

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-16-3-54-62

МОДЕЛЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ
В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ИСТОЧНИКОМ
ИЗЛУЧЕНИЯСыромятников П. В., Кривошеева М. А., Нестеренко А. Г., Никитин Ю. Г.,
Лапина О. Н.MODEL OF DISTRIBUTION OF POLLUTANT SUBSTANCES IN A MULTILAYERED
MEDIUM WITH A PERIODIC RADIATION SOURCEP. V. Syromyatnikov^{1, 2}, M. A. Krivosheeva², A. G. Nesterenko², Yu. G. Nikitin², O. N. Lapina²¹ Federal Research Center Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,
Rostov-on-Don, 344006, Russia² Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru

Abstract. Based on the equations of turbulent diffusion for convection-diffusion-decay processes, an algorithm has been developed for calculating the distribution of pollutants in a diffusion medium that are emitted by a time-periodic radiation source. The medium is a multilayer packet of layers with plane-parallel interfaces, the radiation source can be located either at the boundaries of the packet of layers or inside it. The solution is constructed in Fourier images using the symbols of the Green functions of boundary value problems for periodic sources. The inverse two-dimensional Fourier transform is calculated numerically. It is shown in the paper that the boundary value problem for a periodic source can be reduced to solving a slightly modified boundary value problem for stationary equations of turbulent diffusion. Methods for solving a stationary boundary value problem are developed in detail in previous works of the authors. It is noted that for a periodic source, in comparison with a stationary source, the computational volumes grow in proportion to the number of harmonics in the Fourier expansion of the periodic component of the source. An example of a numerical solution of the spatial boundary-value problem for a two-layer packet with an internal periodic radiation source is given. The example takes into account nine members of the Fourier series in the source statement. The developed numerical-analytical model has high accuracy and flexibility and can be used to simulate various periodic diffusion-convection-reaction processes, and to obtain various estimates in the field of ecology and environmental protection. The proposed method is effective for solving boundary value problems for semi-bounded multilayer media for which the traditionally used finite element and finite difference methods are not applicable.

Keywords: turbulent diffusion, multilayered medium, periodic radiation source, Green's function, Fourier transform, numerical integration.

Введение

В большинстве работ, посвященных моделированию процессов распространения загрязняющих веществ в водной или воздушной среде, источники излучения рассматри-

ваются либо стационарные, либо «залповые» (нестационарные) [1–3]. Источники же периодические, занимающие промежуточное положение, практически не рассматриваются.

Сыромятников Павел Викторович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математики и механики Краснодарского отделения Южного научного центра РАН, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov_pv@mail.ru.

Кривошеева Маргарита Александровна, магистрант второго года обучения кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: margarita.krivosheeva@gmail.com.

Нестеренко Александр Григорьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: agnest@mail.ru.

Никитин Юрий Геннадиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики и компьютерных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: yug@fpm.kubsu.ru.

Лапина Ольга Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: olga_ln@mail.ru.

Работа выполнена в рамках реализации Госзадания ЮНЦ РАН на 2019 г. (№ г.р. 01201354241) при частичной поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края (проект 19-41-230011 п_а).

При этом функционирование промышленных источников загрязнений носит выраженный циклический характер, связанный с периодичностью технологического процесса [4]. Загрязнения от автомобильного и железнодорожного транспорта также имеют различные циклы: суточные, недельные, сезонные. Уже из этого ясно, что рассмотрение подобных периодических процессов весьма важно.

В данной работе решение краевых задач для уравнений турбулентной диффузии с периодическим источником строится с помощью преобразований Фурье и методов расчета символов функций Грина. При этом оказывается, что разработанные ранее авторами алгоритмы решения соответствующих стационарных краевых задач [5, 6] с небольшими модификациями могут быть применены для решения задач с периодическими источниками. Расчет обратного преобразования Фурье производится численно с помощью программ библиотеки IMSL [7]. Предложенный метод, наряду с [5, 6], эффективен для решения краевых задач для полуограниченных многослойных сред, для которых традиционно используемые методы конечного элемента и конечных разностей [1–3] неприменимы.

1. Постановка задачи и общая схема решения

Уравнение турбулентной диффузии, описывающее процесс диффузии-конвекции-распада однокомпонентного вещества, для среднемасштабного приближения имеет вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + (w - w_g) \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma \phi = \\ = \mu \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + f(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ϕ — концентрация вещества, u, v, w — скорости ветра в направлениях OX, OY, OZ соответственно, w_g — скорость вертикального оседания вещества, σ — коэффициент распада, μ, ν — коэффициенты горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно, t — время, f — функция источника.

Рассмотрим случай, когда пространственные и временные зависимости источника в правой части уравнения (1.1) разделяются и имеют следующий вид

$f(x, y, z, t) = f(x, y, z)f_0(t)$. Пусть $f_0(t)$ — вещественная периодическая функция, разложимая в тригонометрический ряд Фурье

$$f_0(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{+\infty} (a_m \cos(\omega mt) + b_m \sin(\omega mt)), \quad (1.2)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f_0(t) dt, \quad a_m = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f_0(t) \cos(\omega mt) dt,$$

$$b_m = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f_0(t) \sin(\omega mt) dt, \quad m = 1, 2, \dots,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}.$$

Здесь ω — частота, T — полупериод. Ряд (1.2) может быть представлен в комплексной форме

$$f_0(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(-i\omega mt), \quad (1.3)$$

$$c_m = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f_0(t) \exp(i\omega mt) dt.$$

Коэффициенты c_m и a_m, b_m связаны следующим образом:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_{-m} = \frac{a_m - ib_m}{2},$$

$$c_m = \frac{a_m + ib_m}{2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Каждой члену ряда $c_m \exp(-im\omega t)$ будет соответствовать источник в правой части (1.1) вида $f(x, y, z, t) = f(x, y, z)c_m \exp(-im\omega t)$ и функция концентрации $\phi(x, y, z, t) = \phi(x, y, z) \exp(-im\omega t)$. Подставляя данные выражения в (1.1) и, опуская общий множитель $\exp(-im\omega t)$, получим стационарное уравнение с функцией источника $f(x, y, z)c_m$ и параметром $(\sigma - im\omega)$ вместо σ .

Рассмотрим многослойный пакет из N однородных слоев $z_n \leq z \leq z_{n+1}, z_{N+1} > z_N > \dots > z_2 > z_1$ с параметрами $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}$,

$w_g^{(n)}$, $\sigma^{(n)}$, $\mu^{(n)}$, $\nu^{(n)}$. Пусть на одной из границ $z = z_j$ (внешней или внутренней) задан источник

$$\begin{aligned} q^{(j)}(x, y, z_j, t) &= q^{(j)}(x, y, z_j) f_0(t) = \\ &= q^{(j)}(x, y, z_j) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(-i\omega m t). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Для гармоника $c_m \exp(-i\omega m t)$ периодический процесс распространения вещества в каждом слое описывается однородным стационарным уравнением вида

$$\begin{aligned} u^{(n)} \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial x} + v^{(n)} \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial y} + \\ + (w^{(n)} - w_g^{(n)}) \frac{\partial \phi^{(n)}}{\partial z} + \phi^{(n)} (\sigma^{(n)} - i\omega) = \\ = \mu^{(n)} \left(\frac{\partial^2 \phi^{(n)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi^{(n)}}{\partial y^2} \right) + \nu^{(n)} \frac{\partial^2 \phi^{(n)}}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Введем двумерное преобразование Фурье $F_{x,y}$ по x, y с параметрами α, β и применим его к функциям концентрации $\phi_m^{(n)}$ и источника $q^{(j)}$. Их символы Фурье обозначим $\Phi_m^{(n)} = F_{x,y} [\phi_m^{(n)}]$, $Q^{(j)} = F_{x,y} [q^{(j)}]$. Введем также символ Фурье функции Грина соответствующей краевой задачи $K_m^{(n,j)} = F_{x,y} [k_m^{(n,j)}]$ с периодическим источником. Способ построения символов функций Грина $K^{(n,j)}(\alpha, \beta, z)$ для стационарных задач подробно описан в работах [5, 6] (здесь сохранены обозначения указанных работ). Отличие алгоритма расчета $K_m^{(n,j)}(\alpha, \beta, z)$ от алгоритма для $K^{(n,j)}(\alpha, \beta, z)$ состоит в замене параметра $\sigma^{(n)}$ на $(\sigma^{(n)} - i\omega)$. С учетом приведенных далее формул решение задачи для периодического источника строится на основании алгоритмов для стационарного источника [5, 6]. Имея представления $K_m^{(n,j)}$ и $Q^{(j)}$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)}(\alpha, \beta, z, t) &= \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \Phi_m^{(n)}(\alpha, \beta, z, m, \omega) \exp(-i\omega m t) = \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} K_m^{(n,j)}(\alpha, \beta, z) Q^{(j)}(\alpha, \beta) c_m \times \\ &\quad \times \exp(-i\omega m t), \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\begin{aligned} \Phi_m^{(n)}(\alpha, \beta, z, m, \omega) &= \\ &= K_m^{(n,j)}(\alpha, \beta, z) Q^{(j)}(\alpha, \beta) c_m. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Делая обратное преобразование Фурье $\phi^{(n)} = F_{\alpha,\beta}^{-1} [\Phi^{(n)}]$, окончательно получаем

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(x, y, z, t) &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m \exp(-i\omega m t) \times \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_m^{(n,j)}(\alpha, \beta, z) Q^{(j)}(\alpha, \beta) \times \\ &\quad \times \exp(-i(\alpha x + \beta y)) d\alpha d\beta, \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$z_n \leq z \leq z_{n+1}.$$

2. Пример численного решения краевой задачи для двухслойного диффузионного пакета с периодическим внутренним источником

Рассмотрим пример модельной задачи с периодическим источником излучения для пакета из двух слоев, $-\infty \leq x, y \leq +\infty$. Первый слой занимает область $z_1 \leq z \leq z_2$, второй слой $z_2 \leq z \leq z_3$; $z_1 = 0$, $z_2 = 0,5$, $z_3 = 1$. Пусть функции $\phi^{(n)}(x, y, z)$ удовлетворяют уравнениям (1.5) и краевым условиям

$$\begin{aligned} r_1 \nu^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}(x, y, z_1)}{\partial z} - \\ - r_2 \phi^{(1)}(x, y, z_1) = 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \nu^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} &= \\ &= \nu^{(2)} \frac{\partial \phi^{(2)}(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} + q^{(2)}(x, y) c_m, \\ &\quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_2} &= \\ &= \nu^{(2)} \frac{\partial \phi^{(2)}(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_2}, \\ &\quad (x, y) \notin \Omega, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{(1)}(x, y, z_2) &= \phi^{(2)}(x, y, z_2), \\ r_3 \nu^{(2)} \frac{\partial \phi^{(2)}(x, y, z_3)}{\partial z} - r_4 \phi^{(2)}(x, y, z_3) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь c_m комплексный параметр, соответствующий коэффициенту разложения функции $f_0(t)$ в (1.3). В задаче (2.1) положим безразмерные модельные параметры для слоев и граничных условий:

$$w^{(n)} = 0,5, \quad w_g^{(1)} = 0,4, \quad w_g^{(2)} = 0,6, \quad (2.2)$$

$$\nu^{(n)} = 1, \quad \mu^{(n)} = 2,5, \quad \sigma^{(n)} = 0,1,$$

$$u^{(1)} = 20, v^{(1)} = 0,$$

$$u^{(2)} = 0, \quad v^{(2)} = 20, \quad n = 1,2,$$

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0,5, \quad z_3 = 1,$$

$$r_1 = 0,01, \quad r_2 = 0,02, \quad r_3 = 0,03, \quad r_4 = 0,04.$$

Краевые условия на верхней и нижней границах пакета отличаются незначительно и соответствуют приблизительно равным процессам залипания и отражения вещества от границ.

Функция источника $q^{(2)}$ в (2.1) задана в виде суммы двух дельта-источников $q^{(2)}(x, y, z_2) = (-\delta(y + 2) + \delta(y - 2))\delta(x)/2$ (с координатами $x_1 = x_2 = 0, y_1 = -2, y_2 = 2$), действующих в интерфейсной плоскости $z = z_2 = 0,5$. В образах Фурье $Q^{(2)}(\alpha, \beta) = i \sin 2\beta$.

Обратим внимание на следующее. В первом слое горизонтальная конвекция направлена вдоль оси ОХ ($u^{(1)} = 20, v^{(1)} = 0$), в верхнем слое — вдоль оси ОУ ($u^{(2)} = 0, v^{(2)} = 20$). Так как $w^{(1)} - w_g^{(1)} = 0,1$, то в первом (нижнем) слое вертикальная конвекция направлена вверх, в верхнем слое — вниз ($w^{(2)} - w_g^{(2)} = -0,1$).

Возьмем в качестве $f_0(t)$ модельную функцию вида (1.3) с ограниченным числом членов ряда

$$f_0(t) = \sum_{m=-4}^4 c_m \exp(-i\omega mt), \quad (2.3)$$

$$\omega = 10, \quad 0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega},$$

с комплексными коэффициентами

$$c_0 = 1, \quad c_{-1} = \frac{1,6 + i0,8}{2},$$

$$c_{-2} = \frac{0,8 + i0,4}{2}, \quad c_{-3} = \frac{0,4 - i0,2}{2},$$

$$c_{-4} = \frac{0,2 - i0,1}{2}, \quad c_m = \bar{c}_{-m}, \quad m = \overline{1,4}.$$

Заметим, что функция $f_0(t)$ при данных коэффициентах является вещественной и знакопеременной. В образах Фурье решение задачи (2.1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \Phi^{(n)}(\alpha, \beta, z, t) &= \\ &= \sum_{m=-4}^4 K_m^{(n,2)}(\alpha, \beta, z) Q^{(2)}(\alpha, \beta) c_m \exp(-i\omega mt). \end{aligned}$$

Применяя обратное преобразование Фурье к $\Phi^{(n)}$, получаем

$$\begin{aligned} \phi^{(n)}(x, y, z, t) &= F_{\alpha, \beta}^{-1} [\Phi_m^{(n)}] = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m=-4}^4 c_m \exp(-i\omega mt) \times \\ &\times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} K_m^{(n,2)}(\alpha, \beta, z) Q^{(2)}(\alpha, \beta) \times \\ &\times \exp(-i(\alpha x + \beta y)) d\alpha d\beta. \end{aligned}$$

Символы функций Грина $K_m^{(n,2)}$ строятся по алгоритму для стационарных источников [5, 6] с указанными выше отличиями.

Из последней формулы ясно, что объем расчетов для периодического случая возрастает по отношению к стационарному случаю пропорционально числу гармоник в разложении $f_0(t)$ (в данном случае их девять), что существенно усложняет решение задачи и требует экономичных и достаточно точных методов расчета осциллирующих интегралов вида (1.8). Этим практическим требованиям вполне удовлетворяет программа DTWODQ математической библиотеки IMSL [7], основанная на квадратурах Гаусса–Кронрода высокого порядка.

На рис. 1–3 представлено изменение функции концентрации $\phi^{(n)}(x, y, z, t_m)$ задачи (2.1) для моментов времени $t_m = m2T/5$, ($m = 0, 1, \dots, 4$) для различных значений z : на нижней границе первого слоя $z = 0$, $n = 1$ (рис. 1), вблизи границы раздела слоев $z = 0,49$, $n = 1$ (рис. 2), и на верхней границе второго слоя $z = 1$, $n = 2$ (рис. 3). Параметр $t = t_m$ соответствует равным долям полного

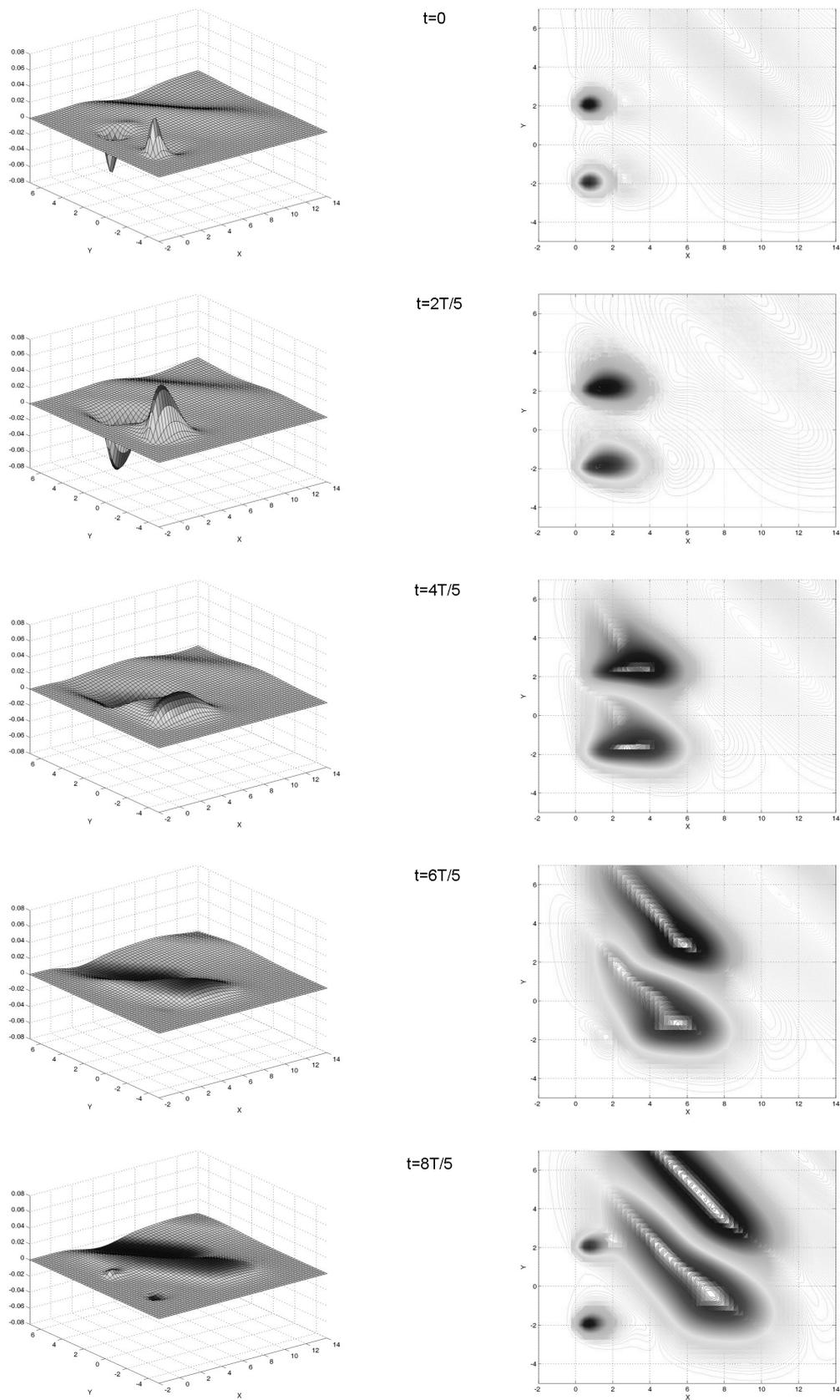


Рис. 1. Вид периодической функции концентрации $\phi^{(1)}(x, y, t_m)|_{z=0}$ в первом слое для моментов времени $t_m = m2T/5$, $m = 0, 1, 2, 3, 4$

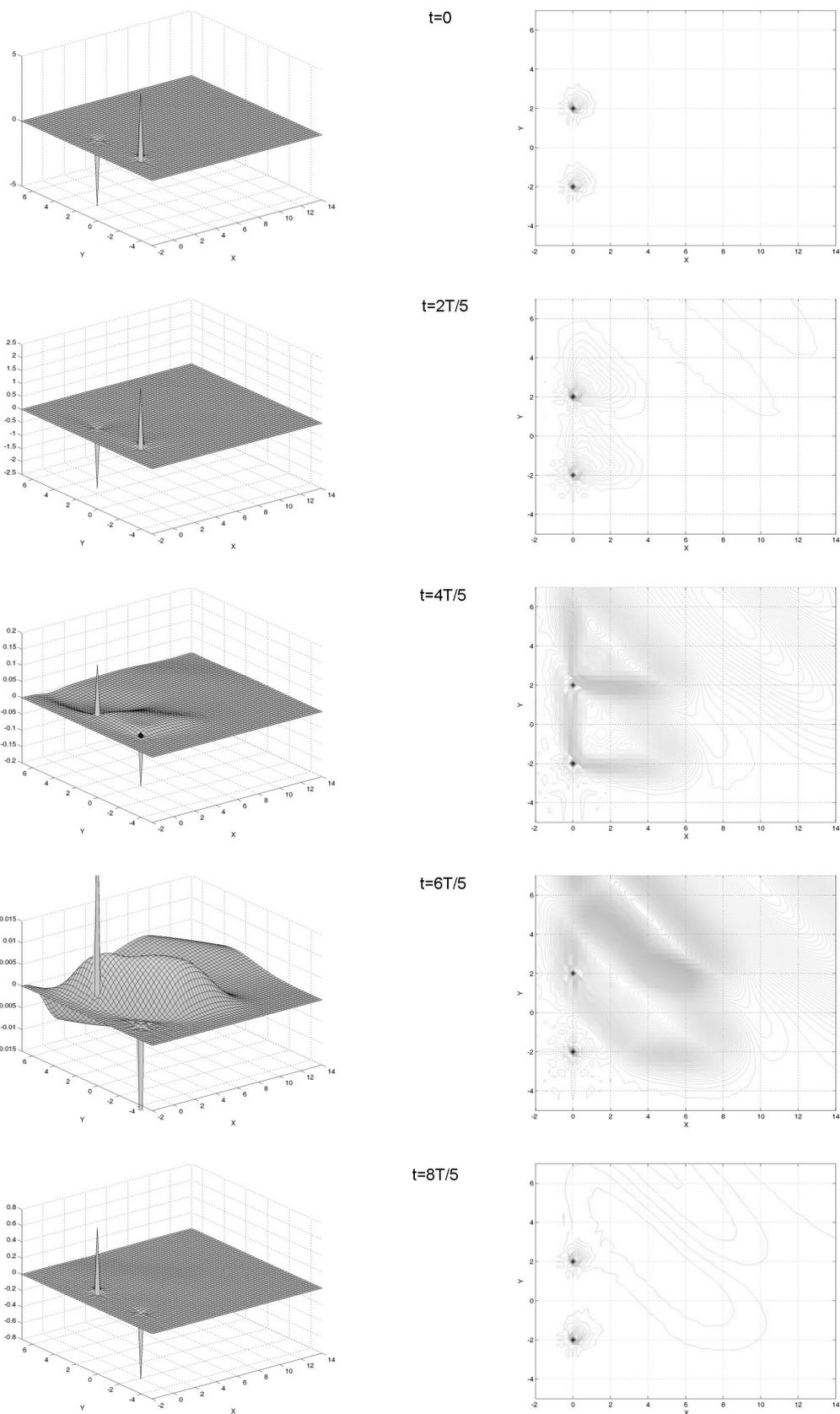


Рис. 2. Вид периодической функции концентрации $\phi^{(1)}(x, y, t_m)|_{z=0.49}$ в первом слое для моментов времени $t_m = m \cdot 2T/5$, $m = 0, 1, 2, 3, 4$

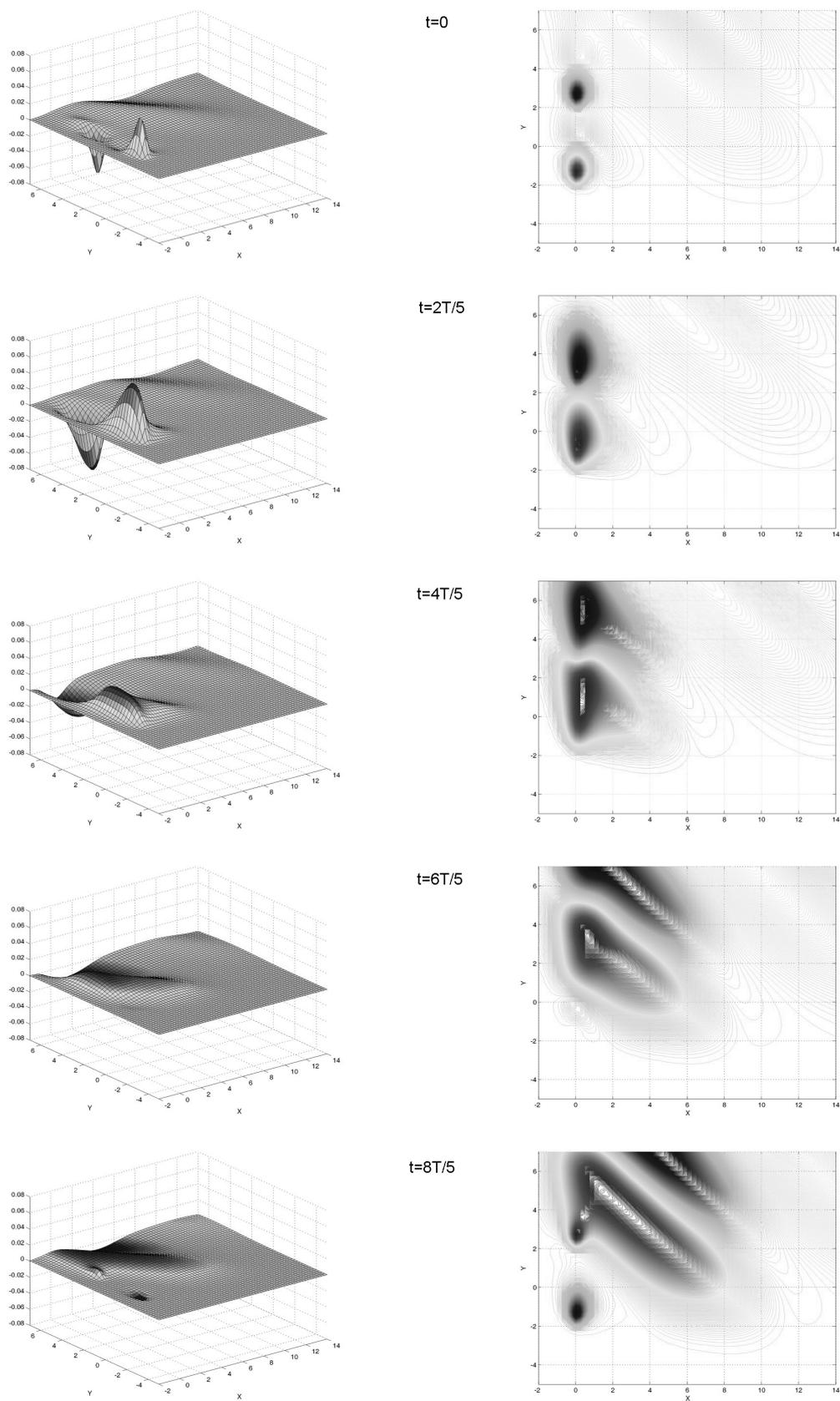


Рис. 3. Вид периодической функции концентрации $\phi^{(2)}(x, y, t_m)|_{z=1}$ во втором слое для моментов времени $t_m = m2T/5$, $m = 0, 1, 2, 3, 4$

периода $2T$. В левом столбце функция концентрации представлена в виде поверхностей, в правом столбце — в виде линий уровней.

Положительные и отрицательные значения функции концентрации в данном случае следует трактовать как отклонения в сторону увеличения или уменьшения от некоторого условного уровня фоновой концентрации (сходным образом можно трактовать положительную и отрицательную температуру).

Рис. 1, 3, несмотря на то, что расстояние по z для них максимально, имеют заметное сходство, отражающее взаимное влияние слоев друг на друга. Максимальные и средние уровни концентрации на указанных рисунках имеют одинаковые порядки, при удалении от источников образуются полосы, перпендикулярные прямой $y = x$. В верхнем слое максимумы концентрации на полосах смещены к прямой $y = 0$, в то время как в нижнем слое — к прямой $x = 0$, что отражает преобладающее влияние направления собственной горизонтальной конвекции в каждом слое.

На рис. 2 максимальные уровни концентрации при $z = 0,49$ в окрестностях проекций источников в 10–100 раз выше, чем на границах пакета слоев (рис. 1, 2), что объясняется близостью дельта-источников. Средние концентрации вне областей проекций источников имеют тот же порядок, что и на границах пакета. Для рис. 2 характерна симметрия уровней концентрации относительно направления $y = x$, которая отражает равное взаимное влияние разнонаправленной горизонтальной конвекции в слоях вблизи от плоскости раздела $z = 0,5$. При удалении от источников здесь также возникают полосы, перпендикулярные прямой $y = x$. Интересно, что вблизи источников формируются структуры из равнобедренных прямоугольных треугольников (рис. 2). Отметим, что если рассматривать аналогичную задачу с одинаковыми направлениями и величинами горизонтальной конвекции в слоях $u^{(1)} = u^{(2)} = v^{(1)} = v^{(2)} = 10\sqrt{2}$ при прочих равных параметрах, то картина будет сходной с приведенной на рис. 2, но треугольные структуры возникать не будут.

Выводы

Алгоритм решения краевой задачи диффузии–конвекции–распада с периодическим по времени источником незначительно отличается от соответствующей краевой задачи со стационарным источником, однако

при этом объем вычислений вырастает пропорционально числу гармоник, учитываемых в разложении в ряд Фурье временной составляющей источника.

В силу большого объема вычислений необходимо использовать высокоточные методы вычисления осциллирующих интегралов, например, основанные на квадратурах Гаусса–Кронрода (программа DTWODQ библиотеки IMSL [7]).

Из приведенных расчетов видно, что в случае периодического источника даже для относительно простой задачи для двухслойного пакета картина распределения концентрации вещества в пространстве и во времени имеет сложный характер, обусловленный как взаимным влиянием процессов диффузии–конвекции в каждом слое, так и периодичностью источника.

Литература

1. Самарский А.А., Вабшчевич П.Н. Численные методы решения задач конвекции–диффузии. М.: Книжный дом. Либроком, 2015. 248 с.
2. Hundsdorfer W.H., Verwer J.G. Numerical solution of time-dependent advection–diffusion–reaction equations. Springer, Berlin, 2003. 472 p.
3. Mickens R.E. (ed.) Advances in the applications of nonstandard finite difference schemes. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, New Jersey, 2005. 665 p.
4. Тимонин А.С. Инженерно–экологический справочник. В 3-х томах. Калуга: Изд-во Н. Бочкаревой, 2003. 2825 с.
5. Сыромятников П.В. Матричный метод построения символа функции Грина для стационарных задач турбулентной диффузии в многослойных средах // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2018. Т. 15. № 3. С. 62–71. DOI: 10.31429/vestnik-15-3-62-71.
6. Сыромятников П.В. Матричный метод решения нестационарных задач конвекции — диффузии в полуограниченных многослойных и градиентных средах // Наука Юга России. 2018. Т. 14. № 4. С. 3–13. DOI: 10.7868/S25000640180401.
7. Бартенев О.В. Фортран для профессионалов. Математическая библиотека IMSL. Вып. 3. М.: Диалог-МИФИ. 2001. 364 с.

References

1. Samarskii, A.A., Vabishchevich, P.N. *Chislennyye metody resheniya zadach konveksii–diffuzii* [Numerical methods for solving convection–diffusion

- problems]. Knizhnyy dom "Librokom", Moscow, 2015. (In Russian)
2. Hundsdorfer W.H., Verwer J.G. *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*. Springer, Berlin, 2003.
 3. Mickens R.E. (ed.) *Advances in the applications of nonstandard finite difference schemes*. World Scientific Publishing Co Pte Ltd, New Jersey, 2005.
 4. Timonin A.S. *Inzhenerno-ekologicheskii spravochnik* [Environmental Engineering Handbook]. Publishing House N. Bochkareva, Kaluga, 2003. (In Russian)
 5. Syromyatnikov P.V. Matrichnyy metod postroeniya simvola funktsii Grina dlya stationarnykh zadach turbulentnoy diffuzii v mnogosloynnykh sredakh [Matrix method for constructing the symbol of the Green's function for stationary problems of turbulent diffusion in multilayer media]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2018, vol. 15. no. 3, pp. 62–71. DOI: 10.31429/vestnik-15-3-62-71 (In Russian)
 6. Syromyatnikov P.V. Matrichnyy metod resheniya nestatsionarnykh zadach konveksii — diffuzii v poluogranichennykh mnogosloynnykh i gradientnykh sredakh [A matrix method for solving non-stationary convection-diffusion problems in semibounded multilayer and gradient media]. *Nauka Yuga Rossii* [Science In The South of Russia], 2018, vol. 14. no 4, pp. 3–1. DOI: 10.7868/S25000640180401 (In Russian)
 7. Bartenev O.V. *Fortran dlya professionalov. Matematicheskaya biblioteka IMSL* [Fortran for professionals. Mathematical Library IMSL]. Iss. 3. Dialog-MEPHI, Moscow, 2001. (In Russian)

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2019

© Сыромятников П. В., Кривошеева М. А., Нестеренко А. Г., Никитин Ю. Г., Лапина О. Н., 2019

Статья поступила 22 сентября 2019 г.