Механика

УДК 51.37

DOI: 10.31429/vestnik-16-4-25-30

ПЕРЕХОД К БЕЗРАЗМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ В МОДЕЛИ ВЕТРОВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ

Кочергин В. С., Кочергин С. В.

TRANSITION TO DIMENSIONLESS PROBLEM IN WIND CIRCULATION MODEL

V. S. Kochergin, S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, 299011, Russia
e-mail: vskocher@gmail.com

Abstract. It is difficult to overestimate the importance of numerical modeling for solving problems of ocean dynamics, for solving actual problems of environmental monitoring and problems related to weather forecasting. The development of computer technology has allowed significant progress in this matter, especially by increasing the sampling. But, the direction associated with the development of the models themselves, difference schemes and methods of their numerical implementation is far from exhausted. When choosing a model describing the dynamic processes in the ocean, the results obtained from different models are often compared with each other. Therefore, the presence of an analytical (accurate) solution of a problem allows you to make a reasonable choice of the schemes and algorithms used. The ocean dynamics models themselves are quite complex. There are some analytical solutions for the simplest statements, for example, the Stommel model. In this paper, the transition to the dimensionless problem of the model of wind circulation in a rectangular pond with a flat bottom is carried out to obtain a test analytical solution of the three-dimensional problem of wind circulation. The correctness of such a transition is verified by considering the dimension of the corresponding multipliers. Expressions for barotropic velocity components are given, which can be used for testing and analysis of difference schemes and algorithms in the construction of hydrodynamic models of water bodies dynamics.

Keywords: dimensionless problem, wind currents, test problem, analytical solution.

Значение численного моделирования для решения задач динамики океана, для решения актуальных проблем экологического мониторинга и задач, связанных с прогнозом погоды трудно переоценить. Развитие вычислительной техники позволило существенно продвинуться в этом вопросе, особенно за счет увеличения дискретизации. Но направление, связанное с развитием самих моделей, разностных схем и методов их численной реализации далеко не исчерпано. При выборе той или иной модели, описывающей динамические процессы в океане, чаще всего сравниваются результаты, полученные по разным моделям, между собой. Поэтому наличие аналитического (точного) решения той или иной задачи позволяет осуществить обоснованный выбор используемых схем и алгоритмов. Сами модели динамики океана достаточно сложны. Существуют некоторые аналитические решения для самых простых постановок, например, модель Стоммела [1–4]. В [5] такая задача реализуется при помощи метода обращения динамического оператора [4] при исследовании применяемых вычислительных схем специального вида для вычисления полей скорости. В данной работе рассматривается переход к безразмерной задаче, решение которой позволяет получить аналитическое решение для баротропной компоненты скорости, ее трехмерной добавочной части и вертикальной составляющей [5, 6]. Важность последнего, пожалуй, ясна каждому, кто сталкивался с проблемой вычисления вертикальной скорости из уравнения неразрывности тем или иным способом.

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskocher@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела вычислительной техники и математического моделирования Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskocher@gmail.com.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

Рассмотрим сначала размерную стационарную модель. Будем считать, что поверхность рассматриваемого водоема в плоскости $x0y$ имеет форму прямоугольника

$$\omega_0 = [0, a] \times [0, b],$$

где его глубина $D > 0$ — постоянна. Оси декартовой системы координат направлены следующим образом: $0x$ — на восток, $0y$ — на север, $0z$ — вертикально вниз. В трехмерной области

$$\omega = \{(x, y, z) \,|\, (x, y) \in \omega_0, \quad 0 \leqslant z \leqslant D\}$$

рассмотрим следующую модель ветровых течений экмановского типа

$$\begin{cases} -fv = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P^s}{\partial x} + E\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ fu = -\dfrac{1}{\rho_0}\dfrac{\partial P^s}{\partial y} + E\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

$$t > 0, \quad (x, y, z) \in \omega^0,$$

с краевыми условиями

$$\left\{z = 0, \ (x, y) \in {\omega_0}^0\right\}:$$
$$\rho_0 E\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad \rho_0 E\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0; \tag{2}$$

$$\left\{z = D, \ (x, y) \in {\omega_0}^0\right\}:$$
$$\rho_0 E\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x^b, \quad \rho_0 E\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y^b, \quad w = 0; \tag{3}$$

$$\{0 \leqslant z \leqslant D, \ (x, y) \in \partial\omega_0\}:$$
$$Un_x + Vn_y = 0. \tag{4}$$

В (4) присутствуют интегральные скорости

$$U(x, y) = \int\limits_0^D u(x, y, z)dz,$$

$$V(x, y) = \int\limits_0^D v(x, y, z)dz,$$

а в (3) принимается следующий вариант параметризации придонного трения

$$\tau_x^b = \rho_0 R\frac{U}{D}, \quad \tau_y^b = \rho_0 R\frac{V}{D}, \quad R \equiv \text{const} > 0. \tag{5}$$

В соответствии с моделью Стоммела, имеем

$$f = f_0 + f_1 y, \quad E \equiv \text{const}; \tag{6}$$

$$\tau_x = -G\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right), \quad \tau_y = 0. \tag{7}$$

Определим масштабы, характерные для водоема, считая их независимыми:

L (см) — характерный горизонтальный масштаб (длина, ширина);

h (см) — характерный вертикальный масштаб (глубина);

u_0 (см/с) — характерная величина горизонтальной скорости течений.

Кроме того, положим $f_0 = 10^{-4}$ (1/сек), $f_1 = 2{\cdot}10^{-13}$ (1/см · сек) — характерные значения параметров Кориолиса, $\rho_0 = 1$ (г/см^3) — среднее значение плотности воды, $E = 1$ (см^2/сек) — характерное значение коэффициента вертикального турбулентного обмена, $G = 1$ (дин/см^2) $= 1$ (г/см · сек^2), $R = 0{,}02$ (см/сек) в соответствии с моделью Стоммела.

Введём безразмерные переменные $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ и функции $\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\bar{\ell}(\bar{y})$, $\bar{P}^s(\bar{x}, \bar{y})$, связав их с размерными, по формулам

$$x = L\bar{x}, \quad y = L\bar{y}, \quad z = h\bar{z},$$

$$f = f_0\bar{\ell}(\bar{y}) = f_0\left(1 + \frac{f_1}{f_0}L\bar{y}\right),$$

$$u = u(L\bar{x}, L\bar{y}, h\bar{z}) = u_0\bar{u}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}), \tag{8}$$

$$v = v(L\bar{x}, L\bar{y}, h\bar{z}) = u_0\bar{v}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

$$w = w(L\bar{x}, L\bar{y}, h\bar{z}) = w_0\bar{w}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}),$$

$$P^s = P^s(L\bar{x}, L\bar{y}) = P_0\bar{P}^s(\bar{x}, \bar{y}).$$

Приведем уравнения (1) к безразмерному виду, считая масштабы w_0, P_0 зависимыми, получим:

$$\begin{cases} -\bar{\ell}\bar{v} = -\dfrac{P_0}{\rho_0 f_0 u_0 L}\dfrac{\partial \bar{P}^s}{\partial \bar{x}} + \dfrac{E}{f_0 h^2}\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}, \\ \bar{\ell}\bar{u} = -\dfrac{P_0}{\rho_0 f_0 u_0 L}\dfrac{\partial \bar{P}^s}{\partial \bar{y}} + \dfrac{E}{f_0 h^2}\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}, \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \dfrac{Lw_0}{hu_0}\dfrac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \Omega^0,$$

Выберем w_0 и P_0 так, чтобы выполнялись соотношения

$$\frac{Lw_0}{hu_0} = 1, \quad \frac{P_0}{\rho_0 f_0 u_0 L} = 1.$$

Из последних соотношений находим

$$w_0 = \frac{hu_0}{L}, \quad P_0 = \rho_0 f_0 u_0 L. \tag{10}$$

Введем обозначения для следующих безразмерных величин

$$\ell_0 = 1, \quad \beta = \frac{f_1}{f_0} L, \quad k = \frac{E}{f_0 h^2}. \tag{11}$$

Таким образом, приходим к системе уравнений движения, записанной в безразмерных переменных,

$$\begin{cases} -\bar{\ell}\bar{v} = -\dfrac{\partial \bar{P}^s}{\partial \bar{x}} + k\dfrac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2}, \\ \bar{\ell}\bar{u} = -\dfrac{\partial \bar{P}^s}{\partial \bar{y}} + k\dfrac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{z}^2}, \\ \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \Omega^0.$$

Обратимся к краевым условиям (2):

$$\left\{\bar{z} = 0,\ (\bar{x}, \bar{y}) \in {\Omega_0}^0\right\}:$$
$$\frac{\rho_0 E u_0}{h}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\tau_x, \quad \frac{\rho_0 E u_0}{h}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\tau_y,$$
$$\bar{w} = 0.$$

С учетом формул (7) эти условия перепишутся в виде

$$\left\{\bar{z} = 0,\ (\bar{x}, \bar{y}) \in {\Omega_0}^0\right\}:$$
$$k\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = \frac{G}{hf_0u_0\rho_0}\cos\left(\frac{\pi L\bar{y}}{b}\right), \quad k\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = 0,$$
$$\bar{w} = 0. \tag{13}$$

Легко проверить, что коэффициент $\dfrac{G}{hf_0u_0\rho_0}$ — безразмерный.

Из краевых условий (3) получаем

$$\left\{\bar{z} = \frac{D}{h} \equiv H,\ (\bar{x}, \bar{y}) \in {\Omega_0}^0\right\}:$$
$$k\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\tau_x^b}{hf_0u_0\rho_0}, \quad k\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\tau_y^b}{hf_0u_0\rho_0},$$
$$\bar{w} = 0.$$

Преобразуем величины τ_x^b и τ_y^b, получим

$$\tau_x^b = \frac{\rho_0 u_0 hR}{D}\bar{U}, \quad \tau_y^b = \frac{\rho_0 u_0 hR}{D}\bar{V},$$

где

$$\bar{U} = \int_0^H \bar{u}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})d\bar{z}, \quad \bar{V} = \int_0^H \bar{v}\,(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})d\bar{z}$$

— безразмерные интегральные горизонтальные скорости. Окончательно граничные условия (3) перепишутся в виде

$$\left\{\bar{z} = H,\ (\bar{x}, \bar{y}) \in {\Omega_0}^0\right\}:$$
$$k\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}} = -\frac{R}{Df_0}\bar{U}, \quad k\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}} = -\frac{R}{Df_0}\bar{V},$$
$$\bar{w} = 0. \tag{14}$$

Легко проверить, что коэффициент $\dfrac{R}{Df_0}$ — безразмерный.

Таким образом, задача (1)–(4) преобразовалась к следующей безразмерной задаче, идентичной задаче (12), (13), (14), в записи которой, для простоты, опускаем черточки над безразмерными переменными.

Поверхность рассматриваемого бассейна в плоскости $x0y$ имеет форму прямоугольника:

$$\Omega_0 = [0, r] \times [0, q]\,.$$

Глубина исследуемого водоема $H > 0$. В трехмерной области $\Omega = \{(x, y, z)\,|\,(x, y) \in \Omega_0,\ 0 \leqslant z \leqslant H\}$ рассмотрим систему уравнений движения

$$\begin{cases} -\ell v = -\dfrac{\partial P^s}{\partial x} + k\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \ell u = -\dfrac{\partial P^s}{\partial y} + k\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \tag{15}$$

$$(x, y, z) \in \Omega^0$$

с краевыми условиями

$$\left\{t > 0,\ z = 0,\ (x, y) \in {\Omega_0}^0\right\}:$$
$$k\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \quad k\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \quad w = 0; \tag{16}$$

$$\left\{t>0,\ z=H,\ (x,y)\in{\Omega_0}^0\right\}:$$
$$k\frac{\partial u}{\partial z}=-\tau_x^b,\quad k\frac{\partial v}{\partial z}=-\tau_y^b,\quad w=0; \quad (17)$$

$$\{t>0,\ 0\leqslant z\leqslant H,\ (x,y)\in\partial\Omega_0\}:$$
$$Un_x+Vn_y=0. \quad (18)$$

В (18) присутствуют безразмерные интегральные скорости

$$U(x,y)=\int\limits_0^H u(x,y,z)dz,$$

$$V(x,y)=\int\limits_0^H v(x,y,z)dz,$$

в (17) принимается следующий вариант параметризации придонного трения

$$\tau_x^b=\mu U,\quad \tau_y^b=\mu V,\quad \mu\equiv\mathrm{const}>0. \quad (19)$$

В соответствии с моделью Стоммела, предположим

$$\ell=\ell_0+\beta y,\quad k\equiv\mathrm{const}; \quad (20)$$

$$\tau_x=-\frac{Fq}{\pi}\cos\left(\frac{\pi y}{q}\right),\quad \tau_y=0.$$

Горизонтальные компоненты вектора скорости будем искать в виде

$$u=UH^{-1}+\hat{u},\quad v=VH^{-1}+\hat{v}, \quad (21)$$

где первые слагаемые называются баротропными, а вторые — добавочными составляющими скорости.

Запишем значения параметров задачи (15)–(20), полученные в результате перехода:

— в соответствии с введенными масштабами

$$r=\frac{a}{L},\quad q=\frac{b}{L},\quad H=\frac{D}{h}; \quad (22)$$

— в соответствии с формулами (11)

$$k=\frac{E}{f_0 h},\quad \ell_0=1,\quad \beta=\frac{f_1}{f_0}L; \quad (23)$$

— в соответствии с формулами (13)

$$F=\frac{G}{hf_0u_0\rho_0}\frac{\pi}{q}; \quad (24)$$

— в соответствии с формулами (14)

$$\mu=\frac{R}{Df_0}. \quad (25)$$

Найдя решение (15)–(20), решение исходной размерной задачи (1)–(7) определяем по формулам (8)

$$\begin{gathered}u=u\left(L\bar{x},L\bar{y},h\bar{z}\right)=u_0\bar{u}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right),\\ v=v\left(L\bar{x},L\bar{y},h\bar{z}\right)=u_0\bar{v}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right),\\ w=w\left(L\bar{x},L\bar{y},h\bar{z}\right)=w_0\bar{w}\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right),\\ w_0=\frac{hu_0}{L}.\end{gathered} \quad (26)$$

Рассмотрим масштабы, характерные, например, для Черного моря

$$a=11\cdot10^7\ (\text{см})=1100\ (\text{км}),$$
$$b=5\cdot10^7\ (\text{см})\approx500\ (\text{км}),$$
$$D=2\cdot10^5\ (\text{см})=2000\ (\text{м}),$$
$$R=0{,}02\ (\text{см/сек}),\quad G=1\ (\text{дин/см}^2),$$
$$E=1\ (\text{см}^2/\text{сек}),\quad \rho_0=1\ (\text{г/см}^3),$$
$$f_0=10^{-4}\ (1/\text{сек}),\quad f_1=2{\cdot}10^{-13}\ (1/\text{см}\cdot\text{сек}).$$

Выберем характерные масштабы:

$$L=10^7\ (\text{см}),\quad h=2\cdot10^5\ (\text{см}),$$
$$u_0=10\ (\text{см/сек}).$$

В соответствии с формулами (22)–(27) получаем

$$r=11,\quad q=5,\quad H=1,\quad k=0{,}05;$$
$$\ell_0=1,\quad \beta=0{,}02;$$
$$\beta=0 \text{ — при отсутствии } \beta\text{-эффекта};$$
$$F=\frac{\pi}{2}\cdot10^{-3},\quad \mu=0{,}001;\quad w_0=0{,}2.$$

В системе уравнений (15)–(18) проинтегрируем каждое уравнение по переменной z в пределах от 0 до H с учетом краевых условий, получаем задачу Стоммела для интегральных скоростей:

$$\begin{cases}\mu U-\ell V=-H\dfrac{\partial P}{\partial x}+\tau_x,\\ \ell U-\mu V=-H\dfrac{\partial P^s}{\partial y}+\tau_y,\\ \dfrac{\partial U}{\partial x}+\dfrac{\partial V}{\partial y}=0,\quad (x,y)\in\Omega_0^0,\\ Un_x+Vn_y=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega_0.\end{cases} \quad (27)$$

Из первых двух уравнений в (27) исключаем градиенты давления, используя перекрестное дифференцирование

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{\partial V}{\partial x}\right) - \beta V = F\sin\left(\dfrac{\pi y}{q}\right), \\ \dfrac{\partial U}{\partial x} - \dfrac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in \Omega_0^0, \\ Un_x + Vn_y = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{28}$$

Для решения задачи (28) введем функцию тока $\Psi(x,y)$ по формулам

$$U = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \Psi}{\partial x}.$$

Для функции тока получаем следующую задачу

$$\begin{cases} \mu\left(\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\right) + \beta\dfrac{\partial \Psi}{\partial x} = F\sin\left(\dfrac{\pi y}{q}\right), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (x,y) \in \Omega_0^0, \\ \Psi = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega_0. \end{cases} \tag{29}$$

Для функции $X(x)$ из (29):

$$\begin{cases} \mu X'' + \beta X' - \mu\left(\dfrac{\pi}{q}\right)^2 X = F, \\ \qquad\qquad\qquad 0 < x < r, \\ X(0) = X(r) = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Решение уравнения (30) представим, как сумму частного решения

$$\overline{X}(x) = -\frac{F}{\mu(\pi/q)^2}$$

неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения

$$X_0(x) = C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx}.$$

$$A = -\frac{\beta}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{q}\right)^2},$$

$$B = -\frac{\beta}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\beta}{2\mu}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{q}\right)^2}$$

Константы C_1, C_2 находим так, чтобы удовлетворить краевым условиям в (30), в итоге получим

$$X(x) = \overline{X}(x) + X_0(x) = \\ = \frac{F}{\mu(\pi/q)^2}\left(C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} - 1\right),$$

$$C_1 = \frac{1 - e^{Br}}{e^{Ar} - e^{Br}}, \quad C_1 + C_2 = 1,$$

Окончательно, интегральные скорости определяем по формулам

$$U(x,y) = \frac{F}{\mu(\pi/q)}\left(C_1 e^{Ax} + C_2 e^{Bx} - 1\right) \times \\ \times \cos\left(\frac{\pi y}{q}\right),$$

$$V(x,y) = \frac{F}{\mu(\pi/q)^2}\left(C_1 A e^{Ax} + C_2 B e^{Bx}\right) \times \\ \times \sin\left(\frac{\pi y}{q}\right), \tag{31}$$

$$C_1 = \frac{1 - e^{Br}}{e^{Ar} - e^{Br}},$$

Полученное аналитическое решение может быть использовано для тестирования различных вычислительных схем при интегрировании модели (27). На основе полученной безразмерной задачи в работе [6] получены аналитические выражения не только для баротропной компоненты скорости, но и для добавочных и вертикальных компонент поля скорости, а в [7] произведено сравнение с полученным точным аналитическим решением различных способов вычисления вертикальной компоненты поля скорости в исследуемом водоеме.

Литература

1. *Stommel H.* The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description. University of California Press, 1965.
2. *Стоммел Г.* Гольфстрим. М.: ИЛ, 1965. 227 с.
3. *Stommel H.* The westward intensification of wind-driven ocean currents // Trans. Amer. Geoph. Un. 1948. Vol. 29. P. 202–206.
4. *Кочергин В.П.* Теория и методы океанических течений. М.: Наука, 1978. 127 с.
5. *Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. Севастополь: Экоси-гидрофизика, 2001. 238 с.
6. *Кочергин В.С., Кочергин С.В., Скляр С.Н.* Аналитическая тестовая задача ветровых течений // Процессы в геосредах. 2019. № 2(20). С. 193–198.
7. *Кочергин В.С., Кочергин С.В.* Оценка точности определения вертикальной компоненты скорости при использовании различных вычислительных алгоритмов // Процессы в геосредах. 2019. № 3(21). С. 341–346.

References

1. Stommel, H. *The Gulf Stream. A Physical and Dynamical Description.* University of California Press, 1965.
2. Stommel, G. *Gol'fstrim* [Gulfstream]. Inostrannaya Literatura, Moscow, 1965. (In Russian)
3. Stommel, H. The westward intensification of wind-driven ocean currents. *Trans. Amer. Geoph. Un.*, 1948, vol. 29, pp. 202–206.
4. Kochergin, V.P. *Teoriya i metody okeanicheskih techenij* [Theory and methods of ocean currents]. Nauka, Moscow, 1978, (In Russian)
5. Eremeev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N. *Matematicheskoe modelirovanie gidrodinamiki glubokovodnyh bassejnov* [Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins]. Ekosi-gidrofizika, Sevastopol, 2001. (In Russian)
6. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N. Analiticheskaya testovaya zadacha vetrovyh techenij [Analytical test problem of wind currents]. *Processy v geosredah* [Processes in geospatial environments], 2019, no. 2(20), pp. 193–198. (In Russian)
7. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Ocenka tochnosti opredeleniya vertikal'noj komponenty skorosti pri ispol'zovanii razlichnyh vychislitel'nyh algoritmov [Estimation of the accuracy of determination of the vertical velocity component using various computational algorithms]. *Processy v geosredah* [Processes in geospatial environments], 2019, no. 3(21), pp. 341–346. (In Russian)

Статья поступила 15 ноября 2019 г.