodies]. *Vesti vy'sshix uchebny'x zavedenij Chernozem'ya. Nauchno-texnicheskij i proizvodstvenny'j zhurnal* [Conduct higher education institutions Chernozem. Scientific, technical and industrial journal]. Lipeck, LGTU. No. 1, 2014, pp. 19–26. (In Russian)
 8. Penkov V.B., Penkov V.V. Metod granichny'x sostoyanij dlya resheniya zadach linejnoy mexaniki [The boundary state method for solving linear mechanics problems]. *Dal'nevostochny'j matematicheskij zhurnal* [Far Eastern Mathematical Journal], 2001, Vol. 2, No. 2, pp. 11–137. (In Russian)
 9. Aleksandrov A.Ya., Solov'ev Yu.I. *Prostranstvenny'e zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funkcij kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)], Moscow, Nauka Publ, Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury', 1978, 464 p. (In Russian)
 10. Satalkina L.V. Narashhivanie bazisa prostranstva sostoyanij pri zhestkix ogranicheniyax k e'nergoemkosti vy'chislenij [Building up the basis of the state space with hard constraints on the energy intensity of computations] *Sbornik tezisov dokladov nauchnoj konferencii studentov i aspirantov Lipeckzogo gosudarstvennogo texnicheskogo universiteta* [Collection of theses of reports of the scientific conference of students and graduate students of Lipetsk State Technical University], Lipeck, LGTU, 2007, pp. 130–131. (In Russian)
 11. Lexniczkij S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela* [Theory of elasticity of anisotropic body]. *Izd. 2, Moscow: Nauka Publ., 1977, 416 p. (In Russian)*
 12. Yudin V.A., Korolyov A.V., Afanaskin I.V., Vol'pin S.G. *Teployomkost' i teploprovodnost' porod i flyuidov bazhenovskoj svity' – isxodny'e dannyye dlya chislennogo modelirovaniya teplovy'x sposobov razrabotki* [Heat capacity and thermal conductivity of rocks and fluids of the Bazhenov formation are the initial data for the numerical simulation of thermal methods of development] Moscow, FGU FNCz NIISI RAN, 2015. 22 p. (In Russian)
 13. Dobry'nin V.M., Vendel'shtejn B.Yu., Kozhevnikov D.A. *Petrofizika (Fizika gorny'x porod): Ucheb. dlya vuzov. 2-oe izd. pererab. i dop. pod redakciej doktora fiziko-matematicheskix nauk D.A. Kozhevnikova* [Petrophysics (Physics of rocks): Proc. for universities. 2nd ed. reclaiming and add. Edited by Doctor of Physical and Mathematical Sciences D.A. Kozhevnikova] Moscow, FGUP Izdatel'stvo "Neft' i gaz" RGU nefti i gaza im. I.M. Gubkina, 2004, 368 p. (In Russian)
 14. Nevil' A.M. *Svojstva betona* [Concrete properties]. *Izdatel'stvo literatury' po stroitel'stvu. Moskva, 1972, 343 p. (In Russian)*
 15. *Fizicheskie svojstva gorny'x porod i polezny'x iskopaemy'x (petrofizika). Spravochnik geofizika* [Physical properties of rocks and minerals (petrophysics). Handbook of Geophysics] Pod red. N.B. Dortman, – 2-e izd., pererab. i dop, Moskva, Nedra, 1984, 455 p. (In Russian)