Математика

УДК 517.54

DOI: 10.31429/vestnik-16-2-6-14

АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ОБЫКНОВЕННОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ЧАСТЬЮ

Задорожная О. В., Кочетков В. К.

ALTERNATIVE METHODS OF INTEGRABILITY OF NONLINEAR ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER WITH POLYNOMIAL PART

O. V. Zadorozhnaya, V. K. Kochetkov

Kalmyk State University, Elista, 358000, Russia

e-mail: ovz_70@mail.ru

Abstract. Alternative methods of integrability of nonlinear ordinary differential equations of the first order with polynomial part. The method of research of integrability of the nonlinear differential equation of the first order with polynomial part, on the basis of introduction of parameters allowing to bring the initial equation to system of the differential equations which ways of integrability are known is developed in work. The equations connecting the parameters and coefficients of the original equation determining the conditions of integrability of the considered differential equation are composed. Integral and algebraic representations of solutions of differential equations are specified. The presented facts are structured by the method of gradualism: first, attention is paid to the equation with the polynomial of the second degree (Riccati equation), examples are given. Then the equation with a polynomial of the third degree is considered. Finally, we investigate a differential equation with a polynomial of any order.

Keywords: analysis, geometric theory of functions of a complex variable, differential equations.

1. Введение

1.1. Альтернативный метод исследования интегрируемости дифференциального уравнения Риккати и его обобщения

Объектом рассмотрения в статье является дифференциальное уравнение Риккати

$$w' + a_0(z) + a_1(z)w + a_2(z)w^2 = 0 \qquad (1.1)$$

и его обобщения вида

$$\begin{aligned} w' + a_0(z) + a_1(z)w + a_2(z)w^2 + \\ + a_3(z)w^3 = 0, \\ w' + \sum_{k=0}^{n} a_k(z)w^k = 0. \end{aligned} \qquad (1.1')$$

Задача. Разработать альтернативный метод исследования интегрируемости дифференциальных уравнений вида (1.1), (1.1′) с целью увеличения диапазона случаев интегрируемости этих уравнений для последующего обобщения, систематизации, осуществления соответствующих выводов.

Основными составляющими представленного метода исследования являются: а) введение параметров; б) сведение рассмотрения исходного дифференциального уравнения к рассмотрению нескольких дифференциальных уравнений, методы интегрируемости которых известны, в частности к уравнению Бернулли [1–11]

$$w' + p(z)w = q(z)w^m, \qquad (1.2)$$

решение которого выражается формулой

$$w(z) = \left(e^{\mathrm{I}}\left(C + \int (1-m)q(z)e^{\mathrm{I}}\right)\right)^{\frac{1}{1-m}}, \qquad (1.3)$$

где $e^{\mathrm{I}} = e^{\int (m-1)p(z)\,\mathrm{d}z}$, $m \in \mathrm{Re}$, функции $p(z)$, $q(z)$ регулярны в области $B_z \subset C$.

Для простоты записи в дальнейшем аргумент z не указывается.

Задорожная Ольга Владимировна, канд. пед. наук, доцент кафедры алгебры и анализа Калмыцкого государственного университета им. Б. Б. Городовикова; e-mail: ovz_70@mail.ru.

Кочетков Владимир Константинович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры алгебры и анализа Калмыцкого государственного университета им. Б.Б. Городовикова; e-mail: kvk1106@mail.ru

1.2. Уравнение Риккати

Введением параметров $k = k(z)$, $m = m(z)$ преобразуем уравнение (1.1):

$$w'(k+1-k) + a_0 + w(a_1(m+1-m)) + \\ + a_2 w^2 = 0. \quad (1.4)$$

С учетом выражения (1.4), составим два дифференциальных уравнения

$$kw' + a_1 m w = -a_0 \quad (1.5)$$

и

$$(1-k)w' + a_1(1-m)w = -a_2 w^2. \quad (1.6)$$

Разделив обе части выражений в (1.5), (1.6) на соответствующие коэффициенты при w', получим

$$w' + \frac{m}{k} a_1 w = -\frac{a_0}{k} \quad (1.7)$$

и

$$w' + \frac{1-m}{1-k} a_1 w = -\frac{a_2}{1-k} w^2. \quad (1.8)$$

Укажем решение $w = w_1(z)$ дифференциального уравнения (1.7)

$$w = w_1 = \frac{1}{e^{\mathrm{II}}} \left(c_1 + \int \left(-\frac{a_0}{k} \right) e^{\mathrm{II}} \, \mathrm{d}z \right), \quad (1.9)$$

или

$$w_1 = v_1^{-1} u_1, \quad (1.10)$$

где

$$v_1 = e^{\mathrm{II}}, \quad u_1 = c_1 + \int \left(-\frac{a_0}{k} \right) v_1 \, \mathrm{d}z, \quad (1.11)$$

$$e^{\mathrm{II}} = e^{\int \frac{m}{k} a_1 \, \mathrm{d}z}.$$

В соответствии с (1.2), (1.3) решение $w = w_2(z)$ дифференциального уравнения (1.8) запишем в виде

$$w = w_2 = \\ = \left(e^{\mathrm{III}} \left(c_2 + \int \frac{a_2}{1-k} \frac{1}{e^{\mathrm{III}}} \, \mathrm{d}z \right) \right)^{-1} \quad (1.12)$$

или в виде

$$w = w_2 = v_2^{-1} \left(c_2 + \int \frac{a_2}{1-k} v_2^{-1} \, \mathrm{d}z \right)^{-1} = \\ = v_2^{-1} u_2^{-1}, \quad (1.13)$$

где

$$v_2 = e^{\mathrm{III}}, \quad u_2 = \int \frac{a_2}{1-k} v_2^{-1} \, \mathrm{d}z, \quad (1.14)$$

$$e^{\mathrm{III}} = e^{\int \frac{1-m}{1-k} a_1 \, \mathrm{d}z}.$$

Считая, что $w_1 = w_2$, составим, используя (1.9)–(1.14), равенство вида

$$v_1^{-1} u_1 = v_2^{-1} u_2^{-1} \quad (1.15)$$

или

$$v_2 u_1 = v_1 u_2^{-1}. \quad (1.16)$$

Объединяя вышеизложенное, используя выражения в (1.1)–(1.16), сформулируем теорему.

Теорема 1. Пусть некоторые функции $k(z)$, $m(z)$ и коэффициенты $a_0(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$ дифференциального уравнения Риккати (1.1) регулярны в области $D_z \subset C$, $k(z) \neq \neq 0{,}1 - k(z) \neq 0$ в D_z, и удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{e^{\mathrm{II}}} \left(c_1 + \int \left(-\frac{a_0}{k} \right) e^{\mathrm{II}} \, \mathrm{d}z \right) = \\ = e^{\mathrm{III}} \left(c_2 - \int \frac{a_2}{1-k} \frac{1}{e^{\mathrm{III}}} \, \mathrm{d}z \right)^{-1}, \quad (1.17)$$

Тогда функция $w = w_1(z)$ в (1.9), (1.10) или $w = w_2(z)$ в (1.12), (1.13) удовлетворяют уравнению Риккати (1.1).

Замечание. Равенство (1.17) является уравнением, связывающим введенные параметры и коэффициенты исходного дифференциального уравнения (1.1), а также является условием интегрируемости рассматриваемого уравнения (1.1).

1.3. Реализация уравнения связи в частном случае

Известно, что уравнение Риккати $w' = = a_0 + a_1 w + a_2 w^2$ путем линейных преобразований искомой функции можно привести к виду $w' = \pm w + R$. Заметим, что уравнение (1.1) при $a_1 = 0$ примет вид

$$w' + a_0 + a_2 w^2 = 0, \quad (1.18)$$

а уравнение связи (1.17) при $a_1 = 0$ перепишется в виде

$$u_1 = \frac{1}{u_2} \text{ или } u_2 = \frac{1}{u_1},$$

где

$$u_1 = c_1 + \int \left(-\frac{a_0}{k}\right) \mathrm{d}z, \qquad\qquad (1.19)$$
$$u_2 = c_2 + \int \frac{a_2}{1-k} \mathrm{d}z.$$

Дифференцируя обе части выражения $u_2 = 1/u_1$, с учетом последнего равенства получим

$$u_1^2 = \frac{1-k}{k} \frac{a_0}{a_2}.$$

Откуда имеем

$$u_1 = \left(\frac{1-k}{k} \frac{a_0}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.20)$$

Продифференцируем обе части, учитывая (1.19), получим

$$-\frac{a_0}{k} = \left(\left(\frac{1-k}{k} \frac{a_0}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'. \qquad (1.21)$$

Так как $\frac{1}{k} = \frac{1-k}{k} + 1$, перепишем

$$-a_0 - a_2 \left(\frac{1-k}{k} \frac{a_0}{a_2}\right) = \left(\left(\frac{1-k}{k} \frac{a_0}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'.$$

Это выражение можно записать в виде

$$u_1' + a_0 + a_2 u_1^2 = 0$$

или в виде

$$w' + a_0 + a_2 w^2 = 0,$$

так как при $a_1 = 0$ имеем $w = u_1$.

Вывод. При $a_1 = 0$ функция

$$w = u_1 = \left(\frac{1-k}{k} \frac{a_0}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

является решением уравнения $w' + a_0 + a_2 w^2 = 0$, где функции k, a_0, a_2 — составляющие компоненты уравнения (1.21).

Замечание. С учетом того, что $u_2 = \frac{1}{u_1}$ и (1.20), функцию u_2 можно записать в виде

$$u_2 = \left(\frac{1-k}{k} \frac{a_0}{a_2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

1.4. Интегральное и алгебраическое представление решений дифференциальных уравнений вида $w' = \pm w + R$ и $w' + a_0 + a_2 w^2 = 0$

Выражение u_1 в (1.19) является интегральным представлением решения уравнения (1.18) при условии связи (1.21), а u_1 в (1.20) является алгебраическим представлением решения.

Рассматривая вопрос интегрируемости дифференциального уравнения (1.18), можно отметить:

1. Задавая функции $k(z)$, $a_0(z)$ из (1.21), определяем a_2 как функцию k и a_0: $a_2 = a_2(k, a_0)$. В этом случае с учетом (1.18) и (1.20), имеем

$$w' + a_0 + a_2(k, a_0) w^2 = 0,$$
$$u_1 = \left(\frac{1-k}{k} \frac{a_0}{a_2(k, a_0)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2. Задавая $k(z)$, $a_2(z)$ из (1.21), определяем $a_0 = a_0(k, a_2)$. В этом случае имеем

$$w' + a_0(k, a_2) + a_2 w^2 = 0,$$
$$u_1 = \left(\frac{1-k}{k} \frac{a_0(k, a_2)}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3. Если из (1.21) функция $k = k_0(z)$ выражается через a_0, a_2: $k = k_0(a_0, a_2)$, имеем

$$w' + a_0 + a_2 w^2 = 0, \quad u_1 = \left(\frac{1-k_0}{k_0} \frac{a_0}{a_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.5. Первый вариант следствия теоремы 1

Перепишем соотношения (1.15)–(1.17) в виде

$$u_1 u_2 = A$$

или в виде

$$u_2 = \frac{A}{u_1}, \qquad (1.22)$$

где

$$A = V_1 V_2^{-1} = e^{\int \frac{n}{k(1-k)} \mathrm{d}z} \qquad (1.23)$$

и

$$n = (m-k) a_1. \qquad (1.24)$$

С учетом (1.23), (1.24) заметим, что имеет место соотношение

$$A' = A \frac{n}{k(1-k)} = \frac{V_1 V_2^{-1}}{k(1-k)} n. \qquad (1.25)$$

Продифференцируем обе части выражения $u_1 u_2 = A$,

$$u_1' u_2 + u_1 u_2' = A'.$$

Подставляя (1.22) в последнее выражение, получим соотношение

$$u_1' \frac{A}{u_1} + u_1 u_2' = A',$$

которое перепишем в виде квадратного относительно u_1 уравнения

$$u_2' u_1^2 - A' u_1 + A u_1' = 0.$$

Решим относительно u_1 вышеуказанное квадратное уравнение

$$u_1 = \frac{A' \pm \sqrt{D}}{2u_2'}, \tag{1.26}$$

где дискриминант D в (1.26) равен

$$D = A'^2 - 4u_2' u_1'. \tag{1.27}$$

Для простоты в (1.26) возьмем знак «+». Используя (1.11), (1.14), (1.22), преобразуем дискриминант D в (1.27)

$$D = A^2 \cdot \left[\frac{n^2 + 4a_0 a_2 k(1-k)}{k(1-k)^2} \right].$$

Откуда следует, что равенство

$$D = 0 \tag{1.28}$$

будет иметь место при выполнении условия

$$n = 2B, \tag{1.29}$$

где

$$B = \sqrt{-a_0 a_2 k(1-k)}. \tag{1.30}$$

Подставим (1.24) в (1.29)

$$(m-k)a_1 = 2B. \tag{1.31}$$

Разделив на k обе части выражения в (1.31), получим

$$\frac{m}{k} a_1 = a_1 + \frac{2}{k} B. \tag{1.32}$$

При условии (1.28) выражение в (1.26) перепишем в виде

$$u_1 = \frac{A'}{2u_2'}. \tag{1.33}$$

Используя (1.14), (1.23), (1.25), (1.29), перепишем в (1.33) в виде

$$u_1 = \frac{(1-k)V_1 V_2^{-1} n}{2a_2 V_2^{-1} k(1-k)} = \frac{V_1 n}{2ka_2} = \frac{V_1 2B}{2ka_2} = V_1 \frac{B}{ka_2}. \tag{1.34}$$

Продифференцируем обе части в (1.34),

$$u_1' = V_1' \frac{B}{ka_2} + V_1 \left(\frac{B}{ka_2} \right)'. \tag{1.35}$$

После деления на V_1 получим

$$-\frac{a_0}{k} = \frac{m}{k} a_1 \frac{B}{ka_2} + \left(\frac{B}{ka_2} \right)'.$$

Используя (1.32), перепишем это выражение в виде

$$-\frac{a_0}{k} = \frac{B}{ka_2} \left(a_1 + \frac{2}{k} B \right) + \left(\frac{B}{ka_2} \right)', \tag{1.36}$$

связывающим параметр k и коэффициенты дифференциального уравнения (1.1) и являющимся условием интегрируемости уравнения (1.1).

Из (1.10), (1.34) имеем

$$w = w_1 = \frac{B}{ka_2}. \tag{1.37}$$

Объединяя вышеизложенное, сформулируем следствие теоремы 1.

Следствие 1. Пусть при вышеуказанных обозначениях функции $k = k(z)$, $m = m(z)$, коэффициенты a_0, a_1, a_2 дифференциального уравнения (1.1) удовлетворяют условиям (1.31), (1.36). Тогда функция $w = w(z)$ в (1.37) удовлетворяет уравнению (1.1).

Замечание 1. Меняя значение параметра k, будем получать, с учетом (1.36), различные условия связи между коэффициентами исходного уравнения (1.1).

Замечание 2. Отметим, что имеют место и другие варианты следствий теоремы 1.

Следствие 1′. Полагая

$$B = -\frac{a_0 a_2}{a_1}, \quad \frac{Ba_1}{ka_2} = -\frac{a_0}{k},$$

выражение в (1.36) перепишем в виде

$$-\frac{2B^2}{ka_1 k} + \left(\frac{B}{ka_2} \right)' = 0.$$

С учетом (1.30), выразив параметр k через коэффициенты a_0, a_1, a_2, получим следующее выражение, являющееся условием интегрируемости уравнения (1.1):

$$-\frac{a_0}{k} = \frac{m}{k}a_1\frac{B}{ka_2} + \left(\frac{B}{ka_2}\right)'.$$

Следствие 1′′. При

$$\frac{B}{ka_2} = c \text{ или } B = cka_2, \quad c = \text{const},$$

с учетом (1.30) выразим параметр k через коэффициенты a_0, a_1, a_2, а (1.36) перепишем в виде

$$\frac{a_0}{k} = c(a_1 + 2ca_2).$$

При полученном k это выражение будет условием интегрируемости дифференциального уравнения (1.1), т.е., если $c = \text{const}$ и $k = a_0(c(a_1 + 2ca_2))^{-1}$, то дифференциальное уравнение (1.1) интегрируемо.

1.6. Второй вариант следствия теоремы 1

При $m = k$ выражения в (1.11) перепишутся в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= e^{\int a_1\,\mathrm{d}z} = v, \\ u_1 &= c_1 + \int -\frac{a_0}{k}v\,\mathrm{d}z, \end{aligned} \tag{1.38}$$

а выражения в (1.14) примут вид

$$\begin{aligned} v_2 &= e^{\int a_2\,\mathrm{d}z} = v, \\ u_2 &= \int \frac{a_2}{1-k}v^{-1}\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Таким образом, в данном случае имеет место равенство $v_1 = v_2$. В этом случае их общее значение обозначим через v,

$$v_1 = v_2 = v = e^{\int a_1\,\mathrm{d}z}. \tag{1.40}$$

С учетом (1.38), (1.39), (1.40) равенства (1.15)–(1.17) запишутся в виде

$$u_1u_2 = 1.$$

Продифференцируем обе части:

$$u_1'u_2 + u_1u_2' = 0.$$

Подставляя $u_2 = \frac{1}{u_1}$ в последнее выражение, получим уравнение

$$u_1'\frac{1}{u_1} + u_1u_2' = 0,$$

которое приведём к квадратному относительно u_1 алгебраическому уравнению $u_2'u_1^2 + u_1' = 0$.

Решим относительно u_1 последнее квадратное алгебраическое уравнение

$$u_1 = \sqrt{-u_1'\,(u_2')^{-1}},$$

взяв для определенности положительный знак перед радикалом.

С учетом (1.38), (1.39) это решение запишем в виде

$$u_1 = vB, \tag{1.41}$$

где

$$B = \sqrt{\frac{a_0}{a_1}\frac{1-k}{k}}. \tag{1.42}$$

Дифференцируя обе части выражения в (1.42), получим выражение $u_1' = v'B + vB'$, которое с учетом (1.38), (1.39), а также соотношения

$$v' = va_1,$$

перепишутся в виде

$$-\frac{a_0}{k}v = va_1B + vB'$$

или, после деления на v,

$$-\frac{a_0}{k} = a_1B + B', \tag{1.43}$$

а также в виде

$$a_1 = -\frac{B'}{B} - \frac{a_0}{kB}. \tag{1.44}$$

Укажем решение B дифференциального уравнения (1.43)

$$B = e^{-\int a_1\,\mathrm{d}z}\left(C + \int -\frac{a_0}{k}e^{\int a_1\,\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\right), \quad C = \text{const}, \tag{1.45}$$

которое, с учетом (1.40), в виде

$$B = v^{-1}\left(C + \int -\frac{a_0}{k}v\,\mathrm{d}z\right), \quad C = \text{const}, \tag{1.46}$$

или, с учетом (1.42), перепишется в виде

$$\sqrt{\frac{a_0}{a_2}\frac{1-k}{k}} = e^{-\int a_1\,\mathrm{d}z}\left(C + \int -\frac{a_0}{k}e^{\int a_1\,\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}z\right), \tag{1.47}$$

Подставляя (1.41), при условии (1.42), в (1.10), получим

$$w = w_1 = B.$$

Выражения (1.44)–(1.47) являются условиями интегрируемости дифференцируемости уравнения (1.1).

В выражении (1.44), используя (1.42), коэффициент a_1 можно выразить через a_0, a_2, k, а используя (1.47), коэффициент a_2 можно выразить через k, a_0, a_1 (в виде v).

Объединяя вышеизложенное, а также учитывая соотношения (1.11), (1.39). (1.40), (1.47), сформулируем второй вариант следствия теоремы 1.

Следствие 2. При выполнении любого из условий (1.43)–(1.47) дифференциальное уравнение 1 интегрируется.

Укажем дополнение к следствию 2 в форме следствия 3.

Полагая

$$\sqrt{\frac{1-k}{k}} = \alpha, \quad \sqrt{\frac{a_0}{a_2}} = \beta,$$

имеем

$$B = \alpha\beta, \quad B' = \alpha'\beta + \alpha\beta'.$$

Преобразуем левую часть в (1.43).

$$-\frac{a_0}{k} = -a_0\left(\frac{1-k}{k}\right) - a_0 = -a_0\alpha^2 - a_0.$$

Используя полученные выражения, перепишем (1.43) в виде

$$\alpha'\beta + \alpha\beta' + a_1\alpha\beta = -a_0\alpha^2 - a_0.$$

Из компонентов этого выражения составим дифференциальное, относительно α, уравнение

$$\alpha' + \alpha\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{a_0}{\beta}, \tag{1.48}$$

а также алгебраическое, относительно α, уравнение

$$-a_0\alpha = a_1\beta, \quad \alpha = -\frac{a_1\beta}{a_0}. \tag{1.49}$$

Укажем решение α дифференциального уравнения (1.48).

$$\alpha = \frac{1}{\beta}\left(c - \int a_0\,\mathrm{d}z\right), \quad c = \mathrm{const}. \tag{1.50}$$

Сравнивая правые части в (1.49) и (1.50), получим

$$\frac{1}{\beta}\left(c - \int a_0\,\mathrm{d}z\right) = -\frac{a_1\beta}{a_0}.$$

Откуда имеем

$$c - \int a_0\,\mathrm{d}z = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Объединяя вышеизложенное, сформулируем следствие 3.

Следствие 3. Пусть коэффициенты a_0, a_1, a_2, дифференциального уравнения (1.1) удовлетворяют условию

$$a_1 = -a_2\left(c - \int a_0\,\mathrm{d}z\right)$$

или

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)' = a_0.$$

Тогда дифференциальное уравнение (1.1) интегрируемо.

1.7. Третий вариант следствия теоремы 1

Пусть $\gamma = \gamma(z)$ некоторая регулярная в D_z функция. Основное соотношение теоремы 1 запишем в виде

$$u_1u_2 = v_1v_2^{-1}$$

или в виде

$$u_1u_2 = \gamma\, v_1\frac{1}{\gamma}v_2^{-1}.$$

Полагая

$$u_1\gamma\, v_1, \quad u_2 = \frac{1}{\gamma}v_2^{-1}$$

и дифференцируя каждое из равенств получим систему алгебраических уравнений относительно двух параметров k, m

$$\gamma' + \frac{m}{k}a_1\gamma = -\frac{a_0}{k}$$

и

$$\left(\frac{1}{\gamma}\right)' + \frac{1}{\gamma}\left(-\frac{1-m}{1-k}a_1\right) = \frac{a_2}{1-k}.$$

Решая последнюю систему, определяем выражения для параметров k, m.

2. Обобщение уравнения Риккати

Объектом рассмотрения во втором параграфе является нелинейное дифференциальное уравнение ($1'$), обобщающее уравнение Риккати (1.1).

Введением параметров $k_i(z)$, $m_i(z)$, $i = \overline{1,2}$, $k_j(z)$, $m_i(z)$, $i = \overline{1,2}$, приведем уравнение ($1.1'$) к виду

$$w'(k_1 + k_2 + 1 - k_1 - k_2) + a_0 + \\ + wa_1(m_1 + m_2 + 1 - m_1 - m_2) + \\ + a_2w^2 + a_3w^3 = 0.$$

С учетом этого уравнения, составим три

$$k_1w' + a_1m_1w = -a_0, \tag{2.1}$$

$$k_2w' + a_1m_2w = -a_2w^2, \tag{2.2}$$

$$(1 - k_1 - k_2)w' + a_1(1 - m_1 - m_2)w = \\ = -a_3w^3. \tag{2.3}$$

Разделив обе части выражений в (2.1)–(2.3) на соответствующие коэффициенты при $w'w'$ и полагая

$$a_1\frac{m_1}{k_1} = \alpha_1, \quad a_1\frac{m_2}{k_2} = \alpha_2, \\ a_1\frac{1 - m_1 - m_2}{1 - k_1 - k_2} = \alpha_3,$$

а также введя обозначения

$$-\frac{a_0}{k_1} = \beta_1, \quad -\frac{a_2}{k_2} = \beta_2, \quad -\frac{a_3}{1 - k_1 - k_2} = \beta_3,$$

преобразуем дифференциальные уравнения (2.1)–(2.3) соответственно к виду

$$w' + \alpha_1w = \beta_1, \tag{2.4}$$

$$w' + \alpha_2w = \beta_2w^2, \tag{2.5}$$

$$w' + \alpha_3w = \beta_3w^3. \tag{2.6}$$

Решением $w = w_1(z)w = w_1(z)$ линейного дифференциального уравнения (2.4) является функция

$$w = w_1(z) = v_1^{-1}u_1, \tag{2.7}$$

где

$$v_1 = e^{\int \alpha_1(z)\,\mathrm{d}z}, \quad u_1 = c_1 + \int \beta_1v_1\,\mathrm{d}z, \\ c_1 = \mathrm{const}. \tag{2.8}$$

Дифференциальные уравнения (2.5), (2.6) являются уравнениями Бернулли (1.2) при $m = 2m = 2$ и $m = 3m = 3$ соответственно, решения которых, с учетом (1.3), имеют вид

$$w = w_2(z) = v_2^{-1}u_2^{-1}, \tag{2.9}$$

где

$$v_2 = e^{\int \alpha_2(z)}, \quad u_2 = c_2 + \int -\beta_2v_2^{-1}\,\mathrm{d}z, \tag{2.10}$$

$$w = w_3(z) = v_3^{-1}u_3^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.11}$$

$$v_3 = e^{\int \alpha_3(z)\,\mathrm{d}z}, \quad u_3 = c_3 - 2\int \beta_3v_3^{-2}\,\mathrm{d}z. \tag{2.12}$$

Считая, $w_1 = w_2w_1 = w_2$, из (2.7)–(2.10) имеем

$$v_1^{-1}u_1 = v_2^{-1}u_2^{-1} \tag{2.13}$$

$$u_1u_2 = v_1v_2^{-1}. \tag{2.14}$$

Считая, $w_2 = w_3w_2 = w_3$, из (2.9)–(2.12) имеем

$$v_2^{-1}u_2^{-1} = v_3^{-1}u_3^{-\frac{1}{2}} \tag{2.15}$$

$$u_2^{-1}u_3^{\frac{1}{2}} = v_2v_3^{-1}. \tag{2.16}$$

Объединяя вышеизложенное во втором параграфе в обозначениях выражений в (2.1)–(2.16), сформулируем теорему 2.

Теорема 2. Пусть некоторые функции $k_i = k_i(z)$, $m_i = m_i(z)$, $i = \overline{1,2}$, и коэффициенты $a_i = a_i(z)$, $i = \overline{0,3}$, $a_i = a_i(z)$, $i = \overline{0,3}$, дифференциального уравнения ($1.1'$) регулярны в области $D_2 \subset C$, $k_i \neq 0$, $1 - k_1 - k_2 \neq 0$, $i = \overline{1,2}$, $D_2 \subset C$, $k_i \neq 0$, $1 - k_1k_2 \neq 0$, $i = \overline{1,2}$, удовлетворяют соотношениям

$$v_1^{-1}u_1 = v_2^{-1}u_2^{-1} \text{ и } v_1^{-1}u_1 = v_2^{-1}u_2^{-1},$$

$$v_2^{-1}u_2^{-1} = v_3^{-1}u_3^{-\frac{1}{2}}.v_2^{-1}u_2^{-1} = v_3^{-1}u_3^{-\frac{1}{2}}$$

Тогда функция $w = w_1(z)w = w_1(z)$ в (2.7) удовлетворяет обобщенному уравнению ($1.1'$).

Замечание. Вышеуказанная схема может быть использована в общем виде при рассмотрении дифференциального уравнения вида

$$w' + \sum_{j=0}^{n} a_i(z)w^j = 0.$$

3. Сущность альтернативного метода исследования интегрируемости дифференциального уравнения первого порядка, содержащего многочлен

В случае дифференциального уравнения вида
$$w' + a_0 + a_1 w + \ldots + a_n w = 0,$$
путем введения параметров:

1) составляют систему линейных и дифференциальных уравнений Бернулли

$$\begin{cases} w' + a_1 w = b_1, \\ w' + a_2 w = b_2 w^2, \\ \ldots \\ w' + a_n w = b_n w^n; \end{cases}$$

2) по известной формуле Бернулли находят решения $w = w_k(z)$, $k = \overline{1,n}$;

3) составляют систему равенств

$$\begin{cases} w_1(z) = w_2(z), \\ w_2(z) = w_3(z), \\ \ldots \\ w_{n-1}(z) = w_n(z). \end{cases}$$

Эта система является системой связи между введенными параметрами и коэффициентами исходного дифференциального уравнения, а также условием интегрируемости рассматриваемого дифференциального уравнения.

4. Теорема, обратная теореме 1

Теорема 1$'$. Пусть регулярные в $D_z \subset C$ функции $k(z)$, $m(z)$, $a_0(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$ удовлетворяют условиям (1.18)–(1.20).

Тогда левая и правая части в (1.18)–(1.20) являются решениями дифференциального уравнения (1.1), т.е. функции $a_0(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$ коэффициенты дифференциального уравнения (1.1).

Доказательство. Обозначив через $\gamma = \gamma(z)$ левую и правую части в (1.15), (1.17), составим выражения

$$v_1^{-1} u_1 = \gamma, \quad u_1 = \gamma v_1 \tag{4.1}$$

$$v_2^{-1} \cdot u_2^{-2} = \gamma, \quad u_2 = \frac{v_2^{-1}}{\gamma}. \tag{4.2}$$

Дифференцируя левую и правую части в (4.1)

$$u_2' = \gamma' v_1 + \gamma v_1' \tag{4.3}$$

и, используя (1.11) выражения в (4.3), перепишем в виде

$$-\frac{a_0}{k} v_1 = \gamma' v_1 + \gamma v_1 \frac{m}{k} a_1.$$

После умножения на $\frac{k}{a_1 v_1 \gamma}$ перепишем в виде

$$m = -\frac{a_0}{a_1 \gamma} - \frac{k\gamma'}{a_1 \gamma}. \tag{4.4}$$

Дифференцируя левую и правую части в (4.2)

$$u_2' = \frac{(v_2^{-1})'}{\gamma} - \frac{v_2^{-1}\gamma'}{\gamma^2}.$$

$$a_2 = -(1-m)\,\frac{a_1}{\gamma} - \frac{\gamma'}{\gamma^2}(1-k). \tag{4.5}$$

Подставив (4.4) в (4.5), находим

$$a_2 = -\frac{a_1}{\gamma} - \frac{a_0}{\gamma^2} - \frac{\gamma'}{\gamma^2},$$
$$\gamma' + a_0 + a_1\gamma + a_2\gamma.$$

Последнее означает, что γ — решение уравнения (1.1) или что левая и правая части в (1.15), (1.17) являются решениями дифференциального уравнения (1.1), а функции a_0, a_1, a_2 — коэффициенты дифференциального уравнения (1.1).

Теорема 1$'$ доказана. □

4.1. Сравнительный анализ теоремы 1 и теоремы 1$'$

В теореме 1 исходным моментом является дифференциальное уравнение 1 и, следовательно, его коэффициенты a_0, a_1, a_2.

В теореме 1$'$, считающейся обратной к теореме 1, исходным моментом считаются соотношения (1.15), (1.17), где $m(z)$, $k(z)$, $a_0(z)$, $a_1(z)$, $a_2(z)$ являются регулярными в D_z функциями.

В теореме 1$'$ доказывается, что в этом случае левая и правая части в (1.15), (1.17), являются решениями уравнения (1.1), а функции a_0, a_1, a_2 — коэффициенты дифференциального уравнения (1.1).

Заключение. Выводы

Разработан алгоритм получения условий интегрируемости дифференциальное уравнение первого порядка с полиномиальной частью. Альтернативный метод выявления условий интегрируемости дифференциального уравнения состоит во введении параметров и создания системы дифференциальных уравнений, способы интегрируемости которых известны. Используя решения системы, составлены равенства, связывающие параметры и коэффициенты исходного уравнения, определяющие условия интегрируемости рассматриваемого дифференциального уравнения.

Представленные факты структурированы по методу постепенности: вначале внимание уделяется уравнению с многочленом второй степени (уравнению Риккати), приводятся примеры. Затем рассматривается уравнение с многочленом третьей степени. В завершении исследуется дифференциальное уравнение с многочленом любого порядка.

Литература

1. *Александров И.А.* Методы геометрической теории аналитических функции. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2001. 220 с.
2. *Деревенский В.П.* Полиномиальные дифференциальные уравнения первого порядка над матричными косыми рядами // Изв. вузов. Матем. 2014, № 9. С. 3–16.
3. *Задорожная О.В., Кочетков В.К.* Структура интегралов второго дифференциального уравнения Левнера–Куфарева в частном случае // Вестник Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2018. № 55. С. 12–21. DOI: 10.17223/19988621/55/2.
4. *Матвеев П.Н.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений: учебное пособие/ П. Н. Матвеев. СПб.: М.: Краснодар: Лань, 2008. 330 с.
5. *Avkhadiev F.G. et al.* The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht // Russian Mathematical Surveys, 1975 Vol. 30. Iss. 4. P. 1.
6. *Claudine L., Rosler A.* Iterated stochastic integrals in infinite dimensions – approximation and error estimares. arXiv: 1709.06961 [math. PR], 2017, 22 p.
7. *Han X, Kloeden P.E.* Random ordinary differential equations and their numerical solution. Singapore: Sprimger. 2017, 250 p.
8. *Hastings S.P., McLeod J.B.* Classical methods in ordinary differential equations: with applications to boundary value problems. Rhode Island, Amer. Math. Soc., 2011. Vol. 129. 38 p.
9. *Kudryashov N.A.* Transcendents defined by nonlinear fourth-order ordinary differential equations // J. Phys. A. Math. and Gen. 1999. Vol. 32. Iss. 6. P. 999–1014.
10. *Platen E.* Bruti-Liberati N. Numerical solution differential equations with jumps in finance. Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 2010. 868 p.
11. *Kelley W.G., Peterson A.C.* The theory of differential equations: classical and qualitative. Springer, 2010. 423 p.

References

1. Aleksandrov, I.A. *Metody geometricheskoj teorii analiticheskih funkcii* [Methods of geometric theory of analytic function] Tomsk University, Tomks, 2001. (In Russian)
2. Derevenskij, V.P. Polinomial'nye differentsial'nye uravneniya pervogo poryadka nad matrichnymi kosymi ryadami [Polynomial differential equation of the first order over matrix skew series]. *Izvesia vuzov. Matematika*, 2014, no. 9, pp. 3–16. (In Russian)
3. Zadorozhnaya, O.V., Kochetkov, V.K. [The structure of the integrals of the second differential equation levner-kufarev in the particular case]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and Mechanics], 2018, vol. 55, pp. 12–21. (In Russian)
4. Matveev, P.N. *Lekcii po analiticheskoj teorii differencial'nyh uravnenij* [Lectures on analytical theory of differential equations]. Lan', SPb., Moscow, Krasnodar, 2008. (In Russian)
5. Avkhadiev, F.G. et al. The main results on sufficient conditions for an analytic function to be schlicht. *Russian Mathematical Surveys*, 1975, vol. 30, iss. 4, p. 1.
6. Claudine, L, Rosler, A. *Iterated stochastic integrals in infinite dimensions – approximation and error estimares.* arXiv: 1709.06961 [math. PR], 2017.
7. Han, X, Kloeden, P.E. *Random ordinary differential equations and their numerical solution.* Singapore: Sprimger. 2017.
8. Hastings, S.P., McLeod, J.B. *Classical methods in ordinary differential equations: with applications to boundary value problems.* Amer. Math. Soc., Rhode Island, 2011, vol. 129, 38 p.
9. Kudryashov, N.A. Transcendents Defined by Nonlinear Fourth-Order Ordinary Differential Equations. *J. Phys. A. Math. and Gen.*, 1999, vol. 32, iss. 6, pp. 999–1014.
10. Platen, E., Bruti-Liberati, N. *Numerical solution differential equations with jumps in finance.* Berlin, Heidelberg, Springer-Verlag Publ., 2010.
11. Kelley, W.G., Peterson, A.C. *The Theory of Differential Equations: Classical and Qualitative.* Springer, 2010.

Статья поступила 28 апреля 2019 г.