Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-16-2-21-29

РЕШЕНИЕ КОМБИНИРОВАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ С МАССОВЫМИ СИЛАМИ

Иванычев Д. А.

SOLUTION OF COMBINED BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR ANISOTROPIC ROTATION BODIES WITH MASS FORCES

D. A. Ivanychev

Lipetsk State Technical University, Lipetsk, Russia
e-mail: lsivdmal@mail.ru

Abstract. The aim of the work is to determine the stress-strain state of anisotropic bodies of revolution under the action of mass forces and external conditions of a physical and kinematic nature in a combined formulation.

The task is ensured by the development of the method of boundary states, based on the concepts of spaces of internal and boundary states. The theory of the formation of the basis of the space of internal states, which includes displacements, deformations, stresses and mass forces, is constructed. A common basis is a combination of two bases. The first is formed for the case of plane deformation from the action of only mass forces, based on the application of the application of fundamental polynomials. Further, on its basis, according to the method of integral overlays, a basis of internal spatial states is induced. The second is the basis of internal states in the classical boundary value problem for transversely isotropic bodies. After orthogonalization of the common basis, where the inner energy of elastic deformation acts as the scalar product, the desired state is determined by a Fourier series, the coefficients of which are defined integrals. Checking the adequacy of the solution is carried out by comparing a given field of mass forces with that obtained, as well as by comparing the specified boundary conditions with the resulting solutions.

Solutions of problems with different combinations of boundary conditions for a circular cylinder of rock with the corresponding conclusions are given. Presents a graphical visualization of the results.

Keywords: anisotropy, mixed problems, boundary state method, mass forces, axisymmetric problems, boundary value problems.

Современные материалы, применяемые в машиностроении, строительстве, в авиации, обладают анизотропией в отношении упругих свойств, поэтому детали, изготовленные из таких материалов, требуют создания специальных или усовершенствования существующих методов расчета на прочность, жесткость, устойчивость и т.д. На эти детали действуют массовые силы, например, силы инерции и внешние силы, а на границу наложены еще и кинематические условия. Расчет напряженно-деформированного состояния от совокупности таких воздействий составляет актуальную научную задачу.

Массовые силы в задачах механики твердых тел просматривались в работах различных направлений. В работе [1] построено численно-аналитическое решение плоской задачи теории упругости с использованием метода взвешенных невязок в форме метода граничного решения. Найдено распределения напряжений и смещений в упругом теле, подверженном действию заданной системы объемных сил и заданных напряжений или смещений на границах. В [2] исследовались вынужденные деформации в виде суммы воздействий поверхностных и объемных сил. В работе [3] рассматривались задачи теории упругости с заданными объемными и поверхностными силами в функциональных энергетических пространствах тензоров напряжений и деформаций, методом ортогональных проекций решены конкретные задачи. В работе [4] для перемещений получено условие эквива-

Иванычев Дмитрий Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры общей механики Липецкого государственного технического университета; e-mail: lsivdmal@mail.ru.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Липецкой области в рамках научного проекта № 19-41-480003 «р_а».

лентности поверхностных и объемных сил, используя вариационное уравнение Лагранжа. В [5] было построено поле перемещений для изотропного упругого тела, ограниченного концентрическими сферами и находящегося под действием осесимметричных нестационарных объемных сил. В [6] получены точные аналитические решения задач о равновесии толстостенных трансверсально-изотропных составных сфер с жестко закрепленной или закрепленной только в радиальном направлении внешней поверхностью, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления.

Работа [7] посвящена обратному методу определения напряженно-деформированного состояния изотропных упругих тел от действия непрерывных непотенциальных объемных сил.

Метод граничных состояний с участием объемных сил для изотропной среды применен в [8]. В [9] продемонстрирован прием включения в круг расчетных вопросов метода граничных состояний объемных сил упругой среды, составляющих линейную комбинацию «эталонных» воздействий на односвязное ограниченное тело. В [10] разработана методика получения полнопараметрических решений для анизотропных тел, где возникновение фиктивных массовых сил являлось следствием применения метода Пуанкаре.

В рамках настоящей работы предлагается развитие энергетического метода граничных состояний для класса задач теории упругости с комбинированными граничными условиями при наличии массовых сил для трансверсально-изотропных тел вращения. Особенность решения состоит в том, что искомое упругое поле удовлетворяет одновременно заданным условиям на границе тела и условиям внутри области (массовые силы), а не представляет собой сумму решений частных задач.

1. Постановка задачи

Рассматривается трансверсально-изотропное тело, ограниченное одной или несколькими коаксиальными поверхностями вращения. Требуется восстановить упругое поле в области V по заданным массовым силам $\mathbf{X}$ внутри области и условиям на поверхности, которые в цилиндрической системе координат могут быть записаны в различных комбинациях. На всей поверхности тела заданы

1. $\{u_r, p_z\}$;
2. $\{p_r, u_z\}$;
3. $\{p_\tau, u_n\}$.

Для однородной трансверсально-изотропной среды в цилиндрических координатах имеют место следующие соотношения [11]. Дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрической системе координат z, r, θ:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R = 0;\\
&\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau_{zr}}{r} + Z = 0;\\
&\frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + 2\frac{\tau_{r\theta}}{r} + Q = 0,
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где R, Z, Q — массовые силы.

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r};\\
&\gamma_{zr} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \gamma_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r};\\
&\gamma_{z\theta} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Обобщенный закон Гука:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_z = \frac{1}{E_z}\left[\sigma_z - \nu_z(\sigma_r + \sigma_\theta)\right];\\
&\varepsilon_r = \frac{1}{E_r}(\sigma_r - \nu_r\sigma_\theta) - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z;\\
&\varepsilon_\theta = \frac{1}{E_r}(\sigma_\theta - \nu_r\sigma_r) - \frac{\nu_z}{E_z}\sigma_z;\\
&\gamma_{zr} = \frac{1}{G_z}\tau_{zr}; \quad \gamma_{z\theta} = \frac{1}{G_z}\tau_{z\theta};\\
&\gamma_{r\theta} = \frac{1}{G_r}\tau_{r\theta} = \frac{2(1+\nu_r)}{E_r}\tau_{r\theta},
\end{aligned} \tag{1.3}$$

где E_z и E_r — модули упругости соответственно в направлении оси z и в плоскости изотропии, ν_z — коэффициент Пуассона, характеризующий сжатие вдоль r при растяжении вдоль оси z, ν_r — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сжатие в плоскостях изотропии при растяжении в этих же плоскостях, G_r и G_z — модуль сдвига в плоскостях изотропии и перпендикулярных к ним.

2. Метод решения

Для решения поставленной задачи прибегнем к понятиям метода граничных состояний (МГС) [12], основу которого составляют понятия пространств внутренних Ξ и граничных Γ состояний

$$\begin{aligned} \Xi &= \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k, \ldots\}; \\ \Gamma &= \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k, \ldots\}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Внутреннее состояние определяется наборами компонент вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений

$$\xi_k = \{u_i^k, \varepsilon_{ij}^k, \sigma_{ij}^k\}.$$

Скалярные произведения в базисе внутренних состояний (например, для 1-го и 2-го внутреннего состояния) будем определять выражением

$$(\xi_1,\, \xi_2) = \int\limits_V (\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1)\, \mathrm{d}V. \tag{2.2}$$

В силу тождества Бетти

$$(\xi_1, \xi_2) = (\xi_2, \xi_1) = \int\limits_V (\varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1)\, \mathrm{d}V =$$

$$= \int\limits_V (\varepsilon_{ij}^2 \sigma_{ij}^1 + \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2)\, \mathrm{d}V = 2 \int\limits_V \varepsilon_{ij}^1 \sigma_{ij}^2\, \mathrm{d}V.$$

Граничное состояние γ_k, в отличие от традиционного $\gamma_k = \{u_{vi}^k,\, p_i^k\}$, определяемого в [12], будем формировать наборами компонент вектора перемещения точек границы u_{vi}, поверхностными усилиями p_i и массовыми силами X_i (последнее условно в силу того, что массовые силы не относятся к элементу поверхности тела)

$$\gamma_k = \{u_{vi}^k,\, p_i^k,\, X_i^k\}, \quad p_i^k = \sigma_{ij}^k n_j,$$

где n_j — компонента нормали к границе.

Скалярное произведение в пространстве граничных состояний Γ, на основании уравнения Клапейрона [13] и (2.2), выражает двойную работу внешних сил по поверхности тела S и двойную работу массовых сил на перемещениях u_i внутренних точек тела

$$(\gamma_1, \gamma_2) = 2 \int\limits_V X_i^1 u_i^2 dV + 2 \int\limits_S p_i^1 u_{vi}^2\, \mathrm{d}S.$$

В случае гладкой границы оба пространства состояний являются гильбертовыми и сопряжены изоморфизмом. По определению, каждому элементу $\xi_k \in \Xi$ соответствует единственный элемент $\gamma_k \in \Gamma$, причем это соответствие взаимно-однозначное $\xi_k \leftrightarrow \gamma_k$. Это позволяет свести отыскание внутреннего состояния к построению изоморфного ему граничного состояния. Последнее существенно зависит от граничных условий (ГУ).

Методика формирования базиса пространства внутренних состояний описана ниже.

Ортонормирование базиса пространства Ξ осуществляется по разработанному рекурсивно-матричному алгоритму ортогонализации [14], где в качестве перекрестных скалярных произведений принимается (2.2).

Проблема сводится к разрешающей системе уравнений относительно коэффициентов Фурье, разложения искомых внутреннего ξ и граничного γ состояний в ряд по элементам ортонормированного базиса:

$$\begin{gathered} p_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k p_i^k; \quad u_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_i^k; \\ \sigma_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sigma_{ij}^k; \quad \varepsilon_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varepsilon_{ij}^k; \\ X_i = \sum_{k=1}^{\infty} c_k X_i^k. \end{gathered} \tag{2.3}$$

Введем коэффициенты β_{ij}, α_j и матрицы от этих коэффициентов $B = [\beta_{ij}]_{N\times N}$, $A = [\alpha_j]_N$, которые определяются в зависимости от ГУ.

1. Заданы массовые силы $\mathbf{X}$ внутри области, на границе S заданы нормальная составляющая вектора перемещения и касательная составляющая вектора усилия $\{p_r, u_z\}\,|S$,

$$\beta_{ij} = 2 \int\limits_V \mathbf{X}^i\, \mathbf{u}^j\, \mathrm{d}V + 2 \int\limits_S p_r^i u_r^j\, \mathrm{d}S + 2 \int\limits_S p_z^j u_z^i\, \mathrm{d}S;$$

$$\alpha_j = 2 \int\limits_V \mathbf{X}\, \mathbf{u}^j dV + 2 \int\limits_S p_r u_r^j\, \mathrm{d}S + 2 \int\limits_S p_z^j u_z\, \mathrm{d}S.$$

2. Заданы массовые силы $\mathbf{X}$ и условия на границе $\{u_r, p_z\}\,|S$,

$$\beta_{ij} = 2 \int\limits_V \mathbf{X}^i\, \mathbf{u}^j\, \mathrm{d}V + 2 \int\limits_S p_r^j u_r^i\, \mathrm{d}S + 2 \int\limits_S p_z^i u_z^j\, \mathrm{d}S;$$

$$\alpha_j = 2\int\limits_V \mathbf{X}\mathbf{u}^j dV + 2\int\limits_S p_r^j u_r \,\mathrm{d}S + 2\int\limits_S p_z u_z^j dS.$$

3. Заданы массовые силы $\mathbf{X}$ и условия на границе $\{u_n, p_\tau\}\,|S$,

$$\beta_{ij} = 2\int\limits_V \mathbf{X}^i\mathbf{u}^j \,\mathrm{d}V + 2\int\limits_{S_z} p_r^i u_r^j \,\mathrm{d}S + \\ + 2\int\limits_{S_z} p_z^j u_z^i \,\mathrm{d}S + 2\int\limits_{S_r} p_r^j u_r^i \,\mathrm{d}S + 2\int\limits_{S_r} p_z^i u_z^j \,\mathrm{d}S;$$

$$\alpha_j = 2\int\limits_V \mathbf{X}\,\mathbf{u}^j \,\mathrm{d}V + 2\int\limits_{S_z} p_r u_r^j \,\mathrm{d}S + 2\int\limits_{S_z} p_z^j u_z \,\mathrm{d}S + \\ + 2\int\limits_{S_r} p_r^j u_r \,\mathrm{d}S + 2\int\limits_{S_r} p_z u_z^j \,\mathrm{d}S,$$

где S_r и S_z — поверхности тела; на поверхности S_r заданы $\{u_r, p_z\}$, на поверхности S_z — $\{p_r, u_z\}$.

Коэффициенты Фурье $c = \{c_k\}_N$ рассчитываются из соотношения

$$c = \{c_k\}_N = B^{-1}A, \tag{2.4}$$

где N — число используемых элементов базиса.

3. Формирование базиса внутренних состояний

Основную сложность формирования решения в МГС составляет конструирование базиса внутренних состояний, который опирается на общее или фундаментальное решение для среды, возможно также использование каких-либо частных или специальных решений.

В работе [11] с помощью метода интегральных наложений установлена зависимость между пространственным напряженным и деформированным состоянием упругого трансверсально-изотропного тела и определенными вспомогательными двумерными состояниями, компоненты которого зависят от двух координат z и y (переменных). В качестве плоских вспомогательных состояний используется плоская деформация, возникающая в цилиндрах с осью η, имеющих в каждой точке плоскость упругой симметрии, параллельную плоскости zy (направление η).

Переход к осесимметричному пространственному состоянию в цилиндрических координатах осуществляется по зависимостям [15]

$$\sigma_z = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r} \frac{\sigma_z^{pl}}{\sqrt{r^2-y^2}}\,\mathrm{d}y;$$

$$\sigma_{zr} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r} \frac{\sigma_{zy}^{pl}}{r\sqrt{r^2-y^2}}\,\mathrm{d}y; \quad \sigma_{z\theta} = \sigma_{r\theta} = 0.$$

$$\sigma_r - \sigma_\theta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r} \frac{(\sigma_y^{pl} - \sigma_\eta^{pl})(2y^2 - r^2)}{r^2\sqrt{r^2-y^2}}\,\mathrm{d}y;$$

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r} \frac{(\sigma_y^{pl} + \sigma_\eta^{pl})}{\sqrt{r^2-y^2}}\,\mathrm{d}y; \tag{3.1}$$

$$u = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r} \frac{u_y^{pl}}{r\sqrt{r^2-y^2}}\,\mathrm{d}y;$$

$$w = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-r}^{r} \frac{u_z^{pl}}{r\sqrt{r^2-y^2}}\,\mathrm{d}y; \quad v = 0.$$

В работе [7] изложена методика определения напряженно-деформированного состояния изотропных тел от объемных сил.

Для построения поля перемещений от массовых сил для плоских вспомогательных состояний применяется фундаментальная система многочленов $y^\alpha z^\beta$, которую можно поместить в любую позицию вектора перемещения $\mathbf{u}^{pl}(y,z)$, образуя некоторое допустимое упругое плоское вспомогательное состояние

$$\mathbf{u}^{pl} = \left\{\left\{y^\alpha z^\beta, 0\right\}, \left\{0, y^\alpha z^\beta\right\}\right\}.$$

Перебор всевозможных вариантов в пределах $\alpha + \beta \leqslant n$, $(n = \mathbb{N})$ позволяет получить множество состояний.

Далее согласно (3.1) определяются компоненты вектора перемещения $\mathbf{u}(r,z)$ пространственного осесимметричного состояния и формируется базис

$$\Xi^X = \left\{\xi_1^X, \xi_2^X, \xi_3^X, \ldots, \xi_k^X, \ldots\right\}.$$

В работе [15] приведен прием конструирования базисных наборов плоских вспомогательных состояний в задаче эластостатики при отсутствии массовых сил

$$\Xi^S = \left\{\xi_1^S, \xi_2^S, \xi_3^S, \ldots, \xi_k^S, \ldots\right\}.$$

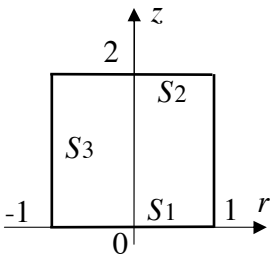


Рис. 1. Трансверсально-изотропный цилиндр

Таблица 1. Перемещения ортонормированного базиса ($k = 10^{-2}$)

	u_z	u_r
ξ_1	0	$26{,}3891z$
ξ_2	$18{,}5286r$	$-10{,}4291z$
ξ_3	0	$-45{,}7073z + 22{,}8537z^2$
ξ_4	$-23{,}0265r + 23{,}0265rz$	$10{,}2967r^2 + 12{,}9608z - 6{,}4804z^2$
ξ_5	$-22{,}3542r + 22{,}3542rz$	$-33{,}643r^2 + 12{,}5824z - 6{,}2912z^2$

Окончательно базис (2.1) представляет собой объединение

$$\Xi = \left\{\xi_1^S, \xi_2^X, \xi_3^S, \xi_4^X, \xi_{k-1}^S, \xi_k^X, \dots\right\}.$$

4. Решение задач для цилиндра

Исследуем упругое равновесие трансверсально-изотропного кругового цилиндра, занимающего область $V = \{(z, r) \mid 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2\}$ (рис. 1), из горной породы алевролита крупного темно-серого [13]. После процедуры обезразмеривания [16], которую в силу громоздкости приводить не будем, упругие характеристики материала: $E_z = 6{,}21$; $E_r = 5{,}68$; $G_z = 2{,}55$; $\nu_z = 0{,}22$; $\nu_r = 0{,}24$.

Зададим следующие массовые силы и граничные условия (первая комбинация) $X = \{r,0\}$; $\{p_r, u_z\}\,|S_1 = \{0,0\}$; $\{p_r, u_z\}\,|S_2 = \{0,0\}$, $\{p_r, u_z\}\,|S_3 = \{1,0\}$.

После ортонормирования и исключения линейно-зависимых элементов базисный набор для компонент вектора перемещения представлен в табл. 1 (показано 5 элементов). Здесь и далее истинное значение характеристики равно произведению показанной характеристики на масштабный множитель k.

Для получения строгого решения потребовалось 9 коэффициентов Фурье (2.4); ненулевые: $c_1 = 0{,}31667$, $c_2 = 0{,}801282$, $c_6 = 0{,}0143507$, $c_7 = 0{,}0054373$, $c_8 = 0{,}0028748$, $c_9 = -0{,}078292$.

Искомое состояние определяется по зависимостям (2.3) ($k = 10^{-2}$):

$$u_r = 16{,}7587r - 1{,}912r^3; \quad u_z = 0;$$

$$\sigma_r = 141{,}098 - 41{,}0981r^3;$$

$$\sigma_\theta = 141{,}098 - 23{,}2943r^3;$$

$$\sigma_\theta = 67{,}7271 - 15{,}4542r^3; \quad R = 100r; \quad Z = 0.$$

Полученное решение удовлетворяет уравнениям теории упругости (1.1)–(1.3).

Теперь рассмотрим вторую комбинацию заданных условий: $X = \{r,0\}$; $\{u_r, p_z\}\,|\,S_1 = \{0, -1 + r^2\}$; $\{u_r, p_z\}\,|\,S_2 = \{0{,}1 - r^2\}$; $\{u_r, p_z\}\,|\,S_3 = \{0,0\}$.

Здесь получено приближенное решение при 30 используемых элементах базиса. Компоненты упругого состояния в явном виде приведем для массовых сил: $R = 0{,}99822r$; $Z = 0{,}003608 - 0{,}003608z$. На рис. 2 представлены изолинии характеристик упругого состояния.

Рассмотрим третью комбинацию заданных условий: $X = \{r, z\}$; $\{p_r, u_z\}\,|S_1 = \{0,0\}$; $\{p_r, u_z\}\,|S_2 = \{0,0\}$; $\{u_r, p_z\}\,|S_3 = \{0,0\}$.

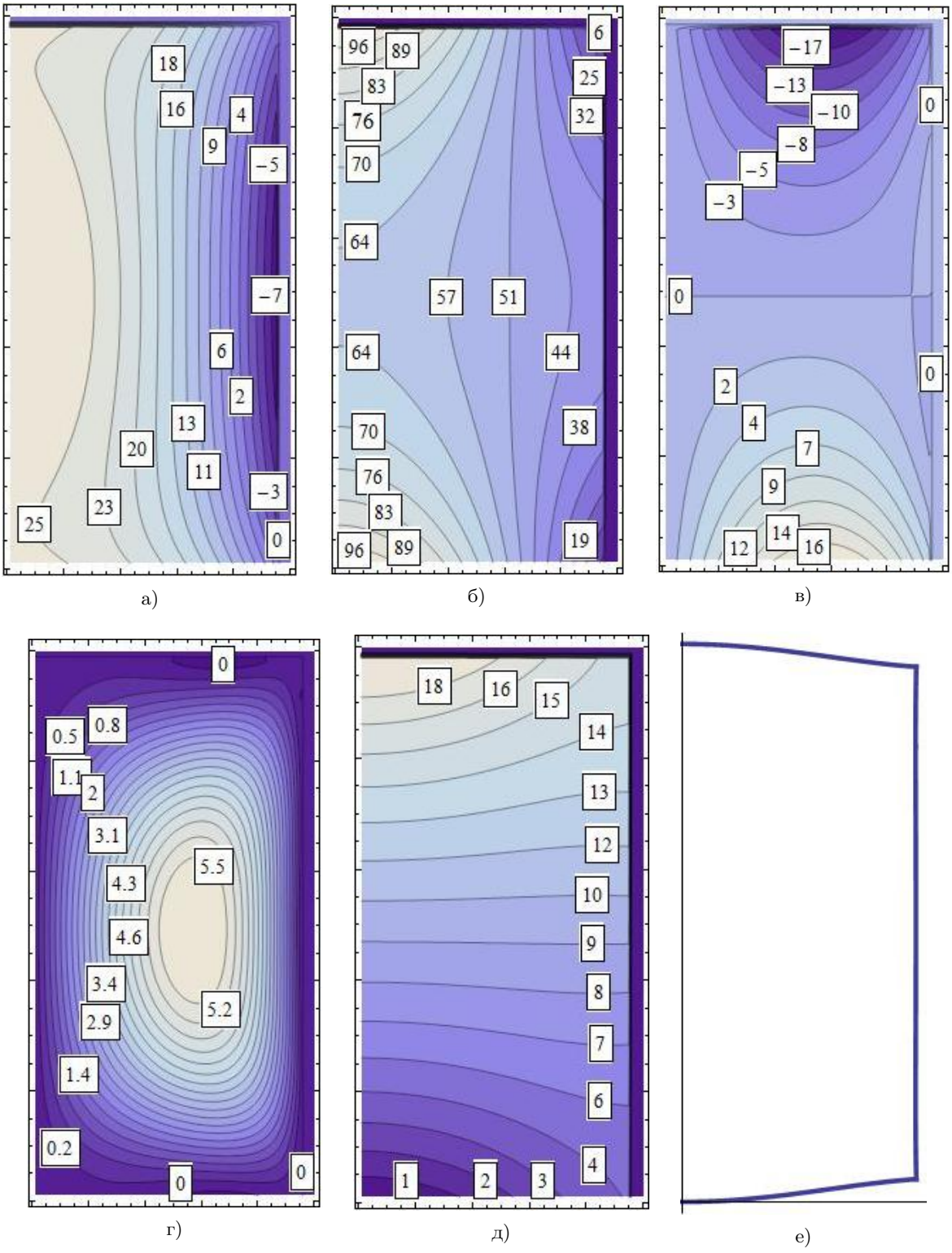
Для получения строгого решения потребовалось 9 коэффициентов Фурье; ненулевые: $c_3 = -0{,}304716$, $c_6 = 0{,}042226$, $c_7 = -0{,}068136$, $c_8 = 0{,}0028748$, $c_9 = -0{,}078292$.

Искомое состояние ($k = 10^{-2}$):

$$u_r = 1{,}91202r - 1{,}91202r^3;$$

$$u_z = 9{,}28516z - 2{,}3213z^3;$$

$$\sigma_r = 34{,}8602 - 41{,}0981r^2 - 14{,}0716z^2;$$



а) б) в)

г) д) е)

Рис. 2. Изолинии: а — напряжение σ_r $(k = 10^{-2})$, б — напряжение σ_z $(k = 10^{-2})$, в – напряжение σ_{zr} $(k = 10^{-2})$, г — перемещение u_r $(k = 10^{-3})$, д — перемещение u_z $(k = 10^{-2})$, е — контур деформированного тела в гипертрофированном виде

$$\sigma_\theta = 34{,}8602 - 23{,}2943r^2 - 14{,}0716z^2;$$

$$\sigma_z = 74{,}3938 - 15{,}4542r^2 - 50z^2;$$

$$R = 100r; \quad Z = 100z.$$

Таким образом, метод граничных состояний показал свою эффективность в плане решения осесимметричных задач с комбинированными ГУ для ограниченных трансверсально-изотропных тел вращения с учетом массовых сил. Сложность задачи заключается в том, что восстановление искомого упругого поля осуществляется одновременно и по ГУ на поверхности тела и по массовым силам внутри области.

Продемонстрирована возможность получения не только приближенных, но строгих решений. Однако сходимость решения задач сильно зависит от геометрии области и вида массовых сил.

Литература

1. *Голоскоков Д.П., Данилюк В.А.* Моделирование напряженно-деформированного состояния упругих тел с помощью полиномов // Вестник государственного университета морского и речного флота им. адмирала С.О. Макарова. 2013. № 1. С. 8–14.
2. *Агаханов Э.К., Магомедэминов Н.С.* Условия эквивалентности воздействий для перемещений // Вестник ДГТУ. Технические науки. 2007. № 12. С. 27–28.
3. *Стружанов В.В.* О решении краевых задач теории упругости методом ортогональных проекций // Математическое моделирование систем и процессов. 2004. № 12. С. 89–100.
4. *Айзикович С.М., Кренев Л.И., Трубчик И.С.* Контактные задачи для упругих оснований с функционально-градиентными покрытиями сложной структуры // Изв. Сарат. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 9. Вып. 4, ч. 2. С. 3–8.
5. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Нестационарное осесимметричное деформирование упругой толстостенной сферы под действием объемных сил // Прикладная механика и техническая физика. 2015. Т. 56. № 6. С. 59–69.
6. *Фукалов А.А.* Задачи об упругом равновесии составных толстостенных трансверсально-изотропных сфер, находящихся под действием массовых сил и внутреннего давления, и их приложения // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. Казань, 20–24 августа 2015 г. С. 3951–3953.
7. *Левина Л.В, Кузьменко Н.В.* Обратный метод эффективного анализа состояния упругого тела от массовых сил из класса непрерывных // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: сборник докладов. Казань, 2015. С. 2276–2278.
8. *Пеньков В.Б., Пеньков В.В., Викторов Д.В.* Учет массовых сил в методе граничных состояний // Известия ТулГУ. Серия Математика. Механика. Информатика. 2005. Т. 11. Вып. 2. С. 94–100.
9. *Пеньков В.Б., Новикова О.С., Левина Л.В.* Состояние упругого тела при нагружении комбинацией объемных сил // Вестник Липецкого государственного технического университета. 2017. № 4. С. 25–56.
10. Penkov V.B. et. al. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations // Journal of Physics: Conf. Series. 2018. Vol. 973. P. 012015. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012015.
11. *Александров А.Я., Соловьев Ю.И.* Пространственные задачи теории упругости (применение методов теории функций комплексного переменного). М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1978. 464 с.
12. *Пеньков В.Б., Пеньков В.В.* Метод граничных состояний для решения задач линейной механики // Дальневосточный математический журнал. 2001. Т. 2. № 2. С. 115–137.
13. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977, 416 с.
14. *Саталкина Л.В.* Наращивание базиса пространства состояний при жестких ограничениях к энергоемкости вычислений // Научная конференция студентов и аспирантов Липецкого государственного технического университета: сб. тезисов докладов. Липецк: ЛГТУ. 2007. С. 130–131.
15. *Иванычев Д.А.* Метод граничных состояний в приложении к осесиметричным задачам для анизотропных тел // Вести высших учебных заведений Черноземья. 2014. № 1. С. 19–26.
16. *Левина Л.В., Новикова О.С., Пеньков В.Б.* Полнопараметрическое решение задачи теории упругости односвязного ограниченного тела // Вестник ЛГТУ. 2016. № 2(28). С. 16–24.

References

1. Goloskokov, D.P., Daniliuk, V.A. Modelirovanie napriazhenno-deformirovannogo sostoianiia uprugikh tel s pomoshch'iu polinomov [Modeling of the stress-strain state of elastic bodies with the help of polynomials]. *Vestnik gosudarstvennogo universiteta morskogo i rechnogo flota im. admirala S.O. Makarova* [Bulletin of the adm.

Makarov's State University of Maritime and River Fleet], 2013, no. 1, pp. 8–14. (In Russian)
2. Agakhanov, E.K., Magomedeminov, N.S. Usloviia ekvivalentnosti vozdeistvii dlia peremeshchenii [Equivalence conditions for impacts for displacements]. *Vestnik DGTU. Tekhnicheskie nauki* [Bulletin of the Don State Technological University. Technical science], 2007, no. 12, pp. 27–28. (In Russian)
3. Struzhanov, V.V. O reshenii kraevykh zadach teorii uprugosti metodom ortogonal'nykh proektsii [On the solution of boundary value problems of the theory of elasticity by the method of orthogonal projections]. *Matematicheskoe modelirovanie sistem i protsessov* [Mathematical modeling of systems and processes], 2004, no. 12, pp. 89–100. (In Russian)
4. Ayzikovich, S.M., Krenev, L.I., Trubchik, I.S. Kontaktnyye zadachi dlya uprugikh osnovaniy s funktsional'no-gradiyentnymi pokrytiyami slozhnoy struktury [Contact problems for elastic bases with functionally gradient coatings of complex structure]. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika* [News of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Computer science], 2009, vol. 9, no. 4, pt. 2, pp. 3–8. (In Russian)
5. Vestyak, V.A., Tarlakovskii, D.V. Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of volume forces [Unsteady axisymmetric deformation of an elastic thick-walled sphere under the action of bulk forces]. *J. of Appl. Mechanics and Technical Physics*, 2015, vol. 56, no. 6, pp. 59–69.
6. Fukalov, A.A. Zadachi ob uprugom ravnovesii sostavnykh tolstostennykh transversal'no-izotropnykh sfer, nakhodyashchikhsya pod deystviyem massovykh sil i vnutrennego davleniya, i ikh prilozheniya [Problems of elastic equilibrium of composite thick-walled transversely isotropic spheres under the action of mass forces and internal pressure, and their applications]. *XI Vserossiyskiy s"yezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki* [Proc. of XI Russian Congress of the fundamental problems of theoretical and applied mechanics]. Kazan, 2015, pp. 3951–3953. (In Russian)
7. Levina, L.V., Kuzmenko, N.V. Obratnyi metod effektivnogo analiza sostoianiia uprugogo tela ot massovykh sil iz klassa nepreryvnykh [The inverse method of effective analysis of the state of an elastic body from mass forces from the class of continuous]. *XI Vserossiyskiy s"yezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki* [Proc. of XI Russian Congress of the fundamental problems of theoretical and applied mechanics]. Kazan, 2015, pp. 2278–2280. (In Russian)
8. Penkov, V.B., Penkov, V.V., Viktorov, D.V. Uchet massovykh sil v metode granichnykh sostoianii [The account of mass forces in a method of boundary conditions]. *Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika* [News of Tula State University. Mathematics series. Mechanics. Computer science], 2005, vol. 11, pp. 94–100. (In Russian)
9. Penkov, V.B., Novikova, O.S., Levina, L.V. Sostoianie uprugogo tela pri nagruzhenii kombinatsiei ob"emnykh sil [The state of an elastic body when loaded by a combination of volume forces]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Lipetsk State Technical University], 2017, No.4, pp. 25–56. (In Russian)
10. Penkov, V.B., Ivanychev, D.A., Novikova, O.S., Levina L.V. An algorithm for full parametric solution of problems on the statics of orthotropic plates by the method of boundary states with perturbations. *J. of Physics: Conf. Series*, 2018, vol. 973, pp. 012015. DOI: 10.1088/1742-6596/973/1/012015
11. Aleksandrov, A.Ia., Solov'ev, Iu.I. *Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (primenenie metodov teorii funktsii kompleksnogo peremennogo)* [Spatial problems of the theory of elasticity (application of methods of the theory of functions of a complex variable)]. Nauka, Moscow, 1978. (In Russian)
12. Penkov, V.B. Metod granichnykh sostoianii dlia resheniia zadach lineinoi mekhaniki [The method of boundary states for solving problems of linear mechanics]. *Dal'nevostochnyi matematicheskii zhurnal* [Far Eastern Mathematical Journal], 2001, vol. 2, no. 2, pp. 115–137. (In Russian)
13. Lekhnitskii, S.G. *Teoriia uprugosti anizotropnogo tela* [The theory of elasticity of an anisotropic body]. Nauka, Moscow, 1977. (In Russian)
14. Satalkina, L.V. Narashchivanie bazisa prostranstva sostoianii pri zhestkikh ogranicheniiakh k energoemkosti vychislenii [Expansion of the basis of the state space with severe limitations on the energy consumption of computations]. *Nauchnaya konferentsiya studentov i aspirantov Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta: sbornik tezisov dokladov* [Proc. of scientific conference of students and graduate students of Lipetsk State Technical University]. LGTU, Lipetsk, 2007, pp. 130–131. (In Russian)
15. Ivanychev, D.A. Metod granichnykh sostoianii v prilozhenii k osesimetrichnym zadacham dlia anizotropnykh tel [The method of boundary states in application to ossimetric problems for anisotropic bodies]. *Vesti vysshikh uchebnykh zavedenii Chernozem'ia. Nauchno-tekhnicheskii*

i proizvodstvennyi zhurnal [News of Higher Educational Institutions of the Chernozem Region], 2014, no. 1, pp. 19–26. (In Russian)

16. Levina, L.V., Novikova, O.S., Penkov, V.B. Polnoparametricheskoe reshenie zadachi teorii uprugosti odnosvyaznogo ogranichennogo tela [Full-parameter solution of the problem of the theory of elasticity of a simply connected bounded body]. *Vestnik Lipetskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Lipetsk State Technical University], 2016, no. 2(28), pp. 16–24. (In Russian)

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2019

© Иванычев Д. А., 2019

Статья поступила 30 марта 2019 г.