Математика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-16-4-6-12

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕННОМ ПОДХОДЕ В ПРОБЛЕМЕ ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ ПОДЗЕМНЫХ СООРУЖЕНИЙ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ШТОЛЕН

Телятников И. С.

ABOUT ONE GENERALIZED APPROACH TO THE PROBLEM OF ASSESSING THE DURABILITY OF UNDERGROUND STRUCTURES, PARALLEL ADITS

I. S. Telyatnikov

Southern scientific center of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, Russia
e-mail: ilux_t@list.ru

Abstract. The work is devoted to studying the characteristics of the stress-strain state of underground structures with multiple partitions, for example, thin deposits exposed by a system of parallel horizontal adits.

The structure is modeled by a system of Kirchhoff plates located between a linearly elastic layer located on top and a deformable foundation on the bottom. The latter can be modeled both by the elastic layer and by the Winkler foundation. We consider a method for studying boundary value problems for two deformable layers separated by a plate that has a finite number of strip cavities, based on the application of the block element method using the integral factorization method. The described approach allows us to reduce the boundary-value problem to a system of integral equations.

In the work we propose a method of approximate factorization of matrix functions with two complex variables, including polynomial ones, in respect to one of the variables with fixed real values of the other. This method can be used to solve the systems of integral equations to which the problems under consideration are reduced, thus finding contact stresses on supports and sagging of adit roofs.

Keywords: deformable layers, Kirchhoff plates, block element method, system of integral equations, approximate matrix factorization.

Введение

В работах [1–3] рассматривается проблема оценки прочностных характеристик подземных сооружений с множественными перегородками, например, тонких месторождений, вскрытых системой параллельных горизонтальных штолен. Сооружение моделируется системой пластин Кирхгофа между линейно-упругим слоем, расположенным сверху, и деформируемым основанием — снизу. Последнее может моделироваться как упругим слоем, так и основанием Винклера.

Считается, что верхний и нижний деформируемые слои имеют толщины H_k $(k = 1, 2)$, соответственно. Толщина рудного пласта — h много меньше толщины покрывающего слоя и подложки. Координатная плоскость x_1Ox_2 совмещена с общей срединной плоскостью пластин, моделирующих рудный пласт, вскрытый N протяженными штольнями, расположенными параллельно Ox_1, ось Ox_3 перпендикулярна срединной плоскости пластин.

Для исследования напряженно-деформированного состояния системы, рассматриваемой как сложная блочная структура, использован метод блочного элемента [4]. В [1, 3] описан подход, обеспечивающий сведение краевой задачи для двух деформируемых слоев, разделенных пластиной с системой N бесконечных полосовых полостей, к системе интегральных уравнений (СИУ) типа Фредгольма. Последнюю предлагается решать с помощью интегрального метода факторизации.

Основные трудности применения данного метода связаны с выполнением факторизации матриц. Алгоритмы приближенной фак-

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: ilux_t@list.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках ГЗ ЮНЦ РАН, проект № 01201354241 и при частичной поддержке РФФИ (проекты 18-05-80008, 18-01-00124).

торизации для матриц, описаны, например, в [5–7]. В настоящей работе рассмотрен еще один подход, позволяющий осуществлять приближенную факторизацию матриц-функций двух комплексных переменных, в том числе полиномиальных, по одной из переменных при фиксированных вещественных значениях другой.

1. Определяющие уравнения для элементов блочной структуры

Для случая статического взаимодействия элементов блочной структуры уравнения для смещений опор (фрагментов рудного пласта между штольнями) примут следующий вид:

$$\mathbf{R}_j\left(\partial x_1, \partial x_2\right) \mathbf{u}_j\left(x_1, x_2\right) - \mathbf{E}_j \mathbf{g}_j\left(x_1, x_2\right) = -\varepsilon_{j5} \mathbf{t}_j\left(x_1, x_2\right), \quad (1.1)$$

$$x_2 \in \Omega_j, \quad x_1 \in R.$$

Здесь $\mathbf{u}_j = \{u_{jk}\}$, $k = \overline{1,3}$ — вектор амплитуд смещений срединной поверхности j-й опоры; элементы матричных дифференциальных операторов $\mathbf{R}_j\left(\partial x_1, \partial x_2\right)$ [1–3]:

$$R_{11}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad R_{22}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$

$$R_{12}^j = R_{21}^j = \varepsilon_{j2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$R_{33}^j = \varepsilon_{j3}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right),$$

$$R_{13}^j = R_{23}^j = R_{31}^j = R_{32}^j = 0.$$

Здесь

$$\varepsilon_{j1} = \frac{1-\nu_j}{2}, \quad \varepsilon_{j2} = \frac{1+\nu_j}{2}, \quad \varepsilon_{j3} = \frac{h_j^2}{12},$$

$$\varepsilon_{j5} = \frac{1-\nu_j^2}{E_j h_j},$$

ν_j — коэффициент Пуассона, E_j — модуль Юнга, ρ_j — плотность, h_j — высота j-й опоры. В (1.1) $\mathbf{E}_j = \operatorname{diag}\{-\varepsilon_{j5}, -\varepsilon_{j5}, \varepsilon_{j5}\}$, $\mathbf{g}_j = \{g_{jk}\}$ — вектор контактных напряжений, действующих со стороны j-й опоры на верхний слой; $\mathbf{t}_j = \{t_{jk}\}$ — на основание, $k = \overline{1{,}3}$.

Для случая N штолен, занимающих области $\Sigma_k = \{a_{2k} \leqslant x_2 \leqslant a_{2k+1}\}$, $k = \overline{1,N}$, $x_1 \in R$ [1–3], число опор — $N+1$, тогда в (1.1) $j = \overline{1, N+1}$,

$$\Omega_1 = \{-\infty < x_2 \leqslant a_2\},$$

$$\Omega_{N+1} = \{a_{2N+1} \leqslant x_2 < +\infty\},$$

$$\Omega_j = \{a_{2j-1} \leqslant x_2 \leqslant a_{2j}\},$$

$$j = \overline{2, N}.$$

Таким образом, можно принять $a_1 = -\infty$, $a_{2N+2} = +\infty$.

Граничные условия на краях пластин, моделирующих пласт и опоры, при $-\infty < x_1 < +\infty$ задаются соотношениями

$$\left.\mathbf{L}_{j1}\left(\partial x_1, \partial x_2\right) \mathbf{u}\left(x_1, x_2\right)\right|_{x_2 = a_{2j-1}} = \mathbf{b}_{j1}\left(x_1\right),$$

$$\left.\mathbf{L}_{j2}\left(\partial x_1, \partial x_2\right) \mathbf{u}\left(x_1, x_2\right)\right|_{x_2 = a_{2j}} = \mathbf{b}_{j2}\left(x_1\right).$$

Через $\mathbf{L}_{jl}\left(\partial x_1, \partial x_2\right)$ здесь обозначены дифференциальные операторы, вид которых, как и функций $\mathbf{b}_{jl}\left(x_1\right)$ $\quad (l = 1{,}2)$, определяются типом крепи (для капитальных, подготовительных, очистных выработок и пр.). В работах [8,9] описаны различные варианты геометрических и статических граничных условий для пластин.

В работах [1, 2] исследован случай воздействия вертикальных сил, в том числе веса верхнего упругого слоя, на перегородки штолен. В [3] рассмотрена задача при учете только касательных напряжений в зонах контакта опор с покрывающим слоем и подложкой. В качестве подложки рассматривались основание Винклера [1, 2], и однородный упругий слой [3]. В обоих случаях перемещения в областях контакта перегородок с верхним упругим слоем, имеющим свободную от напряжений верхнюю границу, описываются соотношением

$$\mathbf{u}_+\left(x_1, x_2\right) = (1-\nu) H_1 \mu^{-1} \times \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{k}\left(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2\right) \times \left(\mathbf{g}\left(\xi_1, \xi_2\right) - \mathbf{q}_0\right) \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2, \quad (1.2)$$

$$\mathbf{k}\left(x_1, x_2\right) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \times \exp\left(-\mathrm{i}\left(x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2\right)\right) \mathrm{d}\alpha_1 \, \mathrm{d}\alpha_2,$$

$$l = 1, 2,$$

где ν, μ — соответственно коэффициент Пуассона и модуль сдвига верхнего упругого слоя,

$\mathbf{q}_0 = \{0{,}0, \rho g H_1\}$, так как сделано допущение о том, что покрывающий месторождение упругий слой со свободной от напряжений верхней границей и плотностью ρ оказывает на пласт воздействие (g — ускорение свободного падения) перпендикулярно его срединной плоскости. Возникающие при этом касательные напряжения считаются настолько малыми, что ими можно пренебречь.

Напряжения $\mathbf{t}(x_1, x_2)$ и перемещения $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ верхней границы основания Винклера с коэффициентом постели k связаны соотношением

$$\mathbf{u}_-(x_1, x_2) = (1-\nu) H_2 \mu^{-1} k \mathbf{t}(x_1, x_2).$$

Для модели основания в виде упругого слоя в предположении одинаковых механических свойств покрывающего и подстилающего слоев будем иметь

$$\mathbf{u}_-(x_1, x_2) = (1-\nu) H_2 \mu^{-1} \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{k}(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2) \times \\ \times \mathbf{t}(\xi_1, \xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2. \quad (1.3)$$

Последнее соотношение можно переписать для Фурье-образов напряжений и перемещений в виде

$$\mathbf{U}_-(\alpha_1, \alpha_2) = (1-\nu) H_2 \mu^{-1} \times \\ \times \mathbf{K}(\alpha_1, \alpha_2) \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{T}_j(\alpha_1, \alpha_2),$$

где

$$\mathbf{U} = V_2(\alpha_{1j}, \alpha_{2j})\,\mathbf{u}, \quad \mathbf{T}_j = V_2(\alpha_{1j}, \alpha_{2j})\,\mathbf{t}_j,$$

$V_2(\alpha_{1j}, \alpha_{2j})$ — двумерное преобразование Фурье:

$$V_2(\alpha_{1j}, \alpha_{2j})\,\mathbf{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{u}(x_1, x_2) \times \\ \times \exp(\mathrm{i}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2))\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2,$$

$$\mathbf{T}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{a_{2j-1}}^{a_{2j}} \mathbf{t}_j(x_1, x_2) \times \\ \times \exp(\mathrm{i}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2))\,\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2.$$

2. Построение системы интегральных уравнений

Для решения краевой задачи использован хорошо зарекомендовавший себя метод блочного элемента, основанный на факторизационных подходах. Следуя алгоритму метода [4], для j-й опоры приходим к следующим функциональным уравнениям [1, 2]:

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{R}_j^{-1}(-\mathrm{i}\alpha_{1j}, -\mathrm{i}\alpha_{2j}) \times \\ \times \left\{ \int_{\partial\Omega_j} \omega_j + \mathbf{E}\mathbf{G}_j(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}) - \varepsilon_{j5}\mathbf{T}_j(\alpha_{1j}, \alpha_{2j}) \right\}, \quad (2.1)$$

$$\partial\Omega_j = \{x_2 = a_{2j-1}, -\infty < x_1 < +\infty\} \cup \\ \cup \{x_2 = a_{2j}, -\infty < x_1 < +\infty\},$$

где

$$\mathbf{U}_j = V_2(\alpha_{1j}, \alpha_{2j})\,\mathbf{u}_j, \quad \mathbf{G}_j = V_2(\alpha_{1j}, \alpha_{2j})\,\mathbf{g}_j,$$

так

$$\mathbf{U}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{a_{2j}}^{a_{2j+1}} \mathbf{u}_j(x_1, x_2) \times \\ \times \exp(\mathrm{i}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2))\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2,$$

$$\mathbf{G}_j(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{a_{2j-1}}^{a_{2j}} \mathbf{g}_j(x_1, x_2) \times \\ \times \exp(\mathrm{i}(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2))\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2.$$

В локальной системе координат компоненты вектора внешней формы имеют вид

$$\omega_{1j} = \exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{\alpha}_j, \mathbf{x}_j)) \times \\ \times \left\{ -\left(\varepsilon_{j1}\frac{\partial u_{1j}}{\partial x_{2j}} + \varepsilon_{j2}\frac{\partial u_{2j}}{\partial x_{1j}} - \mathrm{i}\varepsilon_{j1}\alpha_{2j}u_{1j} \right) \mathrm{d}x_{1j} + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u_{1j}}{\partial x_{1j}} - \mathrm{i}\alpha_{1j}u_{1j} - \mathrm{i}\varepsilon_{jj}\alpha_{j2}u_{2j} \right) \mathrm{d}x_{2j} \right\};$$

$$\omega_{2j} = \exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{\alpha}_j, \mathbf{x}_j)) \times \\ \times \left\{ -\left(\varepsilon_{j2}\frac{\partial u_{1j}}{\partial x_{1j}} + \frac{\partial u_{2j}}{\partial x_{2j}} - \mathrm{i}\alpha_{2j}u_{2j} \right) \mathrm{d}x_{1j} + \right. \\ \left. + \left(\varepsilon_{j1}\frac{\partial u_{2j}}{\partial x_{1j}} - \mathrm{i}\varepsilon_{j1}\alpha_{1j}u_{2j} - i\varepsilon_{j2}\alpha_{2j}u_{1j} \right) \mathrm{d}x_{2j} \right\};$$

$$\omega_{3j} = \exp\left(\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\alpha}_j, \mathbf{x}_j\right)\right) \times$$
$$\times \left\{ -\left[\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial x_{2j}^3} - \mathrm{i}\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_{2j}^2} - \alpha_2^2 \frac{\partial u_{3j}}{\partial x_{2j}} + \mathrm{i}\alpha_2^3 u_{3j} + \right.\right.$$
$$\left. + 2 \frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial x_{1j}^2 \partial x_{2j}} - 2\mathrm{i}\alpha_2 \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_{1j}^2} \right] \mathrm{d}x_{1j} +$$
$$\left. + \left[\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial x_{1j}^3} - \mathrm{i}\alpha_{1j} \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_{1j}^2} - \alpha_{1j}^2 \frac{\partial u_{3j}}{\partial x_{1j}} + \mathrm{i}\alpha_{1j}^3 u_{3j} \right] \mathrm{d}x_{2j} \right\},$$
$$\left(\boldsymbol{\alpha}_j, \mathbf{x}_j\right) = \alpha_{1j} x_{1j} + \alpha_{2j} x_{2j}.$$

По схеме метода блочного элемента [5], вычислив формы-вычеты Лере, для прямолинейных границ приходим к алгебраическим уравнениям, после решения которых из соотношений (2.1) и (1.2), (1.3) можно получить систему интегральных уравнений, которая для объединенных векторов напряжений $\mathbf{q}_l = \{\mathbf{g}_l, \mathbf{t}_l\}$ имеет вид [3]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k}_1 \left(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2\right) \times$$
$$\times \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{q}_j \left(\xi_1, \xi_2\right) \mathrm{d}\xi_1 \, \mathrm{d}\xi_2 =$$
$$= \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{f}_j \left(x_1, x_2\right) + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_k \left(x_1, x_2\right), \quad (2.2)$$

где матрица-символ ядра СИУ имеет размерность 9×9, $\mathbf{q}_j\left(x_1, x_2\right)$ и $\mathbf{f}_j\left(x_1, x_2\right)$ имеют носители в областях $a_{2j-1} \leqslant x_2 \leqslant a_{2j}, |x_1| \leqslant \infty$, $j = \overline{1, N+1}$, а $\boldsymbol{\phi}_j\left(x_1, x_2\right)$, описывающие неизвестные векторы перемещений полов и потолков штолен, — в областях $a_{2j} \leqslant x_2 \leqslant a_{2j+1}$, $|x_1| \leqslant \infty$, $j = \overline{1, N}$.

Для ее исследования и решения (2.2) применим метод факторизации, разработанный в [5, 6].

3. Факторизации матриц-функций

Для приближенной факторизации матриц-функций предлагаются различные алгоритмы, позволяющие выявлять те или иные свойства решений исследуемых задач.

Рассмотрим один метод факторизации мероморфных матриц-функций, который отличается от представленного в [5, 6] тем, что позволяет факторизовать также полиномиальные матрицы. Он может быть использован, в том числе для факторизации коэффициентов систем функциональных уравнений, получаемых при решении СИУ описанных выше задач.

В общем случае факторизация матриц-функций в виде произведения некоммутативна, рассмотрим левостороннюю факторизацию.

Пусть в пространстве двух комплексных переменных α_k, $k = 1, 2$, необходимо факторизовать по переменной α_2 мероморфную матрицу-функцию $\mathbf{P}\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ размерности $M \times M$ относительно некоторой замкнутой кривой Γ_2, разделяющей односвязные области λ_+ и λ_-. При этом элементы ее рассматриваются как функции переменной α_2 при фиксированных вещественных значениях α_1. Известно, что для случая мероморфной

$$\mathbf{P}\left(\alpha_2\right) = \frac{1}{g\left(\alpha_2\right)} \mathbf{K}\left(\alpha_2\right)$$

нужно факторизовать общий знаменатель всех элементов матрицы (целую функцию) g — многочлен, факторизуемый в виде $g\left(\alpha_2\right) = g_+\left(\alpha_2\right) g_-\left(\alpha_2\right)$, а также матрицу-функцию $\mathbf{K}\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$, элементы которой — целые функции. Для последней необходимо получить представление

$$\mathbf{K}\left(\alpha_2\right) = \mathbf{K}_+\left(\alpha_2\right) \mathbf{K}_-\left(\alpha_2\right). \quad (3.1)$$

В представлении (3.1) матрица-функция $\mathbf{K}_+\left(\alpha_2\right)$ должна быть неособенной с регулярными в λ_+ элементами. В λ_- такими же свойствами должна обладать матрица $\mathbf{K}_-\left(\alpha_2\right)$. Помимо этого, в своих областях регулярности на бесконечности полученные элементы $\mathbf{K}_+\left(\alpha_2\right)$ и $\mathbf{K}_-\left(\alpha_2\right)$ должны обладать определенным асимптотическим поведением. Последнее определяется требованиями задачи.

Предположим, что элементы факторизуемой матрицы-функции $k_{pm}\left(\alpha_2\right)$ являются полиномами порядка $2N$

$$k_{pm} = a_{0,pm} + a_{1,pm}\alpha_2 + \ldots + a_{2N,pm}\alpha_2^{2N},$$

$\det \mathbf{K}\left(\alpha_2\right) = K\left(\alpha_2\right)$ — полином порядка $2NM$.

Число нулей $K\left(\alpha_2\right)$ в λ_+ будем полагать равным числу нулей в λ_-. Будем обозначать z_n^+ и z_n^- нули, принадлежащие λ_+ и λ_- соответственно.

Произведем обращение матрицы

$$\mathbf{K}^{-1}\left(\alpha_2\right) = \frac{1}{K\left(\alpha_2\right)} \mathbf{G}\left(\alpha_2\right),$$

$$\mathbf{G}\left(\alpha_2\right) = \left\| g_{ij} \right\|_{i,j=1}^{M},$$

где g_{ij} как алгебраические дополнения k_{ji} являются минорами порядка $M-1$. Тогда элементы матрицы $\mathbf{K}^{-1}(\alpha_2)$ — полиномы порядка $2N(M-1)$, и ее определитель можно представить в виде

$$\det \mathbf{K}^{-1}(\alpha_2) = \frac{1}{K(\alpha_2)} = \frac{1}{K^M(\alpha_2)} \det \mathbf{G}(\alpha_2),$$

т.е. $\det \mathbf{G} = K^{M-1}(\alpha)$. Следовательно, при $\alpha_2 = z_n^{\pm}$ (в нулях определителя) ранг матрицы $\mathbf{G}$ равен $M-(M-1)=1$. Иначе говоря, все строки $\mathbf{G}$ линейно зависимы.

При проведении левосторонней факторизации $\mathbf{K}$ (3.1), очевидно, что

$$\mathbf{K}^{-1}(\alpha_2) = \mathbf{K}_-^{-1}(\alpha_2)\,\mathbf{K}_+^{-1}(\alpha_2)$$

или

$$\mathbf{K}_-(\alpha_2)\,\mathbf{K}^{-1}(\alpha_2) = \mathbf{K}_+^{-1}(\alpha_2). \qquad (3.2)$$

Представим $K(\alpha_2) = K^+(\alpha_2)\,K^-(\alpha_2)$. Здесь

$$K^+(\alpha_2) = \prod_{k=1}^{MN}\left(\alpha_2 - z_k^-\right),$$

$$K^-(\alpha_2) = \prod_{k=1}^{MN}\left(\alpha_2 - z_k^+\right).$$

Для матрицы $\mathbf{K}_-(\alpha_2) = \left\|k_{ij}^-(\alpha_2)\right\|_{i,j=1}^M$ элементы ищутся в виде полиномов N-й степени

$$k_{pm}^- = a_{0,pm}^- + a_{1,pm}^-\alpha_2 + \ldots + a_{N,pm}^-\alpha_2^N = \sum_{j=0}^{N} a_{j,pm}^-\alpha_2^j.$$

Необходимо построить M^2 полиномов, каждый из которых имеет $N+1$ неизвестный коэффициент, т.е. требуется определить всего $M^2(N+1)$ неизвестных.

Из соотношения (3.2)

$$\mathbf{K}_-(\alpha_2)\,\mathbf{K}^{-1}(\alpha_2) = \frac{1}{K(\alpha_2)}\mathbf{K}_-(\alpha_2)\,\mathbf{G}(\alpha_2),$$

тогда

$$\mathbf{K}_+^{-1}(\alpha_2) = \frac{1}{K(\alpha_2)}\left\|\sum_{m=1}^{M} k_{im}^-(\alpha_2)\,g_{mj}(\alpha_2)\right\|_{i,j=1}^M. \qquad (3.3)$$

В то же время, $\mathbf{K}_+(\alpha_2) = \left\|k_{ij}^+(\alpha_2)\right\|_{i,j=1}^M$, следовательно,

$$\mathbf{K}_+^{-1}(\alpha_2) = \frac{1}{K^+(\alpha_2)}\left\|g_{ij}^+(\alpha_2)\right\|_{i,j=1}^M, \qquad (3.4)$$

где g_{ij}^+ – алгебраические дополнения элементов k_{ji}^+.

Таким образом, из (3.3), (3.4) получим

$$\frac{\sum\limits_{m=1}^{M} k_{im}^-(\alpha_2)\,g_{mj}(\alpha_2)}{\prod\limits_{k=1}^{MN}\left(\alpha_2 - z_k^-\right)\left(\alpha_2 - z_k^+\right)} = \frac{g_{ij}^+(\alpha_2)}{\prod\limits_{k=1}^{MN}\left(\alpha_2 - z_k^-\right)},$$

$$i,j = \overline{1,M}.$$

Нетрудно заметить, что в левой части последнего равенства стоит функция, имеющая полюса в точках z_k^+ и z_k^-, а в правой — только в точках z_k^-. Значит, числитель выражения слева, должен обращаться в нуль при $\alpha_2 \to z_k^+$. Из этого следует, что

$$\sum_{m=1}^{M} k_{im}^-\left(z_k^+\right) g_{mj}\left(z_k^+\right) = 0, \qquad (3.5)$$

$$i,j = \overline{1,M}, \quad k = \overline{1,MN}.$$

Количество уравнений в (3.5) не больше M^3N, но, учитывая, что $\operatorname{rang}\mathbf{G}\left(z_k^+\right) = 1$, достаточно взять в (3.5) некоторое $j = j_1$ — фиксированное число, отвечающее столбцу с наиболее простыми элементами. В результате (3.5) содержит M^2N уравнений с $M^2(N+1)$ неизвестными.

Выделяя диагональные элементы $k_{ii}^-(\alpha_2)$ и понижая степень недиагональных полиномов [6], можно доопределить M^2 неизвестных для $k_{im}^-(\alpha_2)$. Пусть

$$a_{N,im}^-(\alpha) = \begin{cases} 1, & i = m; \\ 0, & i \neq m, \end{cases} \qquad (3.6)$$

$$i,m = \overline{1,M}.$$

Будем иметь систему для M^2N уравнений с M^2N неизвестными

$$\sum_{m=1}^{M}\sum_{l=0}^{N} a_{l,im}^-\left(z_k^+\right)^l g_{mj_1}\left(z_k^+\right) = 0, \qquad (3.7)$$

$$i = \overline{1,M}, \quad k = \overline{1,MN}.$$

где для каждого фиксированного $i = i_p$ приходим к системе MN уравнений с MN неизвестными a^-_{l,i_pm}, $l = \overline{0, N}$, $m = \overline{1, M}$.

Т.е. систему можно решать отдельными группами при фиксированных i (по строкам в матрице $\mathbf{K}_-(\alpha_2)$) и таких групп будет M.

Приведенный алгоритм применим для матриц с полиномиальными элементами любого порядка. Его применение требует нахождения множества нулей определителя факторизуемой матрицы-функции.

Заключение

В работе рассмотрен разработанный в ЮНЦ и КубГУ метод исследования характеристик напряженно-деформированного состояния подземных сооружений с множественными перегородками, основанный на применении метода блочного элемента с использованием интегрального метода факторизации. Предложен подход, позволяющий осуществлять приближенную факторизацию матриц-функций двух комплексных переменных, в том числе полиномиальных, по одной из переменных при фиксированных вещественных значениях другой. Данный подход может быть использован при решении систем интегральных уравнений, к которым приводятся рассматриваемые задачи, для нахождения контактных напряжений на опорах и отвисаний кровли штолен.

Литература

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К теории влияния глобального фактора на прочность совокупности параллельных соединений слоев // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9. № 4. С. 412–419.
2. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Pavlova A.B., Telatnikov I.S., Fedorenko A.G.* The theory of block structures in problems on the strength of galleries and constructions with multiple connections // Doklady Physics. 2019. Vol. 64. No. 1. C. 4–8.
3. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В., Зарецкая М.В., Павлова А.В., Уафа С.Б., Шестопалов В.Л.* О мониторинге состояния параллельных штолен в зоне горизонтального движения литосферных плит // МТТ. 2017. № 4. С. 42–49.
4. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Gorshkova E.M., Gladskoi I.B., Grishenko D.V., Telyatnikov I.S.* Block element method for body, localizations and resonances // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 2. С. 13–19.
5. *Ворович И.И.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
6. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 265 с.
7. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399, № 1. С. 163–167.
8. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 422 с.
9. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.

References

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. K teorii vliyaniya global'nogo faktora na prochnost' sovokupnosti parallel'nykh soedineniy sloev [On the theory of the influence of the global factor on the strength of a set of parallel connections of layers]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational mechanics of continuous media], 2016, vol. 9, no. 4, pp. 412–419. (In Russian)
2. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Pavlova, A.B., Telatnikov, I.S., Fedorenko, A.G. The theory of block structures in problems on the strength of galleries and constructions with multiple connections. *Doklady Physics*, 2019, vol. 64, no. 1, pp. 4–8.
3. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V., Zaretskaya, M.V., Pavlova, A.V., Uafa, S.B., Shestopalov, V.L. O monitoringe sostoyaniya parallel'nykh shtolen v zone gorizontal'nogo dvizheniya litosfernykh plit [On monitoring the state of parallel adits in the zone of horizontal movement of lithospheric plates]. *Mekhanika tverdogo tela* [Solid Mechanics], 2017, no. 4, pp. 42–49. (In Russian)
4. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Gorshkova, E.M., Gladskoi, I.B., Grishenko, D.V., Telyatnikov, I.S. Block element method for body, localizations and resonances. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2014, no. 2, pp. 13–19.
5. Vorovich, I.I. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains]. Nauka, Moscow, 1979. (In Russian)
6. Babeshko, V.A. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshan-*

nykh zadachakh teorii uprugosti [Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory]. Nauka, Moscow, 1984. (In Russian)
7. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M. Formuly faktorizatsii nekotorykh meromorfnykh matrits-funktsiy [Factorization formulas for some meromorphic matrix functions]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2004, vol. 399, no. 1, pp. 163–167. (In Russian)
8. Vol'mir A.S. *Gibkie plastinki i obolochki* [Flexible plates and shells]. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, Moscow, 1956. (In Russian)
9. Gol'denveyzer A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Nauka, Moscow, 1976. (In Russian)

Статья поступила 28 ноября 2019 г.