Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-16-3-40-45

О НЕКОТОРЫХ ПРИЛОЖЕНИЯХ ПОКРЫТИЙ С ЖИДКОСТЬЮ

Евдокимова О. В., Бабешко В. А., Бабешко О. М., Уафа С. Б., Коваленко М. М., Бушуева О. А.

ON SOME APPLICATIONS OF LIQUID COATINGS

O. V. Evdokimova[1], V. A. Babeshko[1,2], O. M. Babeshko[2], S. B. Uafa[1], M. M. Kovalenko[1], O. A. Bushueva[2]

[1] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
[2] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. The block element method is used to investigate the behavior of the coated material under the assumption that the surface is exposed to an active liquid medium capable of destroying the coating, including in the process of subduction, tsunami preparation, landslide processes. It is assumed that the destruction begins with the formation of vertical local cracks in the coating, which then grow and lead to the exposure of the unprotected surface. Assuming the possibility of modeling a liquid layer by shallow water equations, we investigate a block structure that includes a body in the form of a deformable layer, a defective coating modeled by Kirchhoff plates and a heavy liquid layer. The distribution of the stress concentration in such a block structure is studied and the conditions both allowing the further use of such an object and excluding this possibility are revealed.

Keywords: block element, lithospheric plates, topology, exterior forms, block structures, boundary problems, cracks, subduction, tsunami, landslides.

Введение

Методом блочного элемента исследуется поведение материала с покрытием в предположении, что поверхность подвергается воздействию активной жидкой среды, способной разрушать покрытие, в том числе в процессе субдукции, оползневых процессах. Предполагается, что разрушение начинается с образования в покрытии вертикальных локальных трещин, которые затем разрастаются и приводят к обнажению незащищенной поверхности. В предположении возможности моделирования слоя жидкости уравнениями мелкой воды исследуется блочная структура, включающая тело в виде деформируемого слоя, дефектное покрытие, моделируемое пластинами Кирхгофа, и слой тяжелой жидкости. Изучено распределение концентрации напряжений в такой блочной структуре и выявлены условия, как позволяющих дальнейшее использование такого объекта, так и исключающие эту возможность.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Уафа Самир Баширович, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: uafa70@mail.ru.

Коваленко Мария Михайловна, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: akinina_mm@mail.ru.

Бушуева Ольга Алексеевна, магистрант Кубанского государственного университета; e-mail: olyabushuyeva@gmail.com.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2019 г. (проекты 9.8753.2017/8.9), ЮНЦ РАН на 2019 г. (проект 00-18-04) № госрег. 01201354241, программ президиума РАН №7 (проект 00-18-21) и I-52 (проект 00-18-29), и при поддержке РФФИ (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 17-08-00323, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

Дефекты, которые рассматриваются в работе, относятся к категории скрытых [1–12], поскольку их вертикальная плоскость является мало доступной для обнаружения ультразвуковыми или рентгеновскими методами, сканирующими в вертикальном направлении. Наличие слоя жидкости усложняет выявление дефектов. Результат работы показывает важность их обнаружения, поскольку уже единичные дефекты могут приводить к необратимым последствиям в таких конструкциях. В основе исследования лежит метод блочного элемента, достаточно удачно зарекомендовавших себя в задачах со скрытыми дефектами [12].

1. Основные уравнения

Рассматривается случай наличия одиночного дефекта в покрытии. Результат этого исследования возможно перенести на изучение множественных параллельных дефектов, используя метод, предложенный в [13]. Описанная проблема рассматривается в четырехблочной структуре, состоящей из деформируемого слоя, моделирующего тело, двух полубесконечных пластин Кирхгофа, между торцами которых может отсутствовать или присутствовать некоторое расстояние, и слоя жидкости. В каждом блоке такой структуры поставлены соответствующие граничные задачи. Методом блочного элемента исследование сводится к изучению системы функциональных уравнений, позволяющих выявить концентрацию напряжений в блочной структуре.

Считаем, что на слой жидкости и пластины действуют внешние гармонические во времени силы, направленные вертикально. В локальной системе координат $x_1x_2x_3$ с началом в плоскости x_1x_2, совпадающей со срединной плоскостью пластины, осью ox_3, направленной вверх по нормали к пластине, осью ox_1, направленной по касательной к границе торца пластины, осью ox_2 — по нормали к его границе. Область, занятая левой пластиной обозначается λ и описывается соотношениями $|x_1| \leqslant \infty$, $x_2 \leqslant -\theta$, а занятая правой — индексом r и координатами $|x_1| \leqslant \infty$, $\theta \leqslant x_2$. Для пластин уравнения Кирхгофа для фрагментов $b = \lambda, r$, занимающих области Ω_b с границами $\partial\Omega_b$, при вертикальных гармонических воздействиях напряжением $t_{3b}e^{-i\omega t}$ сверху и $g_{3b}e^{-i\omega t}$ — снизу после исключения временного параметра имеют вид

$$\mathbf{R}_b(\partial x_1, \partial x_2)u_{3b} + \varepsilon_{53b}(t_{3b} - g_{3b}) \equiv$$
$$\equiv \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - \varepsilon_{43b}\right)u_{3b} +$$
$$+ \varepsilon_{53b}(g_{3b} - t_{3b}) = 0,$$

$$\mathbf{R}_b(-i\alpha_1, -i\alpha_2)U_{3b} = [\,(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2 - \varepsilon_{43b}\,]\,U_{3b},$$
$$U_{3b} = \mathbf{F}_2u_{3b}, \quad G_{3b} = \mathbf{F}_2g_{3b},$$
$$T_{3b} = \mathbf{F}_2t_{3b}, \quad b = \lambda, r,$$
$$m_b = -D_{b1}\left(\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_2^2} + \nu_b\frac{\partial^2u_{3b}}{\partial x_1^2}\right) = f_{3b}(\partial\Omega_b),$$
$$D_{b1} = \frac{D_b}{H^2}, \quad D_{b2} = \frac{D_b}{H^3}, \quad x_{k0} = Hx_k,$$
$$k = 1, 2,$$

$$q_b = -D_{b2}\left(\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_2^3} + (2 - \nu_b)\frac{\partial^3u_{3b}}{\partial x_1^2\partial x_2}\right) =$$
$$= f_{4b}(\partial\Omega_b),$$

$$u_{3b} = f_{1b}(\partial\Omega_b), \quad \frac{\partial u_{3b}}{H\partial x_2} = f_{2b}(\partial\Omega_b),$$
$$D_b = \frac{E_bh_b^3}{12(1 - \nu_b^2)},$$
$$\varepsilon_{43b} = \omega^2\rho_b\frac{(1 - \nu_b^2)12H^4}{Eh_b^2},$$
$$\varepsilon_{53b} = \frac{(1 - \nu_b^2)12H^4}{E_bh_b^3}, \quad \varepsilon_6^{-1} = \frac{(1 - \nu)H}{\mu}.$$

Здесь для пластин приняты обозначения: ν_b — коэффициент Пуассона, E_b — модуль Юнга, h_b — толщина пластины, ρ_b — плотность, ω — частота колебаний, g_{3b}, t_{3b} — значения контактных напряжений со стороны основания и давлений на пластину слоя жидкости сверху, действующих вдоль оси x_3 в области Ω_b, $\mathbf{F}_2 \equiv \mathbf{F}_2(\alpha_1, \alpha_2)$ и $\mathbf{F}_1 \equiv \mathbf{F}_1(\alpha_1)$ — двумерный и одномерный операторы преобразования Фурье соответственно, m_b и q_b — изгибающий момент и перерезывающая сила, $f_1(\partial\Omega_b)$ — вертикальное перемещение на границе, $f_2(\partial\Omega_b)$ — угол поворота срединной плоскости вокруг оси x_1, в системе координат x_1ox_2; H — размерный параметр подложки, например, толщина деформируемого слоя материала.

Поведение блочного элемента, которым является слой толщины H_1 несжимаемой жидкости Ω_0 на поверхности, описывается уравнениями мелкой воды следующего вида [14]

$$p = (i\omega\rho\phi + \rho g \frac{ih_b}{\omega H_1^2}\Delta\phi)e^{-i\omega t} - we^{-i\omega t}.$$

Здесь p — давление в слое жидкости, ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения, ϕ — потенциал скоростей в жидкости, w — внешнее воздействие на слой. Учитывая, что на верхней границе литосферной плиты на нее оказывается давление слоя жидкости, для выбранной модели необходимо принять

$$t_{3b} = p, \quad u_{3b} = \frac{h_b}{i\omega H_1^2}\Delta\phi_b$$

В результате дифференциальное уравнение относительно потенциала скоростей принимает вид

$$\Delta^3\phi_b + (\varepsilon_{53b}\rho g - \varepsilon_{43b})\Delta\phi_b + \\ + \varepsilon_{53b}\rho\frac{\omega^2 H_1^2}{h_b}\phi_b - i\varepsilon_{53b}\frac{\omega H_1^2}{h_b}(g_{3b} - w_b) = 0.$$

2. Метод решения

Для использования метода блочного элемента необходимо применить его алгоритм, включающий этапы внешней алгебры, внешнего анализа и фактор-топологии. На этапе внешней алгебры граничная задача сводится к функциональному уравнению следующего вида

$$\begin{gathered} N_b(\alpha_1,\alpha_2)\Phi_b(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = \int\limits_{\partial\Omega_b} \omega_b(\alpha_1,\alpha_2) + S_b(\alpha_1,\alpha_2), \\ N_b(\alpha_1,\alpha_2) = (\alpha_1^2+\alpha_2^2)^3 + \\ +(\alpha_1^2+\alpha_2^2)(\varepsilon_{53b}\rho g - \varepsilon_{43b}) - \varepsilon_{53b}R_b, \\ S_b(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = i\varepsilon_{53b}\frac{\omega H_1^2}{h_b}\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)(g_{3b}-w_b), \\ \Phi_b(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)\phi_b, \\ R_b = \rho\frac{\omega^2 H_1^2}{h_b}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Здесь $\omega_b(\alpha_1,\alpha_2)$, $b = \lambda, r$ — внешние формы, отвечающие рассматриваемой граничной задаче, которые достаточно просто строятся. Связь между граничными напряжениями и перемещениями на поверхности упругой среды, на которой находятся пластины, имеет вид

$$\begin{gathered} u_{3m}(x_1,x_2) = \\ = \varepsilon_6^{-1}\sum_{n=1}^{2}\iint\limits_{\Omega_n} k(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2)g_{3n}(\xi_1,\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2, \\ x_1, x_2 \in \Omega_m, \quad m = 1,2,3, \\ u_{31} = u_{3\lambda}, \quad u_{32} = g_{3r}, \quad u_{33} = u_{3\theta}, \\ g_{31} = g_{3\lambda}, \quad g_{32} = g_{3r}, \\ \Omega_1 \equiv \Omega_\lambda(|x_1| \leqslant \infty;\ x_2 \leqslant -\theta), \\ \Omega_2 \equiv \Omega_r(|x_1| \leqslant \infty;\ \theta \leqslant x_2), \\ \Omega_3 \equiv \Omega_\theta(|x_1| \leqslant \infty;\ -\theta \leqslant x_2 \leqslant \theta) \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} u_{3m}(x_1,x_2) = \frac{1}{4\pi^2\varepsilon_6}\sum_{n=1}^{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int K(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times G_{3n}(\alpha_1,\alpha_2)e^{-i\langle\alpha,x\rangle}\,\mathrm{d}\alpha_1\,\mathrm{d}\alpha_2, \\ K(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)k(x_1,x_2), \\ \langle\alpha,x\rangle = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, \quad K(\alpha_1,\alpha_2,0) = O(A^{-1}), \\ A = \sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2} \to \infty. \end{gathered}$$

Здесь $K(\alpha_1,\alpha_2)$ — аналитическая функция двух комплексных переменных α_1,α_2, в частности, мероморфная, разные ее примеры приведены в многочисленных публикациях [15].

Применим к исследованию функциональных уравнений этап внешнего анализа, названного так, поскольку дифференциальные операции совершаются над внешними формами. С этой целью представим функциональные уравнения в виде

$$\begin{gathered} U_{3b}(\alpha_1,\alpha_2) = N_b^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\left[\omega_b(\alpha_1,\alpha_2) + \varepsilon_{53b}S_{3b}(\alpha_1,\alpha_2)\right]. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Потребуем выполнение автоморфизма, одним из способов осуществления которого является обращение в ноль форм-вычетов Лере лишь в тех нулях $\alpha_{2n\pm} = \alpha_{2n\pm}(\alpha_1)$ функции $N_b^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)$, которые обеспечивают каждой из граничных задач в качестве носителей только свои пластины. Псевдодифференциальные уравнения вырождаются в алгебраические. С учетом принятых обозначений уравнение для левой пластины можно представить в форме

$$
\begin{aligned}
-\,e^{-i\alpha_2-\theta)}\big\{&B_{1\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2n-})Q_\lambda(\alpha_1,-\theta)+\\
&+B_{2\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2n-})M_\lambda(\alpha_1,-\theta)+\\
&+B_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2n-})U_{3\lambda\partial x_2}(\alpha_1,-\theta)+\\
&+B_{4\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2n-})U_{3\lambda}(\alpha_1,-\theta)+\\
&+B_{5\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2n-})P(\alpha_1,-\theta)+\\
&+B_{6\lambda}(\alpha_1,\alpha_{2n-})V_{x_2}(\alpha_1,-\theta)\big\}+\\
&+S_\lambda(\alpha_1,\alpha_{2n-})=0,
\end{aligned}
$$

$$n=1,2,3.$$

Аналогичный вид имеет второе псевдодифференциальное уравнение.

В каждой из двух групп псевдодифференциальных уравнений, в соответствии с постановки той или иной граничной задачи, можно задавать по три граничных условия на торцах пластин и на сечениях водного слоя, определяемых по торцам пластин. Этап фактор-топологии предполагает осуществление сопряжения друг с другом блочных элементов как топологических многообразий с краем. Отношениями эквивалентности являются продиктованные интересами исследования, принятые в рассматриваемых задачах граничные условия. Для сопряжения блочных элементов с основанием сопрягаются граничные перемещения и контактные напряжения пластин и основания. Для перемещений имеем

$$U_{3\lambda}+U_{3r}+U_{3\theta}=U_3.$$

Здесь $U_{3\theta}$ объем жидкости в области между торцами пластин и верхней границей поверхности жидкости. При сблизившихся торцах пластин функция $U_{3\theta}$ исчезает. Последнее соотношение можно, выделив контактные напряжения $G_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_2)$, $G_{3r}(\alpha_1,\alpha_2)$, $G_3(\alpha_1,\alpha_2)$, представить в виде

$$
\begin{aligned}
&N_\lambda^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\big\langle\omega_\lambda(\alpha_1,\alpha_2)+\\
&\quad+\varepsilon_{53\lambda}iR_\lambda\left[G_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_2)-W_\lambda\right]\big\rangle+U_{3\theta}+\\
&\quad+N_r^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\big\langle\omega_r(\alpha_1,\alpha_2)+\\
&\quad\varepsilon_{53r}iR_r\left[G_{3r}(\alpha_1,\alpha_2)-W_r\right]\big\rangle=\\
&\qquad=\varepsilon_6^{-1}K(\alpha_1,\alpha_2)G_3(\alpha_1,\alpha_2).
\end{aligned}
$$

Приняв во внимание, что $G_3(\alpha_1,\alpha_2) = -G_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_2) - G_{3r}(\alpha_1,\alpha_2)$, и введя обозначения $G_{3\lambda}(\alpha_1,\alpha_2) = G^-(\alpha_1,\alpha_2)$, $G_{3r}(\alpha_1,\alpha_2) = G^+(\alpha_1,\alpha_2)$, получим следующие функциональные уравнения типа Винера–Хопфа для определения контактных напряжений для двух случаев $\theta>0$ и $\theta=0$ при $U_{3\theta\lambda}=0$ в виде

$$
\begin{aligned}
&M_{r\lambda}(\alpha_1,\alpha_2)G^+(\alpha_1,\alpha_2)=\\
&\qquad=G^-(\alpha_1,\alpha_2)+T_{r\lambda}(\alpha_1,\alpha_2)+U_{3\theta\lambda}.
\end{aligned}
$$

Функции $G^+(\alpha_1,\alpha_2)$, $G^-(\alpha_1,\alpha_2)$ регулярны по параметру α_2 в верхней и нижней полуплоскостях, соответственно [12].

Полученные функциональные уравнения являются более сложными, чем в случае отсутствия слоя жидкости. Поведение контактных напряжений в зоне сближения пластин описывается функциями, приведенными ниже. При исследовании решения первого уравнения, $\theta>0$, установлены следующие свойства контактных напряжений между пластинами и основанием:

$$g_{3\lambda}(x_1,x_2)=\sigma_{1\lambda}(x_1,x_2)(-x_2-\theta)^{-1/2},$$
$$x_2<-\theta,$$
$$g_{3r}(x_1,x_2)=\sigma_{1r}(x_1,x_2)(x_2-\theta)^{-1/2},$$
$$x_2>\theta.$$

При $\theta=0$ также имеются свойства решений, подобные выявленным при отсутствии слоя жидкости

$$g_{3\lambda}(x_1,x_2)\to\sigma_{2\lambda}(x_1,x_2)x_2^{-1},$$

$$g_{3r}(x_1,x_2)\to\sigma_{2r}(x_1,x_2)x_2^{-1}.$$

Выводы

Таким образом, наличие активных жидкостей, способных разрушать покрытие, может приводить к катастрофическим последствиям, если это разрушение приводит к образованию скрытых дефектов. Их появлению может способствовать возникновение изгибных деформаций поверхности конструкции с покрытием в сочетании с воздействием активной жидкости. В то же время предварительные исследования показали, что, в зависимости от типов воздействия на слой жидкости, могут формироваться условия, снижающие величину коэффициентов при сингулярностях, описывающих концентрацию контактных напряжений. Однако эти исследования достаточно емкие и планируются для выполнения в дальнейшем.

Литература

1. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity I // Appl. Mechanics Reviews. 2004. Vol. 57. P. 251–298. DOI: 10.1115/1.1762503
2. *Sinclair G.B.* Stress singularities in classical elasticity II // Appl. Mechanics Reviews. 2004. Vol. 57. P. 385-439. DOI: 10.1115/1.1767846
3. *Sator C., Becker W.* Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions // Arch. Appl. Mech. 2012. Vol. 82. P. 643–658. DOI: 10.1007/s00419-011-0580-6
4. *Kirugulige M.S., Tippur H.V.* Mixed-mode dynamic crack growth in a functionally graded particulate composite: experimental measurement and finite element simulations // J. Appl Mech. 2008. Vol. 75. Iss. 5. P. 051102.
5. *Zhang G., Le Q., Loghin A., Subramaniyan A., Bobaru F.* Validation of a peridynamic model for fatigue cracking // Engineering Fracture Mechanics. 2016. Vol. 162. P. 76–94. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.05.008
6. *Rangarajan R., Lew A.J.* Universal meshes: A method for triangulating planar curved domains immersed in nonconforming meshes // Int. J. Numer. Meth. Engng. 2014. Vol. 98. Iss. 4. P. 236–264.
7. *Perelmuter M.* Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks // Comput. Mechanics. 2013. Vol. 51. Iss. 4. P. 523–534.
8. *Морозов Н.Ф.* Математические вопросы теории трещин. М.: Наука, 1984. 256 с.
9. *Agrawal A., Karlsson A.V.* Obtaining mode mixity for a bimaterial interface crack using the virtual crack closure technique // Int. J. Fract. 2006. Vol. 141. P. 75–98.
10. *Beuth J.L.* Separation of crack extension modes in orthotropic delamination models // Int J Fract. 1996. Vol. 77. P. 305–321.
11. *Bjerkén C., Persson C.* A numerical method for calculating stress intensity factors for interface cracks in bimaterials // Eng. Fract. Mech. 2001. Vol. 68. P. 235–246. DOI: 10.1016/S0013-7944(00)00098-9
12. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M.* Hidden defects in nanostructures, covering bodies, and seismology // Doklady Physics. 2014. Vol. 59. No. 7. P. 313–317.
13. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Уафа Г.Н., Евдокимов В.С.* О стартовых землетрясениях при параллельных разломах литосферных плит // Известия Саратовского универсиета. Серия: Математика. механика. Физика. 2018. Т. 18. Вып. 4. С. 370–380.
14. *Стокер Дж.Дж.* Волны на воде. Математическая теория и приложения. М., Иностранная литература, 1957. 596 с.
15. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.

References

1. Sinclair, G.B. Stress singularities in classical elasticity I. *Appl. Mechanics Reviews*, 2004, vol. 57, pp. 251–298. DOI: 10.1115/1.1762503
2. Sinclair, G.B. Stress singularities in classical elasticity II. *Appl. Mechanics Reviews*, 2004, vol. 57, pp. 385-439. DOI: 10.1115/1.1767846
3. Sator, C., Becker, W. Closed-form solutions for stress singularities at plane bi- and trimaterial junctions. *Arch. Appl. Mech.*, 2012, vol. 82, pp. 643–658. DOI: 10.1007/s00419-011-0580-6
4. Kirugulige, M.S., Tippur, H.V. Mixed-mode dynamic crack growth in a functionally graded particulate composite: experimental measurement and finite element simulations. *J. Appl Mech.*, 2008, vol. 75, iss. 5, pp. 051102.
5. Zhang, G., Le, Q., Loghin, A., Subramaniyan, A., Bobaru, F. Validation of a peridynamic model for fatigue cracking. *Engineering Fracture Mechanics*, 2016, vol. 162, pp. 76–94. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2016.05.008
6. Rangarajan, R., Lew, A.J. Universal meshes: A method for triangulating planar curved domains immersed in nonconforming meshes. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 2014, vol. 98, iss. 4, pp. 236–264.
7. Perelmuter, M. Boundary element analysis of structures with bridged interfacial cracks. *Comput. Mechanics*, 2013, vol. 51, iss. 4, pp. 523–534.
8. Morozov, N.F. *Matematicheskie voprosy teorii treshchin* [Mathematical issues in crack theory]. Nauka, Moscow, 1984. (In Russian)
9. Agrawal, A., Karlsson, A.V. Obtaining mode mixity for a bimaterial interface crack using the virtual crack closure technique. *Int. J. Fract.*, 2006, vol. 141, pp. 75–98.
10. Beuth, J.L. Separation of crack extension modes in orthotropic delamination models. *Int. J. Fract.*, 1996, vol. 77, pp. 305–321.
11. Bjerkén, C., Persson, C. A numerical method for calculating stress intensity factors for interface cracks in bimaterials. *Eng Fract Mech.* 2001, vol. 68, pp. 235–246. DOI: 10.1016/S0013-7944(00)00098-9
12. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. Hidden defects in nanostructures, covering bodies, and seismology. *Doklady Physics*, 2014, vol. 59, iss. 7, pp. 313–317.
13. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Uafa, G.N., Evdokimov V.S. O startovykh zemletryaseniyakh pri parallel'nykh razlomakh litosfernykh plit [On starting earthquakes during parallel faults of lithospheric plates]. *Izvestiya Saratovskogo universieta. Seriya: Matematika. mekhanika. Fizika* [Bul-

letin of the Saratov University. Series: Mathematics. Mechanics. Physics], 2018, vol. 18, iss. 4, pp. 370–380. (In Russian)

14. Stoker, Dzh.Dzh. *Volny na vode. Matematicheskaya teoriya i prilozheniya* [Waves on water. Mathematical Theory and Applications]. Inostrannaya literatura, Moscow, 1957. (In Russian)
15. Vorovich, I.I., Babeshko, V.A. Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains]. Nauka, Moscow, 1979. (In Russian)

Статья поступила 15 августа 2019 г.