УДК 539.422.3 DOI: 10.31429/vestnik-16-3-46-53

К ИССЛЕДОВАНИЮ РЕЗОНАНСНОГО ПОВЕДЕНИЯ ВУЛКАНИЧЕСКИХ ПОСТРОЕК

Зарецкая М. В., Бабешко О. М., Павлова А. В., Телятников И. С.

TO THE STUDY OF THE RESONANCE BEHAVIOR OF VOLCANIC STRUCTURES

M. V. Zaretskaya[1], O. M. Babeshko[1], A. V. Pavlova[1], I. S. Telyatnikov[2]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Federal Research Centre Southern Research Centre, Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia
e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

Abstract. It is known that the geophysical medium in the vicinity of volcanoes is characterized by the presence of significant structural heterogeneities, which differ in their internal structure from the surrounding geological environment. This gives reason to attribute the volcanic structure with heterogeneities to the geological structures of the resonance type, which determine the mechanisms of preparation and development of the catastrophic event, both earthquakes and activation and eruption of the volcano.

It is known that the geophysical environment in the vicinity of volcanoes is characterized by the presence of significant structural heterogeneities, which differ in their internal structure from the surrounding geological environment. This gives reason to attribute the volcanic structure with heterogeneities to the geological structures of the resonance type, which determine the mechanisms of preparation and development of the catastrophic events such as earthquakes, and the activation and eruption of the volcano.

During the study of the volcanic structure resonance behavior modeled by a block structure, it is necessary to analyze the pseudo-differential equations that arise in the implementation process of the block element method and the differential factorization method. By extracting from them the corresponding integral or integro-differential equations, we are able to write out the conditions that describe the so-called "natural viruses", which can be considered as a generalization of the static conditions. Mathematical descriptions of the "viruses" allow us to find the conditions when the localization of selected parameters occurs, possible under certain conditions in reality.

In the paper we study the resonance properties of particular models of volcanic structures. We obtain an expression for the "virus" of a volcanic structure modeled by a stamp on an elastic foundation in the form of a layer, as well as establish the existence of system parameters which lead to the occurrence of unlimited resonance.

To study processes in the environment of trap provinces, we present a model of a tectonic plate, represented by a layer of finite thickness with the distributed load applied to the upper surface simulating anthropogenic effect and distributed load applied to lower surface simulating the effect of the environment of mantle plumes. In the model under consideration, we use the integral Fourier transform, which allows us to reduce the dimension of the problem and construct functional relations for obtaining the Fourier images of the main characteristics of the system, which are further determined by applying the inverse Fourier transform using the apparatus of residue theory. The obtained expressions provide an opportunity for studying the laws of the emerging fields of displacements and stresses in the environment of the trap province.

Keywords: volcanic structure, resonance type, localization conditions, natural viruses, trap province.

Зарецкая Марина Валерьевна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: zarmv@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: ilux_t@list.ru.

Отдельные результаты работы получены при поддержке РФФИ (проекты 18-01-00124, 19-08-00145), РФФИ и Администрации Краснодарского края (проект 19-41-230002).

Введение

Диагностика напряженно-деформированного состояния геоматериалов в целях прогнозирования и предотвращения чрезвычайных ситуаций относится к фундаментальным научным задачам. Исследование механизмов подготовки и развития катастрофических природных событий, к которым можно отнести землетрясения, грязевой вулканизм, извержение вулканов и пр., является составляющей общей проблемы обеспечения экологической безопасности.

Как показано в работах [1–3], для реальной геофизической среды в окрестности вулканов характерны сложные локальные геологические структуры, что дает основание рассматривать вулканическую постройку с неоднородностями как структуру резонансного типа. Имеющиеся данные о строении вулканических построек позволяют предложить рабочую гипотезу о моделировании строения исследуемых геологических объектов совокупностью блочных элементов [3].

Резонансные частоты в геофизической среде, используя упрощенные модели, например, упругого слоя, можно определить непосредственно численно-аналитическим анализом дисперсионного уравнения задачи. Наличие резонансов для вязкоупругой среды, слоистого полупространства проверяется непосредственным расчетом амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) в соответствующей области [2].

При исследовании резонансного поведения вулканической постройки, моделируемой блочной структурой, необходимо выполнить анализ псевдодифференциальных уравнений, возникающих в процессе реализации метода блочного элемента. Согласно [4, 5] при построении соответствующих им интегральных уравнений могут быть сформулированы условия, описывающие так называемые «природные вирусы», которые можно рассматривать как обобщение условий статичности. Другими словами, математические описания вирусов позволяют найти условия, сопутствующие возникновению локализации выбранных параметров, реализация которых возможна в реальности.

1. Подходы к изучению резонансных свойств некоторых моделей вулканических построек

Развитие новых моделей и механико-математических методов диагностики природных и техногенных систем привело к разработке теории аномальных процессов [4, 5] в некоторых системах, использование положений которой позволяет изучать механизмы возникновения резонансов с единых позиций. Для широкого круга природных процессов можно выделить три вида вирусов. Математически они могут быть описаны тремя однотипными операторами, а физически — им соответствует определенное распределение параметров, свойственных рассматриваемому природному процессу [4].

Введем математическое представление некоторых простейших природных вирусов [4, 5]. Будем считать, что в области Ω имеют место процессы, описываемые в общем случае детерминированными смешанными граничными задачами для систем дифференциальных уравнений в частных производных с переменными коэффициентами. Как правило, граничные задачи являются многопараметрическими и характер зависимости решений от этих параметров становится известным после обращения граничной задачи.

Обращение граничной задачи и исследование поведения решения обычно производится численными методами. В ряде случаев исследователей интересуют не полные решения граничных задач, а выявление лишь экстремальных значений, необходимых для прогноза аномального или нетипичного поведения процесса с целью упреждения нежелательных событий. В то же время практика исследования «нетипичного» поведения решений некоторых граничных задач показывает, что численная реализация исследования оказывается тем успешнее, чем более глубоко проведена предварительная аналитическая проработка проблемы. Следует иметь в виду, что природный процесс может сопровождаться одновременным проявлением нескольких вирусов одного типа. В этом случае воздействие вирусов будет усиливаться.

Диагностика наличия вирусов в природном процессе осуществляется с помощью построения псевдодифференциального уравнения граничной задачи, описывающей данный природный процесс. Определив число и места расположения вирусов, можно ставить вопрос об оценке их воздействия на природный процесс. Для этих целей из псевдодифференциального уравнения извлекаются [4] необходимые интегральные или интегродифференциальные уравнения, анализ которых позволяет выяснить структуру вируса и сформулировать алгоритм построения условий его проявления. Математическим условиям отвечают вполне определенные условия в природном процессе.

В разработанной теории [4, 5] уровни проявления вируса носят дискретный характер — от минимального до максимального. Число уровней определяется граничной задачей. По уровню определяются последствия проявления вируса в природном процессе, вплоть до максимального – аномального.

Дадим определение компоненты природного вируса, записанного для простейшей граничной задачи в области, имеющей участок $\partial\omega$ плоской границы [4, 5].

Нормальным вирусом, обозначаемым $\mathbf{V}_n$, называется оператор $\mathbf{V}$, который задается соотношением

$$\mathbf{V}\phi = V_2^{-1} K(\alpha_1, \alpha_2) V_2 \phi,$$

$$V_2\phi = \iint\limits_{\partial\omega} \phi(x_1, x_2) \times \\ \times \exp(\mathrm{i}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) \, \mathrm{d}x_1 \, \mathrm{d}x_2,$$

$$V_2^{-1}\Phi(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_{\Gamma_1\Gamma_2} \Phi(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times \exp(-\mathrm{i}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) \, \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2.$$

Здесь $K(\alpha_1, \alpha_2)$ – мероморфная функция, в общем случае двух комплексных переменных, которая в дальнейшем будет называться *символом* вируса. В частном случае это может быть рациональная функция. Такие вирусы свойственны некоторым пространственным граничным задачам механики сплошной среды и экологии. В двумерных задачах символ одномерный.

В зависимости от некоторых специфических свойств символа вируса $K(\alpha_1, \alpha_2)$ вводятся понятия *вырожденного вируса* $\mathbf{V}_v$ и *модифицированного вируса* $\mathbf{V}_m$, описанные в [4]. Вырожденный вирус имеет естественное происхождение при исследовании граничной задачи природного процесса. Сочетание некоторых вырожденных вирусов может приводить к нормальному вирусу и наоборот, некоторые операции над нормальным вирусом могут приводить к вырожденным.

Может оказаться, что природный процесс сопровождается несколькими вирусами. Тогда определяется *локальный вирус* – один из совокупности. Он обозначается, например, в случае вырожденного, в виде $\mathbf{V}_{vs}$. Здесь s обозначает номер, который присвоен локальному вирусу в совокупности имеющихся. *Глобальный* вирус представляет собой всю совокупность локальных вирусов и может обозначаться объединением $\mathbf{V}_v = \bigcup\limits_s \mathbf{V}_{vs}$.

Таким образом, природные вирусы имеют однотипное математическое описание. Эти объекты незаметны и проявляют себя лишь при определенных условиях и определенных значениях параметров и способны вызывать экстремальное протекание процессов, в том числе резонансы. Особенность их состоит в локализации процесса и инициировании резонансов в полуограниченных областях в тех диапазонах частот, в которых с точки зрения здравого смысла, они не могут существовать. Подобные свойства обнаруживаются только при моделировании процесса смешанными граничными задачами.

В качестве примера природного вируса можно рассматривать вирус вибропрочности [6]. Подобные вирусы характерны для слоистых полуограниченных сред при наличии смешанных граничных условий в интерфейсных плоскостях, в частности, плоских параллельных включений и трещин, как внутри, так и на стыках слоев, штампов на поверхности среды, и проявляется в локализации волнового процесса в окрестности неоднородностей. При этом может происходить локализация как перемещений, так и напряжений. Если рассматривается среда без затухания в условиях локализации возможны резонансы. Вирус проявляется при выполнении “соотношения статичности”, связывающего размеры и расположение неоднородностей, параметры среды и частоты колебания, а также параметры внешнего воздействия на полуограниченное тело.

Рассмотрим в качестве примера модель установившихся колебаний упругого слоя под воздействием штампа. Краевая задача в этом случае соответствует вирусу, описываемому следующими соотношениями:

$$\int\limits_{-a}^{a} k(x-\xi) q(\xi) \, \mathrm{d}\xi = 1, \quad |x| \leqslant a, \qquad (1.1)$$

$$k(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma} K(\alpha) \exp(-\mathrm{i}\alpha x) \, \mathrm{d}\alpha; \qquad (1.2)$$

$$-m_0\omega^2\delta = P - \delta Q(0),$$

$$Q(\alpha) = \int_{-a}^{a} q(x) \exp(\mathrm{i}\alpha x)\,\mathrm{d}x.$$

Здесь m_0 — масса штампа с плоским основанием, $\operatorname{Re}\delta \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ — его смещение, $\operatorname{Re} P \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ — величина действующей на штамп силы. Временной множитель отделен и изложение проведено для амплитудных значений соответствующих функций.

Рассматривается диапазон частот $\omega > \omega^*$, когда в слое происходит излучение энергии. Будем полагать, что функция $K(\alpha)$ имеет в качестве особенностей только полюсы, т.е. является мероморфной в комплексной плоскости, $K(\alpha) = K(-\alpha)$ и допускает представление

$$K(\alpha) = \Pi(\alpha) K_0(\alpha),$$

$$\Pi(\alpha) = \prod_k \left(\alpha^2 - z_k^2\right)\left(\alpha^2 - \xi_k^2\right)^{-1},$$

$$K_0(\alpha) > 0, \quad K_0(\alpha)|\alpha| \to C = \mathrm{const},$$

$$|\alpha| \to \infty, \quad \operatorname{Im}\alpha = 0.$$

Частота колебаний штампа ω определяет количество вещественных нулей z_k и полюсов ξ_k, в диапазоне частот меньше критической $(\omega < \omega^*)$ функция символа ядра не имеет вещественных нулей и полюсов.

Установим существование таких параметров штампа, толщины a и массы m, при которых возникает неограниченный резонанс, т. е. амплитуда колебаний, вызванных действием гармонической силы, будет неограниченна.

Представим амплитуду смещений массивного штампа в форме [7]

$$\delta = P\left[Q(0) - m_0\omega^2\right]^{-1}.$$

Неограниченному резонансу массивного штампа соответствует условие равенства нулю квадратной скобки.

Выполнение соотношения статичности определяет локализацию вибрации в зоне штампа

$$Q_0(\alpha) \equiv V_1 q_0(x) = 0, \tag{1.3}$$

$$V_1 f = \int_{-a}^{a} f(x) \exp(\mathrm{i}\alpha x)\,\mathrm{d}x,$$

$$V_1^{-1} F = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha) \exp(-\mathrm{i}\alpha x)\,\mathrm{d}\alpha.$$

При этом функция $q_0(x)$ является решением следующего интегрального уравнения:

$$\int_{-a}^{a} k_0(x - \xi) q_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 1, \quad |x| \leqslant a.$$

Для получения ядра этого уравнения в представлении (1.2) следует заменить символ ядра $K(\alpha)$ на $K_0(\alpha)$. С учетом (1.3) решение $q(x)$ уравнения (1.1) можно записать как

$$q(x) = V_1^{-1}\Pi^{-1}(\alpha) Q_0(\alpha),$$

$$Q(\alpha) = \Pi^{-1}(\alpha) Q_0(\alpha).$$

Таким образом, необходимо установить существование таких a, при которых имело бы место соотношение (1.3).

Представим функцию $Q_0(\alpha)$ в форме

$$Q_0(\alpha) = \frac{F(\alpha)}{K_0(\alpha)} - \frac{X^-(\alpha)}{K_0^+(\alpha)} \exp(-\mathrm{i}a\alpha) - \\ - \frac{X^+(\alpha)}{K_0^-(\alpha)} \exp(-\mathrm{i}a\alpha). \tag{1.4}$$

Здесь $F(\alpha) = 2\alpha^{-1}\sin(a\alpha)$.

Как показано в [8], функции $X^-(\alpha)$ и $X^+(\alpha)$ удовлетворяют системам линейных интегральных уравнений

$$X^+ + \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \frac{X^-(\xi)\exp(-2\mathrm{i}a\xi)}{R(\xi)(\xi - \alpha)}\mathrm{d}\xi = \\ = g^+(\alpha), \quad \alpha > \Gamma, \tag{1.5}$$

$$X^- - \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{R(\xi) X^+(\xi)\exp(2\mathrm{i}a\xi)}{(\xi - \alpha)}\mathrm{d}\xi = \\ = g^-(\alpha), \quad \alpha < \Gamma,$$

$$R(\alpha) = \frac{K_0^+(\alpha)}{K_0^-(\alpha)}, \quad K_0^+(\alpha) K_0^-(\alpha) = K_0(\alpha),$$

$$K_0^+(-\alpha) = K_0^-(\alpha),$$

правые части которых $g^\pm(\alpha)$ имеют представление

$$g^\pm(\alpha) = \pm\frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{F(\xi)\exp(\pm\mathrm{i}\xi a)}{K_\pm(\xi)(\xi - \alpha)}\mathrm{d}\xi.$$

Выбираются соответственно верхние или нижние знаки.

Анализ системы интегральных уравнений (1.5) позволяет установить следующие свойства:

$$D(\alpha) = \frac{X^+(\alpha)}{K_0^-(\alpha)} = M(\alpha, a)\exp(\mathrm{i}\theta(\alpha, a)),$$

$$\frac{X^-(\alpha)}{K_0^+(\alpha)} = M(\alpha, a)\exp(\mathrm{i}\theta(\alpha, a)),$$

$$M(\alpha, a) = |D(\alpha)|,$$

$$\theta(\alpha, a) = \operatorname{arctg} D_i(\alpha) D_r^{-1}(\alpha),$$

$$|\theta(\alpha, a)| < c < \infty,$$

$$D_i(\alpha) = \operatorname{Im} D(\alpha), \quad D_r(\alpha) = \operatorname{Re} D(\alpha).$$

Внося последние соотношения в (1.4), получим (1.3) в форме

$$\theta_0(\alpha) = \cos[a\alpha + \theta(\alpha, a)] - \\ - A(\alpha, a)\sin(a\alpha) = 0,$$

$$A(\alpha, a) = [\alpha M(\alpha, a) K_0(\alpha)]^{-1}.$$

Отсюда уравнение для определения значений a имеет вид

$$\sin(a\alpha - \lambda)\sqrt{A^2 + 2A\sin\theta + 1} = 0,$$

$$\lambda \equiv \lambda(a) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\cos\theta}{A - \sin\theta}\right).$$

Или

$$\theta(\alpha, a) = \pm\pi(k - 0{,}5),$$

$$A(\alpha, a) = (-1)^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

$$a\alpha = \lambda(a) + m\pi, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad a > 0. \tag{1.6}$$

Можно показать что для $a \gg 1$ существует решение (1.6) В [8] решения интегральных уравнений для случая $a > 0$ (1.5) представлены в виде рядов, сходящихся равномерно и абсолютно, и для $a \gg 1$ справедливо

$$X^\pm(\alpha) = g^\pm(\alpha) + T^\pm(\alpha, a),$$

$$\left|T^\pm(\alpha, a)\right| < M_0 e^{-\varepsilon a}, \quad \varepsilon > 0,$$

где функция $T^\pm(\alpha, a)$ — аналитическая функция по параметру a. Отсюда вытекает аналитичность функции $\lambda(a)$ при $a \gg 1$ и возможность представления

$$\lambda(a) = c_0 + c_1(a), \\ |c_1(a)| < M_1 e^{-\varepsilon a}, \quad c_0 = \text{const}. \tag{1.7}$$

Тогда для $a \gg 1$ уравнение (1.6) имеет счетное множество корней a_m, вид которых дается соотношением $a_m = (m\pi + \lambda_m)\alpha^{-1}$, $m \gg 1$.

Пренебрегая малой $c_1(a)$ при достаточно больших a, приближенные значения a_m можно определить следующим образом:

$$a_m \approx (m\pi + c_0)\alpha^{-1}, \quad m \gg 1. \tag{1.8}$$

Для нахождения приближенного значения параметра a удобно воспользоваться изложенными в [8] способами приближенной факторизации.

В качестве модельного примера (для случая одного положительного нуля z и полюса ξ) функция $K(\alpha)$ может быть аппроксимирована выражением

$$K(\alpha) \approx \frac{\alpha^2 - z^2}{\alpha^2 - \xi^2} K_0(\alpha),$$

$$K_0(\alpha) = \frac{c^2}{\sqrt{\alpha^2 + A^2}} P(\alpha),$$

где $c^2 = \lim\limits_{\alpha\to\infty} \alpha K(\alpha) > 0$, $P(\alpha)$ — четная рациональная функция

$$P(\alpha) = \prod_{j=1}^{N} \left(\alpha^2 - \eta_j^2\right)\left(\alpha^2 - p_j^2\right)^{-1},$$

$$\eta_j = \sigma_j + \mathrm{i}\mu_j, \quad p_j = \tau_j + \mathrm{i}\nu_j, \quad \mu_j, \quad \nu_j > 0,$$

тогда

$$K_0^+(\alpha) = \frac{c\prod\limits_{j=1}^{N}(\alpha + \eta_j)(\alpha + p_j)^{-1}}{\sqrt{A - \mathrm{i}\alpha}},$$

$$K_0^-(\alpha) = K_0^+(-\alpha).$$

Полагая для $\alpha \geqslant 0$

$$\theta_k(\alpha) = \operatorname{arctg}\left(\nu_j(\tau_j - \alpha)^{-1}\right) - \\ - \operatorname{arctg}\left(\mu_j(\sigma_j - \alpha)^{-1}\right),$$

$$\theta(\alpha) = 0{,}5\operatorname{arctg}(\alpha/A),$$

получим $\arg\left(K_0^\mp(\alpha)\right)^{-1} = \pm\sum\limits_{j=0}^{N}\theta_j(\alpha)$,

$$\left|K_0^\mp(\alpha)\right|^{-2} = \frac{\sqrt{A^2 + \alpha^2}}{c^2}\prod_{j=1}^{N}\frac{(\tau_j - \alpha)^2 + \nu_j^2}{(\sigma_j - \alpha)^2 + \mu_j^2}.$$

Рассмотрим случай $f(x) \equiv 0$. Тогда, как показано в [8], для $g^{\pm}(\alpha)$ справедливо

$$g^{\pm}(\alpha) \approx \pm \frac{\mathrm{i}\Delta^{\pm}(\alpha)}{K_0^{\pm}(0)},$$

$$\Delta^{\pm}(\alpha) = \frac{K_0^{\pm}(\alpha) - K_0^{\pm}(0)}{\alpha}.$$

В результате при $a_m \gg 1$, получаем приближенные представления

$$D(\alpha) = \frac{\mathrm{i}\Delta^{+}(\alpha)}{K_0^{+}(0)\, K_0(\alpha)},$$

$$M(\alpha, a) = \left| \frac{\Delta^{+}(\alpha)}{K_0^{+}(0)} \right| K_0^{-1}(\alpha),$$

$$\theta(\alpha, a) = \\ = \operatorname{arctg}\left\{ \sin\Phi(\alpha) \left[N(\alpha)\cos\Phi(\alpha) - 1 \right]^{-1} \right\},$$

$$N(\alpha) = \left| K_0^{+}(\alpha) \right| \left| K_0^{+}(0) \right|^{-1},$$

$$\Phi(\alpha) = \sum_{k=0}^{N} \left[\theta_k(0) - \theta_k(\alpha) \right] + 0{,}5\pi.$$

Получим приближенное значение $\lambda(a) \approx c_0$ для $m \gg 1$.

Задав ширину штампа как $2a_m$ (полуширина $a = a_m$), для которого выполняется условие (1.3), из соотношения (1.4) определим значение $Q_0(\alpha)$. А далее из (1.2) может быть найдено резонансное значение массы m_0 для закритической области в виде

$$m_0 = Q_0(0)\, \xi^2 z^{-2} \omega^{-2}.$$

Данный результат подтверждает, что резонанс возможен для массивных штампов с полушириной $a = a_m$ и массой m_0.

2. Исследование процессов в структурах трапповых провинций

Континентальные траппы можно считать одним из наиболее значительных проявлений внутриплитной тектоники. И как непосредственное продолжение континентальных трапповых провинций можно рассматривать развитие формирующихся на океанской коре подводных вулканических хребтов.

При исследовании процессов в среде трапповых провинций имеет смысл представлять тектоническую плиту слоем толщиной H, на верхнюю поверхность которого воздействует распределенная нагрузка, моделирующая техногенное воздействие, на нижнее основание — нагрузка, моделирующая воздействие среды мантийных плюмов.

Факторизационный подход, используемый при исследовании некоторых задач геомеханики [9], может быть применен и для решения подобного рода задач. Решения краевых задач удобно строить на основе интегрального подхода (для однородных сред) и его обобщения — дифференциального метода факторизации (для структурно-неоднородных сред), успешно применяемого в ограниченных и неограниченных областях и позволяющего учитывать взаимовлияние геометрических и физических параметров задачи.

Протяженность рассматриваемых областей и плоско-параллельные границы позволяют воспользоваться методом интегральных преобразований, так как применение алгоритма метода блочного элемента для структур с блоками-слоями приводят к тем же соотношениям.

Для рассматриваемой модели перемещения удовлетворяют уравнениям Ламе. Связь перемещений и напряжений дается законом Гука. Решение настоящей краевой задачи строится с помощью преобразования Фурье. После отделения временного множителя граничные условия, выраженные через компоненты вектора амплитуд смещений $\mathbf{u} = \{u_j\}$, $j = \overline{1{,}3}$, в слое, имеют вид

$$\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \bigg|_{x_3 = h_k} = p_{1k}(x_1, x_2),$$

$$\mu \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \bigg|_{x_3 = h_k} = p_{2k}(x_1, x_2),$$

$$\left(\lambda \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \Bigg|_{x_3 = h_k} = p_{3k}(x_1, x_2),$$

$$k = 1{,}2, \quad h_1 = 0, \quad h_2 = H.$$

В матричной форме их можно переписать

$$\tau|_{x_3=0} = \mathbf{p}_1(x_1, x_2), \quad \tau|_{x_3=H} = \mathbf{p}_2(x_1, x_2).$$

Применение двукратного интегрального преобразования Фурье к уравнениям Ламе и граничным условиям позволяет построить функциональные соотношения для нахождения интегральных характеристик основных характеристик системы, оригиналы которых определяются путем обращения с использованием математического аппарата теории вычетов.

Соотношения, связывающие Фурье-образы перемещений и напряжений в слое, подверженном нагрузкам на верхнем и нижнем основании, можно представить в виде

$$\mathbf{U}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) = \sum_{j=1}^{2} \mathbf{K}_j (\alpha_1, \alpha_2, x_3) \mathbf{P}_j (\alpha_1, \alpha_2),$$

где $\mathbf{U} = V_2 \mathbf{u}$, $\mathbf{P}_j = V_2 \mathbf{p}_j$,

$$K_{11,j} = -\mathrm{i}\Delta_{11,j}\alpha^{-2},$$

$$K_{12,j} = K_{21,j} = -\mathrm{i}\alpha_1\alpha_1\Delta_{12,j}\alpha^{-2},$$

$$K_{13,j} = -\mathrm{i}\alpha_1 P_j, \quad K_{22,j} = -\mathrm{i}\Delta_{22,j}\alpha^{-2},$$

$$K_{23,j} = -\mathrm{i}\alpha_2 P_j, \quad K_{31,j} = \alpha_1 S_j \alpha^{-2},$$

$$K_{32,j} = \alpha_2 S_j \alpha^{-2}, \quad K_{33,j} = R_j;$$

$$\Delta_{11,j} = \alpha_1^2 M_j + \alpha_2^2 N_j,$$

$$\Delta_{22,j} = \alpha_2^2 M_j + \alpha_1^2 N_j,$$

$$\Delta_{12,j} = M_j - N_j;$$

$$\begin{aligned} M_1 = \mathrm{i}\sigma_2\Delta^{-1} \big[& \alpha^2\sigma_1\sigma_2 \left(\alpha^2 \operatorname{sh}\sigma_2 H \operatorname{ch}\sigma_1 x_3\right) - \\ & - \gamma \left(\operatorname{ch}\sigma_1 H \operatorname{sh}\sigma_2 x_3 + \operatorname{sh}\sigma_2 (H - x_3)\right) - \\ & - \gamma^2 \left(\alpha^2 \left(\operatorname{ch}\sigma_2 H \operatorname{sh}\sigma_1 x_3 + \operatorname{sh}\sigma_1 (H - x_3)\right)\right) - \\ & - \gamma \operatorname{sh}\sigma_1 H \operatorname{ch}\sigma_2 x_3 \big]; \end{aligned}$$

$$N_1 = \frac{\mathrm{i} \operatorname{ch}\sigma_2 x_3}{\mu\sigma_2 \operatorname{sh}\sigma_2 H},$$

$$\begin{aligned} P_1 = \Delta^{-1} \big[& \gamma^2 \left(\gamma \operatorname{sh}\sigma_2 H \operatorname{sh}\sigma_1 x_3 - \right. \\ & \left. - \sigma_1\sigma_2 \left(\operatorname{ch}\sigma_1 H \operatorname{ch}\sigma_2 x_3 - \operatorname{ch}\sigma_2 (H - x_3)\right)\right) - \\ & - \alpha^2\sigma_1\sigma_2 \left(\gamma \left(\operatorname{ch}\sigma_2 H \operatorname{ch}\sigma_1 x_3 - \operatorname{ch}\sigma_1 (H - x_3)\right) - \right. \\ & \left. - \sigma_1\sigma_2 \operatorname{sh}\sigma_1 H \operatorname{sh}\sigma_2 x_3\right) \big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_1 = \sigma_1\Delta^{-1} \big[& \gamma^2 \left(\operatorname{sh}\sigma_2 H \operatorname{ch}\sigma_1 x_3 - \right. \\ & \left. - \alpha^2 \left(\operatorname{ch}\sigma_1 H \operatorname{sh}\sigma_2 x_3 + \operatorname{sh}\sigma_2 (H - x_3)\right)\right) - \\ & - \alpha^2\sigma_1\sigma_2 \left(\gamma \left(\operatorname{ch}\sigma_2 H \operatorname{sh}\sigma_1 x_3 + \operatorname{sh}\sigma_1 (H - x_3)\right) - \right. \\ & \left. - \alpha^2 \operatorname{sh}\sigma_1 H \operatorname{ch}\sigma_2 x_3\right) \big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_1 = \mathrm{i}\alpha^2\Delta^{-1} \big[& \alpha^2 \left(\sigma_1^2\sigma_2^2 \operatorname{sh}\sigma_2 H \operatorname{sh}\sigma_1 x_3 - \right. \\ & \left. - \sigma_1\sigma_2\gamma \left(\operatorname{ch}\sigma_1 H \operatorname{ch}\sigma_2 x_3 - \operatorname{ch}\sigma_2 (H - x_3)\right)\right) - \\ & - \gamma^2\sigma_1\sigma_2 \left(\operatorname{ch}\sigma_2 H \operatorname{ch}\sigma_1 x_3 - \operatorname{ch}\sigma_1 (H - x_3)\right) + \\ & + \gamma^3 \operatorname{sh}\sigma_1 H \operatorname{ch}\sigma_2 x_3 \big], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta = 2\mu \big[& 2\alpha^2\sigma_1\sigma_2\gamma^2 \left(1 - \operatorname{ch}\sigma_1 H \operatorname{ch}\sigma_2 H\right) + \\ & + \operatorname{sh}\sigma_1 H \operatorname{sh}\sigma_2 H \left(\gamma^4 + \alpha^4\sigma_1^2\sigma_1^2\right) \big], \end{aligned}$$

$$\alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad \sigma_j^2 = \alpha^2 - \kappa_j^2, \quad j = 1, 2,$$

$$\kappa_1^2 = \rho\omega^2 (\lambda + 2\mu)^{-1}, \quad \kappa_2^2 = \rho\omega^2\mu^{-1},$$

$$\gamma = \alpha^2 - 0{,}5\kappa_2^2;$$

$$M_2 = -\hat{M}_1, \quad N_2 = -\hat{N}_1,$$

$$P_2 = \hat{P}_1, \quad R_2 = -\hat{R}_1, \quad S_2 = \hat{S}_1.$$

Соотношения с крышкой получаются из соответствующих соотношений путем замены x_3 на $H - x_3$ и наоборот.

Используемый в работе подход позволяет исследовать закономерности формирующихся полей перемещений и напряжений в слое, который может рассматриваться как простейшая модель для различных классов геологических объектов, в частности, в среде трапповой провинции.

Рассмотренные задачи могут служить этапом для построения общих моделей, описывающих поведение реальных геологических сред под воздействием произвольных поверхностных и внутренних источников с целью снижения сейсмической напряженности региона путем адресного воздействия. А масштабный мониторинг, использующий методы активной сейсмологии [2], вместе с проводимыми теоретическими исследованиями открывает возможности более подробного изучения резонансного поведения сложных геологических структур и механизмов взаимодействия их отдельных элементов.

Литература

1. *Рогожин Е.А., Овсюченко А.Н., Лутиков А.И., Собисевич А.Л., Собисевич Л.Е., Горбатиков А.В.* Эндогенные опасности Большого Кавказа. М.: ИФЗ РАН, 2014. 256 с.
2. *Собисевич А.Л.* Избранные задачи математической геофизики, вулканологии и геоэкологии. Том 1. М.: ИФЗ РАН, 2012. 512 с.
3. *Павлова А.В., Павлова А.В., Зарецкая М.В., Капустин М.С., Лозовой В.В.* К исследованию волновых процессов в блочной структуре вулканической постройки // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019. Т. 16. № 2. С. 30–37.
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О «вирусной» теории некоторых аномальных природных явлений // ДАН. 2012. Т. 447. № 1. С. 33–37.

5. *Бабешко В.А., Ритцер Д., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О локализации энергии природных процессов и природные вирусы // ДАН. 2013. Т. 448. № 4. С. 406–409.
6. *Вильямс Р., Павлова А.В., Ратнер С.В.* Исследование «вирусов» вибропрочности при моделировании геологических структур // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2003. № 1. С. 33–35.
7. *Ворович И.И., Бабешко В.А., Пряхина О.Д.* Динамика массивных тел и резонансные явления в деформируемых средах. М.: Научный мир, 1999. 246 с.
8. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
9. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Горшкова Е.М., Зарецкая М.В., Павлова А.В., Телятников И.С.* Исследование поведения структурно неоднородных сред с изменяющимися свойствами // Экологический вестник научных центров черноморского экономического сотрудничества. 2013. № 3. С. 5–11.

References

1. Rogozhin, Ye.A., Ovsyuchenko, A.N., Lutikov, A.I., Sobisevich, A.L., Sobisevich, L.Ye., Gorbatikov, A.V. *Endogennyye opasnosti Bol'shogo Kavkaza* [Endogenous hazards of the Greater Caucasus]. Izdatelstvo IFZ RAN, Moscow, 2014. (In Russian)
2. Sobisevich, A.L. *Izbrannyye zadachi matematicheskoy geofiziki, vulkanologii i geoekologii* [Selected problems of mathematical geophysics, volcanology and geoecology]. Vol. 1. Izdatelstvo IFZ RAN, Moscow, 2012. (In Russian)
3. Pavlova, A.V., Pavlova, A.V., Zaretskaya, M.V., Kapustin, M.S., Lozovoy, V.V. K issledovaniyu volnovykh protsessov v blochnoy strukture vulkanicheskoy postroyki [To the study of wave processes in the block structure of a volcanic structure]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2019, vol. 16, no. 2, pp. 30–37. (In Russian)
4. Babeshko, V.A., Yevdokimova, O.V., Babeshko, O.M. O "virusnoy" teorii nekotorykh anomal'nykh prirodnykh yavleniy [On the "viral" theory of some anomalous natural phenomena]. *Doklady akademii nauk* [Doklady Physics], 2012, vol. 447, no. 1. pp. 33–37. (In Russian)
5. Babeshko, V.A., Rittser, D., Yevdokimova, O.V., Babeshko, O.M. O lokalizatsii energii prirodnykh protsessov i prirodnyye virusy [On the localization of the energy of natural processes and natural viruses]. *Doklady akademii nauk* [Doklady Physics], 2013, vol. 448, no. 4, pp. 406–409. (In Russian)
6. Vil'yams, R., Pavlova, A.V., Ratner, S.V. Issledovaniye "virusov" vibroprochnosti pri modelirovanii geologicheskikh struktur [The study of "viruses" of vibration strength in the modeling of geological structures]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2003, no. 1, p. 33. (In Russian)
7. Vorovich, I.I., Babeshko, V.A., Pryakhina, O.D. Dinamika massivnyh tel i rezonansnye javlenija v deformiruemyh sredah [Dynamic Behavior of Massive Bodies and Resonance Phenomena in Deformable Media]. Nauchn. Mir, Moscow, 1999. (In Russian)
8. Vorovich, I.I., Babeshko, V.A. *Dinamicheskiye smeshannyye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains]. Nauka, Moscow, 1979. 320 p. (In Russian)
9. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Gorshkova, E.M., Zareckaja, M.V., Pavlova, A.V., Teljatnikov I.S. Issledovanie povedenija strukturno neodnorodnyh sred s izmenjajushhimisja svojstvami [Investigation of the behavior of structurally heterogeneous media with changing properties]. *Jekologicheskij vestnik nauchnyh centrov chernomorskogo jekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2013. no. 3, pp. 5–11. (In Russian)

Статья поступила 20 августа 2019 г.