Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-16-3-23-27

О ВЕКТОРНЫХ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Евдокимов В. С., Федоренко А. Г., Елецкий Ю. Б.

ON VECTOR BLOCK ELEMENTS IN MECHANICS PROBLEMS

V. A. Babeshko[1,2], O. V. Evdokimova[2], O. M. Babeshko[1], V. S. Evdokimov[2], A. G. Fedorenko[2], Yu. B. Eletskiy[2]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. A plane dynamic problem of the second kind for the Lame equation is considered in the first quadrant. For the first time the exact solution of this boundary value problem in the form of a Packed vector block element is constructed by the block element method. A system of Two lame differential equations is considered in the boundary value problem. To solve it by the block element method, operations of external algebra, external analysis are performed and a vector block element consisting of two components is constructed. For its construction there is a problem of differential factorization of a matrix-function of the second order-coefficient of the functional equation necessary for the correct construction of pseudo-differential equations. Their solution allows you to build components of the external form and the packaged block element itself. The solution of the considered boundary value problem is of interest because it serves the purpose of substantiating the existence and investigation of the properties of cracks of a new type, where previously the antiplane problem was used for these purposes. Also, the solution of the problem is important in the development of methods for designing materials based on block elements, in the analysis of landslides, in the problems of seismology in the analysis preparation of crustal earthquakes.

Keywords: vector packed block element, topology, integral and differential factorization methods, exterior forms, block structures, boundary problems, bodies with coverings, design of materials.

Введение

Рассматривается в первом квадранте плоская динамическая задача второго рода для уравнения Ламе. Впервые методом блочного элемента построено точное решение этой граничной задачи в форме упакованного векторного блочного элемента. В граничной задаче рассматривается система двух дифференциальных уравнений Ламе. Для ее решения методом блочного элемента осуществляются операции внешней алгебры, внешнего анализа и строится векторный блочный элемент,

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Евдокимов Владимир Сергеевич, студент Кубанского государственного университета, лаборант Южного научного центра РАН; e-mail: evdok_vova@mail.ru.

Федоренко Алексей Григорьевич, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: afedorenko@mail.ru.

Елецкий Юрий Борисович, заведующий лабораторией Южного научного центра РАН; e-mail: elezkiy@priazovneft.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2019 г. (проекты 9.8753.2017/8.9), ЮНЦ РАН на 2019 г. (проект 00-18-04) № госрег. 01201354241, программ президиума РАН №7 (проект 00-18-21) и I-52 (проект 00-18-29), и при поддержке РФФИ (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 17-08-00323, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

состоящий из двух компонент. При его построении возникает проблема дифференциальной факторизации матрицы-функции коэффициента функционального уравнения, необходимая для правильного построения псевдодифференциальных уравнений [1]. Их решение позволяет построить компоненты внешней формы и сам упакованный блочный элемент. Решение рассмотренной граничной задачи представляет интерес, поскольку служит целям обоснования существования и исследования свойств трещин нового типа, где ранее для этих целей использовалась антиплоская задача [2]. Также решение задачи важно при разработке методов проектирования материалов на основе блочных элементов. Решение ряда плоских граничных задач для уравнений Ламе в статическом случае удалось выполнить благодаря связи этих уравнений с методами теории функций комплексного переменного, найденной Колосовым и Мусхелишвили [3]. Это, а также другие подходы позволили решить широкий круг граничных задач статической теории упругости. Некоторые примеры выполненных работ даны в [4–8].

Хотя исследования пространственных и плоских динамических уравнений Ламе производились в значительном количестве работ, точные их решения построены лишь для классических областей, исчерпываемых слоистыми телами, многослойными шарами и цилиндрами. В частных случаях граничных условий удалось решить некоторые граничные задачи для плит конечных размеров, в форме бесконечных рядов. В то же время практика исследований этих уравнений, с учетом развиваемых новых методов, показала, что далеко не все свойства этих уравнений изучены и некоторые явления только сейчас оказываются обнаруженными [2].

1. Определяющие уравнения

Рассматривается плоская граничная задача второго рода для уравнений Ламе в первом квадранте, обозначенном Ω, с осями координат $x_1 o x_2$ в предположении, что на границах квадранта заданы векторы перемещений:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu\Delta u_1+k^2u_1=0,$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\mu\Delta u_2+k^2u_2=0,$$

$$\theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad k^2=\rho\omega^2,\quad x_1,x_2\in\Omega,$$

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Здесь $u_n(x_1,x_2)$ — компоненты векторов перемещений в точке x_1,x_2; Ω — область первого квадранта $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$; λ, μ — параметры Ламе; g_n — компоненты вектора внешних воздействий на тело; ρ — плотность материала деформируемого тела, ω — частота внешних гармонических воздействий на тело, задаваемых комплексной функцией $\exp(-i\omega t)$, где t — время. На границе задаются векторы перемещений с компонентами $u_n(x_1,0)$, $u_n(0,x_2)$ на осях абсцисс и ординат соответственно. При этом для $n=1$ принимаются нормальные к границе перемещения и при $n=2$ — касательные. Значения напряжений на границах квадранта обозначаются на оси абсцисс функциями $X_{x_2x_2}(x_1,0)$, $Y_{x_2x_1}(x_1,0)$ и $X_{x_1x_1}(0,x_2)$, $Y_{x_1x_2}(0,x_2)$ — на оси ординат. Нормальные к границе напряжения обозначаются символом X, а касательные — Y.

2. Метод решения

Погрузив граничную задачу в топологическое пространство медленно растущих обобщенных функций [1,2], применив операторы преобразования Фурье $\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)$ и алгоритм внешней алгебры, приходим к системе функциональных уравнений, имеющих в матричном представлении вид

$$\mathbf{B}(\alpha_1,\alpha_2)\,\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2)=\boldsymbol{\omega}-\mathbf{G},$$

$$\mathbf{B}(\alpha_1,\alpha_2)=\|b_{mn}\|,$$

$$b_{11}=(\lambda+2\mu)\,\alpha_1^2+\mu\alpha_2^2-k^2,$$

$$b_{12}=b_{21}=(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2,$$

$$b_{22}=(\lambda+2\mu)\,\alpha_2^2+\mu\alpha_1^2-k^2,$$

$$\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2)=\{U_1(\alpha_1,\alpha_2),U_2(\alpha_1,\alpha_2)\}.$$

Здесь принято обозначение преобразования Фурье

$$U_n(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)\,u_n(x_1,x_2)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int u_n(x_1,x_2)\,e^{i\langle\alpha x\rangle}\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$

$$\langle\alpha x\rangle=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2,$$

$$\boldsymbol{\omega}(\alpha_1,\alpha_2)=\{\omega_1,\omega_2\},$$

$$\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)=\omega_{11}(0,\alpha_2)+\omega_{12}(\alpha_1,0),$$

$$\omega_2(\alpha_1,\alpha_2) = \omega_{21}(\alpha_1,0) + \omega_{22}(0,\alpha_2).$$

Компоненты вектора внешней формы $\boldsymbol{\omega}(\alpha_1,\alpha_2)$ имеют обозначения

$$\omega_{11}(0,\alpha_2) = -\sigma_{x_1x_1}(0,\alpha_2) + \\ + i\left[(\lambda+2\mu)\,\alpha_1 U_1(0,\alpha_2) + \mu\alpha_2 U_2(0,\alpha_2)\right],$$

$$\omega_{22}(0,\alpha_2) = -\tau_{x_1x_2}(0,\alpha_2) + \\ + i\left[\mu\alpha_1 U_2(0,\alpha_2) + \lambda\alpha_2 U_1(0,\alpha_2)\right] - G_2,$$

$$\omega_{12}(\alpha_1,0) = -\tau_{x_2x_1}(\alpha_1,0) + \\ + i\left[\mu\alpha_2 U_1(\alpha_1,0) + \lambda\alpha_1 U_2(\alpha_1,0)\right] - G_1,$$

$$\omega_{21}(\alpha_1,0) = -\sigma_{x_2x_2}(\alpha_1,0) + \\ + i\left[(\lambda+2\mu)\,\alpha_2 U_2(\alpha_1,0) + \mu\alpha_1 U_2(\alpha_1,0)\right].$$

Здесь $\sigma_{x_1x_1}$, $\sigma_{x_2x_2}$ — преобразования Фурье нормальных составляющих напряжений на границе, а $\tau_{x_1x_2}$, $\tau_{x_2x_1}$ — касательных.

Определитель функционального уравнения имеет вид

$$\det B = B_0\left[(\lambda+\mu)\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2\right) + B_0\right],$$
$$B_0 = \mu(\alpha_1^2+\alpha_2^2) + \delta.$$

Нули для каждого параметра определителя представимы в форме

$$\alpha_{11+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + (\lambda+2\mu)^{-1}\delta},$$
$$\alpha_{12+} = i\sqrt{\alpha_2^2 + \mu^{-1}\delta},$$
$$\alpha_{21+} = i\sqrt{\alpha_1^2 + (\lambda+2\mu)^{-1}\delta},$$
$$\alpha_{22+} = i\sqrt{\alpha_1^2 + \mu^{-1}\delta}.$$

Для исследования граничной задачи методом блочного элемента на этапе внешнего анализа необходимо осуществить дифференциальную факторизацию матрицы-функции и выполнить операцию построения автоморфизма. С этой целью, с учетом свойств пространства медленно растущих обобщенных функций, строится представление решения матричного функционального уравнения в виде

$$\mathbf{U}(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{B}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\,\boldsymbol{\omega},$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det\mathbf{B}}\times \\ \times\begin{Vmatrix} (\lambda+\mu)\,\alpha_2^2 + B_0 & -(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2 \\ -(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2 & (\lambda+\mu)\,\alpha_1^2 + B_0 \end{Vmatrix} \tag{2.1}$$

и ставится требование обращения вектора решений в нуль вне носителя, то есть первого квадранта

$$\mathbf{F}^{-1}(x_1,x_2)\,\mathbf{B}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\,\boldsymbol{\omega} = 0, \\ x_1, x_2 \notin \Omega. \tag{2.2}$$

Очевидно,

$$\det\begin{Vmatrix} (\lambda+\mu)\,\alpha_2^2 + B_0 & -(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2 \\ -(\lambda+\mu)\,\alpha_1\alpha_2 & (\lambda+\mu)\,\alpha_1^2 + B_0 \end{Vmatrix} = \\ = \det\mathbf{B}.$$

Именно это обстоятельство, показывающее, что матрица-функция, входящая в обратную, имеет определитель, содержащий нули матрицы $\mathbf{B}$, приводит к необходимости осуществления дифференциальной факторизации матрицы-функции $\mathbf{B}$.

Факторизующие матрицы-функции имеют вид

$$\mathbf{R}_{mn} = (\alpha_m - \alpha_{mn+})^{-1}\begin{Vmatrix} \alpha_m - \alpha_{mn+} & 0 \\ 1 & C_{mn} \end{Vmatrix},$$

$$C_{11}(\alpha_{11+},\alpha_2) = -\frac{b_{11}(\alpha_{11+},\alpha_2)}{b_{21}(\alpha_{11+},\alpha_2)},$$

$$C_{12}(\alpha_{12+},\alpha_2) = -\frac{b_{11}(\alpha_{12+},\alpha_2)}{b_{21}(\alpha_{12+},\alpha_2)},$$

$$C_{21}(\alpha_1,\alpha_{21+}) = -\frac{b_{11}(\alpha_1,\alpha_{21+})}{b_{21}(\alpha_1,\alpha_{21+})},$$

$$C_{22}(\alpha_1,\alpha_{22+}) = -\frac{b_{11}(\alpha_1,\alpha_{22+})}{b_{21}(\alpha_1,\alpha_{22+})}.$$

В связи с таким свойством обратной матрицы-функции для правильного осуществления автоморфизма необходимо выполнить дифференциальную факторизацию матрицы-функции $\mathbf{K}$ и произвести необходимый отбор компонент вектора внешней формы [1]. В результате выполнения требования автоморфизма строится система псевдодифференциальных уравнений, принимающая для компонент вектора внешней формы вид

$$\omega_1(\alpha_1,\alpha_2) = -\sigma_{x_1x_1}(0,\alpha_2) - \tau_{x_2x_1}(\alpha_1,0) + \\ + i\left[(\lambda+2\mu)\,\alpha_1 u_1(0,\alpha_2) + \mu\alpha_2 u_2(0,\alpha_2)\right] - \\ + i\left[\mu\alpha_2 u_1(\alpha_1,0) + \lambda\alpha_1 u_2(\alpha_1,0)\right],$$

$$\omega_2(\alpha_1,\alpha_2) = -\sigma_{x_2x_2}(\alpha_1{,}0) - \tau_{x_1x_2}(0,\alpha_2) + \\ + i\left[(\lambda+2\mu)\,\alpha_2 u_2(\alpha_1{,}0) + \mu\alpha_1 u_2(\alpha_1{,}0)\right] + \\ + i\left[\mu\alpha_1 u_2(0,\alpha_2) + \lambda\alpha_2 u_1(0,\alpha_2)\right],$$

$$-\sigma_{x_1x_1}(0,\alpha_2) - \tau_{x_2x_1}(\alpha_{11+}{,}0) + \\ + i\left[(\lambda+2\mu)\,\alpha_{11+} u_1(0,\alpha_2) + \mu\alpha_2 u_2(0,\alpha_2)\right] - \\ + i\left[\mu\alpha_2 u_1(\alpha_{11+}{,}0) + \lambda\alpha_{11+} u_2(\alpha_{11+}{,}0)\right] = 0.$$

$$-\sigma_{x_1x_1}(0,\alpha_{21+}) - \tau_{x_2x_1}(\alpha_1{,}0) + \\ + i\big[(\lambda+2\mu)\,\alpha_1 u_1(0,\alpha_{21+}) + \\ + \mu\alpha_{21+} u_2(0,\alpha_{21+})\big] - \\ + i\left[\mu\alpha_{21+} u_1(\alpha_1{,}0) + \lambda\alpha_1 u_2(\alpha_1{,}0)\right] = 0,$$

$$-\sigma_{x_2x_2}(\alpha_{12+}{,}0) - \tau_{x_1x_2}(0,\alpha_2) + \\ + i\big[(\lambda+2\mu)\,\alpha_2 u_2(\alpha_{12+}{,}0) + \\ + \mu\alpha_{12+} u_2(\alpha_{12+}{,}0)\big] + \\ + i\left[\mu\alpha_{12+} u_2(0,\alpha_2) + \lambda\alpha_2 u_1(0,\alpha_2)\right] = 0,$$

$$-\sigma_{x_2x_2}(\alpha_1{,}0) - \tau_{x_1x_2}(0,\alpha_{22+}) + \\ + i\left[(\lambda+2\mu)\,\alpha_{22+} u_2(\alpha_1{,}0) + \mu\alpha_1 u_2(\alpha_1{,}0)\right] + \\ + i\left[\mu\alpha_1 u_2(0,\alpha_{22+}) + \lambda\alpha_{22+} u_1(0,\alpha_{22+})\right] = 0.$$

Решения системы псевдодифференциальных уравнений, с учетом требования (2.2), представимы в форме

$$\omega_1(\alpha_1,\alpha_2) = \left[s_1(\alpha_1,\alpha_2) - s_1(\alpha_{11+},\alpha_2)\right] - \\ - \left[s_1(\alpha_1,\alpha_{21+}) - s_1(\alpha_{11+},\alpha_{21+})\right],$$

$$\omega_2(\alpha_1,\alpha_2) = \left[s_2(\alpha_1,\alpha_2) - s_2(\alpha_{12+},\alpha_2)\right] - \\ - \left[s_2(\alpha_1,\alpha_{22+}) - s_2(\alpha_{12+},\alpha_{22+})\right].$$

Здесь приняты обозначения

$$s_1(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = i\left[(\lambda+2\mu)\,\alpha_1 u_1(0,\alpha_2) + \mu\alpha_2 u_2(0,\alpha_2)\right] + \\ + i\left[\mu\alpha_2 u_1(\alpha_1{,}0) + \lambda\alpha_1 u_2(\alpha_1{,}0)\right],$$

$$s_2(\alpha_1,\alpha_2) = i\left[\mu\alpha_1 u_2(0,\alpha_2) + \lambda\alpha_2 u_1(0,\alpha_2)\right] + \\ + i\left[(\lambda+2\mu)\,\alpha_2 u_2(\alpha_1{,}0) + \mu\alpha_1 u_1(\alpha_1{,}0)\right],$$

$$s_1(\alpha_1,\alpha_2) - s_1(\alpha_{11+},\alpha_2) = \\ = i(\lambda+2\mu)\left[\alpha_1 u_1(0,\alpha_2) - \alpha_{11+} u_1(0,\alpha_2)\right] + \\ + i\mu\left[\alpha_2 u_1(\alpha_1{,}0) - \alpha_2 u_1(\alpha_{11+}{,}0)\right] + \\ + \lambda\left[\alpha_1 u_2(\alpha_1{,}0) - \alpha_{11+} u_2(\alpha_{11+}{,}0)\right],$$

$$s_2(\alpha_1,\alpha_{22+}) - s_2(\alpha_{12+},\alpha_{22+}) = \\ = \mu\left[\alpha_1 u_2(0,\alpha_{22+}) - \alpha_{12+} u_2(0,\alpha_{22+})\right] + \\ + i\mu\left[\alpha_1 u_1(\alpha_1{,}0) \neg \alpha_{12+} u_1(\alpha_{12+}{,}0)\right] + \\ + (\lambda+2\mu)\left[\alpha_{22+} u_2(\alpha_1{,}0) \neg \alpha_{22+} u_2(\alpha_{12+}{,}0)\right].$$

В построенные решения входят произвольные перемещения, заданные на границе квадранта Ω.

В результате внесения построенных решений псевдодифференциальных уравнений в правые части внешних форм в (2.1) получаем представление упакованного векторного блочного элемента, являющегося точным решением поставленной граничной задачи для уравнений Ламе в первом квадранте в виде

$$\mathbf{u}(x_1,x_2) = \mathbf{F}^{-1}(x_1,x_2)\,\mathbf{B}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\,\boldsymbol{\omega}.$$

В случае необходимости определения напряжений, нужно воспользоваться соответствующими уравнениями закона Гука.

Заключение

Таким образом, методом блочного элемента можно строить векторные упакованные блочные элементы. Особенность их, по сравнению со скалярным случаем, состоит в требовании дополнительного построения дифференциальной факторизации матрицы-функции коэффициента функционального уравнения, который является полиномиальной матрицей.

Литература

1. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates // Acta Mechanica. 2018. Vol. 10. Iss. 11. P. 4727-–4739. DOI: 10.1007/s00707-018-2255-7
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О влиянии пространственной модели литосферных плит на стартовое землетрясение // ДАН. 2018. Т. 480. № 2. С. 158–163.
3. *Мусхелишвили Н.И.* Системы интегральных уравнений. М.: Физматлит, 1962. 600 с.
4. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
5. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1955. 668 с.
6. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
7. *Купрадзе В.Д.* Методы потенциала в теории упругости. М.: Наука, 1963. 472 с.
8. *Эскин Г.И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. М.: Наука, 1973. 232 с.

References

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. On a mechanical approach to the prediction of earthquakes during horizontal motion of litospheric plates. *Acta Mechanica*, 2018, vol. 10, iss. 11,pp. 4727–4739. DOI: 10.1007/s00707-018-2255-7
2. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. O vliyanii prostranstvennoy modeli litosfernykh plit na startovoe zemletryasenie [On the influence of the spatial model of lithospheric plates on the starting earthquake]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2018, vol. 480, no 2, pp. 158–163. (In Russian)
3. Muskhelishvili, N.I. *Sistemy integral'nykh uravneniy* [Systems of integral equations]. Fizmatlit, Moscow, 1962. (In Russian)
4. Novatskiy, V. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Mir, Moscow, 1975. (In Russian)
5. Sneddon, I. *Preobrazovaniya Fur'e* [Fourier transforms]. Izdatelstvo inostrannoy literatury, Moscow, 1955. (In Russian)
6. Cherepanov, G.P. *Mekhanika khrupkogo razrusheniya* [A mechanics of brittle fracture]. Nauka, Moscow, 1974. (In Russian)
7. Kupradze, V.D. *Metody potentsiala v teorii uprugosti* [Potential methods in elasticity theory]. Nauka, Moscow, 1963. (In Russian)
8. Eskin, G.I. *Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh psevdodifferentsial'nykh uravneniy* [Boundary value problems for elliptic pseudo-differential equations]. Nauka, Moscow, 1973. (In Russian)

Статья поступила 17 августа 2019 г.