

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-16-4-31-42

СТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ  
ДИФФУЗИИ-КОНВЕКЦИИ-РАСПАДА В ОДНОРОДНОМ  
ПОЛУПРОСТРАНСТВЕСыромятников П. В., Кривошеева М. А., Лапина О. Н., Нестеренко А. Г.,  
Никитин Ю. Г.STATIONARY PROCESSES OF DIFFUSION-CONVECTION-DECOMPOSITION  
IN A HOMOGENEOUS HALF-SPACEP. V. Syromyatnikov<sup>1, 2</sup>, M. A. Krivosheeva<sup>2</sup>, O. N. Lapina<sup>2</sup>, A. G. Nesterenko<sup>2</sup>, Yu. G. Nikitin<sup>2</sup><sup>1</sup> Federal Research Center Southern Scientific Center of the Russian Academy of Sciences,  
Rostov-on-Don, 344006, Russia<sup>2</sup> Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia  
e-mail: syromyatnikov\_pv@mail.ru

*Abstract.* Algorithms for constructing the Fourier symbols of the Green's functions for stationary boundary problems of the 1st, 2nd, 3rd kind for a homogeneous diffusion half-space and an analogue of the second-kind problem for two linked half-spaces are developed, the properties of the symbols of fundamental solutions are investigated. Simple practical techniques are proposed for constructing a solution decreasing at infinity. For a boundary value problem of the third kind, it is shown that under certain boundary conditions the appearance of real and purely imaginary simple poles of the symbol of the Green's function is possible. Conditions were found under which these poles arise and conditions under which they are not guaranteed to arise. Three-dimensional model problems are calculated for all considered boundary value problems, which allow one to detect both similarities and differences of solutions. In the case of real poles, the solution differs significantly from all previous solutions. This solution is qualitatively similar to the patterns of anomalous diffusion in complex media.

*Keywords:* stationary turbulent diffusion, boundary value problems, half-space, diffusion-convection-decay, Green's function, Fourier transform.

## Введение

Численно-аналитические модели, описывающие распространения загрязняющих веществ в воздушной или водной среде, достаточно разнообразны [1], в значительной части основаны на уравнениях турбулентной диффузии [1–4]. Эти модели широко используются для научных исследований, инженерных расчетов, они же положены в основу государственных стандартов для методик расчетов рассеивания выбросов вредных веществ в ат-

мосферу [5]. В данной работе рассматриваемая среда представляет собой диффузионное полупространство или пару сцепленных полупространств. Модель диффузионного полупространства, на наш взгляд, более адекватно описывает рассеяние примесей на значительном расстоянии от дневной поверхности, поскольку не требует введения никаких дополнительных граничных условий, кроме условия убывания. Модель полупространства проще модели слоя в аналитическом и численном плане, тем не менее, встречается значительно

Сыромятников Павел Викторович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник лаборатории математики и механики краснодарского отделения Южного научного центра РАН, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: syromyatnikov\_pv@mail.ru.

Кривошеева Маргарита Александровна, магистрант второго года обучения кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: margarita.krivosheeva@gmail.com.

Лапина Ольга Николаевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры вычислительных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: olga\_ln@mail.ru.

Нестеренко Александр Григорьевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры физики информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: agnest@mail.ru.

Никитин Юрий Геннадиевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры теоретической физики и компьютерных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: yug@fpm.kubsu.ru.

Работа выполнена в рамках реализации Госзадания ЮНЦ РАН на 2019 г. (№ г.р. 01201354241) при частичной поддержке гранта РФФИ и администрации Краснодарского края (проект 19-41-230011 п\_а).

реже [1, 2]. Во многих работах диффузионные процессы в полупространстве исследуются в сочетании с другими физическими полями, например, электромагнитными, тепловыми, упругими [6, 7], среды рассматриваются как гетерогенные со сложной структурой [8]. Постановки классических краевых задач для однородного полупространства встречается довольно редко и, как правило, делается со значительными упрощениями. Так в работах [1, 2] получены в явном виде фундаментальные решения некоторых стационарных и нестационарных задач турбулентной диффузии для однородного полупространства, применимость которых из-за сделанных различных упрощающих предположений сильно ограничена. Предложенный в данной работе подход к решению краевых задач основывается на интегральном преобразовании Фурье. В образах Фурье строятся символы фундаментальных решений трехмерных стационарных задач, исследуются особенности и возможные ограничения в алгоритмах расчета.

Для всех рассмотренных краевых задач численно решены модельные примеры. Приведены леммы, доказывающие возможность появления вещественных и чисто мнимых простых полюсов у символа функции Грина краевой задачи третьего рода, соответствующие численные решения по своему характеру сходны с картинками аномальной диффузии [1] в сложных средах. Проведенные исследования являются важным предварительным этапом для разработки модели многослойного диффузионного полупространства.

### 1. Постановка задачи и общая схема решения

Рассмотрим однородное полупространство  $-\infty \leq x, y \leq +\infty, z \geq 0$ , в котором происходят процессы диффузии–конвекции–распада однокомпонентного вещества. Для среднемасштабного приближения уравнение турбулентной диффузии, описывающее данные процессы, имеет вид [1]

$$\begin{aligned} u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + w \frac{\partial \phi}{\partial z} + \sigma \phi = \\ = \mu \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь  $\phi$  – концентрация вещества,  $u, v, w$  – скорости конвекции в направлениях осей  $OX, OY, OZ$  соответственно,  $\sigma \geq 0$  – коэффициент распада,  $\mu \geq 0, \nu > 0$  – коэффициенты

горизонтальной и вертикальной диффузии соответственно. В плоскости  $z = 0$  заданы граничные условия общего вида

$$\left( a\phi - b\nu \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = q(x, y), \quad (1.2)$$

$$q = \begin{cases} q(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ 0, & (x, y) \notin \Omega, \end{cases} \quad (1.3)$$

где  $q$  – функция источника, действующего в конечной области  $\Omega$ , граничные коэффициенты  $a, b$  одновременно не равны нулю. Дополнительно потребуем выполнение условия убывания на бесконечности

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \phi(x, y, z) = 0. \quad (1.4)$$

Введем двумерное преобразование Фурье  $F_{x,y}$  по  $x, y$  с параметрами  $\alpha, \beta$  и применим его к функции концентрации  $\phi$  и источника  $q$ . Их символы Фурье обозначим  $\Phi = F_{x,y}[\phi], Q = F_{x,y}[q]$ . Введем также символ Фурье функции Грина соответствующей краевой задачи  $K = F_{x,y}[k]$ . Решение в образах Фурье будем искать в виде

$$\Phi(\alpha, \beta, z) = K(\alpha, \beta, z)Q(\alpha, \beta). \quad (1.5)$$

Решение исходной краевой задачи (1.1)–(1.4) получим в виде обратного преобразования Фурье

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, \beta, z) \times \\ \times Q(\alpha, \beta) \exp(-i(\alpha x + \beta y)) d\alpha d\beta. \end{aligned} \quad (1.6)$$

В строгой постановке функция  $q(x, y)$  не может быть задана произвольно, поскольку в общем случае она является решением смешанной краевой задачи. В данной работе ограничимся решением краевых задач при заданной функции «источника».

### 2. Основные свойства характеристических чисел

Применяя двумерное преобразование Фурье к уравнению (1.1), получим в образах Фурье следующее уравнение

$$\nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - w \frac{\partial \Phi}{\partial z} - \theta \Phi = 0, \quad (2.1)$$

где

$$\theta = \sigma + \mu(\alpha^2 + \beta^2) - i(\alpha u + \beta v). \quad (2.2)$$

Запишем характеристический многочлен уравнения (2.1) в виде

$$\nu\lambda^2 - \lambda w - \theta = 0. \quad (2.3)$$

Характеристические числа — корни уравнения (2.3) — известны

$$\lambda_1 = \frac{w - \sqrt{D}}{2\nu}, \quad \lambda_2 = \frac{w + \sqrt{D}}{2\nu}, \quad (2.4)$$

где

$$D = w^2 + 4\nu(\sigma + \mu(\alpha^2 + \beta^2)) - i4\nu(\alpha u + \beta v). \quad (2.5)$$

Для  $\lambda_j$  можно выписать асимптотики

$$\begin{aligned} \lambda_1(\alpha, \beta) &\sim -\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \\ \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} &\rightarrow \infty, \\ \lambda_2(\alpha, \beta) &\sim +\sqrt{\frac{\mu}{\nu}}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Очевидно, что при вещественных  $\alpha, \beta$

$$\operatorname{Re} D = w^2 + 4\nu(\sigma + \mu(\alpha^2 + \beta^2)),$$

$$\operatorname{Im} D = -4\nu(\alpha u + \beta v).$$

Запишем дискриминант  $D$  в виде

$$D = |D| \exp(i\chi), \quad |D| = \sqrt{(\operatorname{Re} D)^2 + (\operatorname{Im} D)^2},$$

$$\chi = \operatorname{arctg} \left( \frac{\operatorname{Im} D}{\operatorname{Re} D} \right), \quad D \neq 0.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &= |D|^{1/2} \exp(i\chi/2 + \pi k), \\ k &= 0, 1, \\ \operatorname{Re} \sqrt{D} &= |D|^{1/2} \cos(\chi/2 + \pi k), \\ \operatorname{Im} \sqrt{D} &= |D|^{1/2} \sin(\chi/2 + \pi k). \end{aligned} \quad (2.7)$$

**Лемма 1.** Действительная часть  $\operatorname{Re} \sqrt{D} = 0$  в том, и только в том случае, если  $D = 0$ .

*Доказательство.* Очевидно, что  $\operatorname{Re} \sqrt{D} = 0$  при  $D = 0$ . Далее, если  $D \neq 0$ , но  $\operatorname{Re} \sqrt{D} = 0$ , то  $\chi = \pi$ . Это означает, что  $\operatorname{Im} D = 0$ ,  $\operatorname{Re} D < 0$ . Но по принятым условиям  $\operatorname{Re} D \geq 0$  при вещественных  $\alpha, \beta$  и  $\mu, \sigma \geq 0$ . Данное противоречие доказывает лемму.  $\square$

**Следствие из леммы 1.** Если  $D \neq 0$ , то величины  $|D|^{1/2} \cos(\chi/2)$ ,  $|D|^{1/2} \cos(\chi/2 + \pi)$  — действительные части  $\operatorname{Re} \sqrt{D}$ , имеют разные знаки. Действительно, т.к.  $\chi \neq \pi$ , то косинусы не равны нулю и знаки их различны.

Заметим, что дискриминант (2.5) равен нулю при  $w = \alpha = \beta = \sigma = 0$  или же при  $w = u = v = \sigma = \mu = 0$  (коэффициент вертикальной диффузии  $\nu > 0$ ). При нулевом дискриминанте характеристические числа (2.4) равны нулю

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0. \quad (2.8)$$

Соответствующее общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$\Phi(\alpha, \beta, z) = t_1 + t_2 z, \quad (2.9)$$

где константы  $t_j$  определяются из дополнительных условий, о которых будет сказано ниже.

Но неравенство нулю дискриминанта  $D \neq 0$  еще не означает, что действительные части характеристических значений имеют разные знаки. Рассмотрим случай, когда  $\alpha = \beta = \sigma = 0$ , но  $w \neq 0$ . Тогда

$$\lambda_{1,2} = \frac{w \pm |w|}{2\nu}, \quad \lambda_1 = \frac{w}{\nu}, \quad \lambda_2 = 0. \quad (2.10)$$

При  $w \neq 0$  мы имеем одно положительное (или отрицательное) и одно нулевое характеристическое число  $\lambda_j$ . Соответствующее общее решение (2.1)

$$\Phi(\alpha, \beta, z) = t_1 \exp(\lambda_1 z) + t_2. \quad (2.11)$$

Кроме того, дискриминант  $D$  может быть чисто мнимым при следующих условиях  $w = \mu = \sigma = 0$ ,  $\nu \neq 0$ ,  $u\alpha + v\beta \neq 0$ . При этом действительные и мнимые части  $\lambda_j$  имеют различные знаки

$$\lambda_{1,2} = \frac{\pm \sqrt{-i4\nu(\alpha u + \beta v)}}{2\nu}.$$

Вещественные множества, обращающие в нуль мнимую часть дискриминанта, представляют собой прямые в плоскости  $(\alpha, \beta)$ , заданные уравнением

$$u\alpha + v\beta = 0. \quad (2.12)$$

**Лемма 2.** Если  $\sigma > 0$ , то при произвольных допустимых значениях прочих параметров характеристические числа  $\lambda_j$  (2.4) имеют действительные части разных знаков.

Действительно,

$$\operatorname{Re} \sqrt{D} \geq \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma} = |w| + \varepsilon > |w|,$$

$$\varepsilon > 0$$

и тогда при

$$w \geq 0 \rightarrow \operatorname{Re} \lambda_2 \geq \frac{2w + \varepsilon}{2\nu} > 0,$$

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \leq \frac{-\varepsilon}{2\nu} < 0,$$

$$w \leq 0 \rightarrow \operatorname{Re} \lambda_2 \geq \frac{\varepsilon}{2\nu} > 0,$$

$$\operatorname{Re} \lambda_1 \leq \frac{2w - \varepsilon}{2\nu} < 0.$$

В этом случае общее решение (2.1) имеет вид

$$\Phi(\alpha, \beta, z) = t_1 \exp(\lambda_1 z) + t_2 \exp(\lambda_2 z). \quad (2.13)$$

В дальнейшем, если не оговорено обратное, будем предполагать, что условие леммы 2 выполнено. Для удобства обозначим характеристическое число с отрицательной действительной частью  $\lambda_1$ , а характеристическое число с положительной действительной частью —  $\lambda_2$ , т. е.

$$\operatorname{Re} \lambda_1 < 0, \quad \operatorname{Re} \lambda_2 > 0. \quad (2.14)$$

Итак, рассмотрены все возможные исключительные ситуации, связанные с характеристическими числами  $\lambda_j$  (2.4) при вещественных  $\alpha, \beta$ . В практических расчетах для стационарных задач всегда можно искусственно ввести очень малую положительную величину  $\sigma > 0$ , что гарантирует отсутствие исключительных ситуаций (2.8), (2.10). Благодаря этому простому приему действительные части характеристических чисел  $\lambda_j$  (2.4) всегда имеют разные знаки.

### 3. Символы функций Грина краевых задач 1–3 рода для однородного полупространства

Пусть однородное полупространство занимает область  $-\infty \leq x, y \leq +\infty, 0 \leq z \leq +\infty$ . Функция  $\phi$  удовлетворяет уравнению (1.1). Рассмотрим три варианта условий на границе полупространства. При  $z = 0$  в некоторой ограниченной области  $\Omega$  задаются распределенные или сосредоточенные «нагрузки»  $q(x, y)$ , которым соответствует символ Фурье

$Q(\alpha, \beta)$ . Символ функции Грина  $K$  для полупространства будем искать в виде

$$K(z) = t_1 \exp(\lambda_1 z) + t_2 \exp(\lambda_2 z), \quad (3.1)$$

Обозначим буквой  $g$  дифференциальный оператор, соответствующий уравнению (1.1), и буквой  $G$  оператор, соответствующий уравнению (2.1). Рассмотрим следующие задачи.

#### Задача 1, краевая задача Дирихле.

$$g\phi = 0, \quad a > 0, \quad b = 0, \quad (3.2)$$

$$a\phi(x, y, z)|_{z=0} = q(x, y),$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \phi(x, y, z) = 0.$$

Задача 1 в образах Фурье

$$G\Phi = 0, \quad a > 0, \quad b = 0, \quad (3.3)$$

$$a\Phi(\alpha, \beta, z)|_{z=0} = Q(\alpha, \beta),$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi(\alpha, \beta, z) = 0.$$

Символ функции Грина для задачи 1 должен удовлетворять следующей вспомогательной краевой задаче:

$$GK = 0, \quad a > 0, \quad b = 0, \quad (3.4)$$

$$aK(\alpha, \beta, z)|_{z=0} = 1,$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} K(\alpha, \beta, z) = 0.$$

Далее общее представление символа функции Грина ищется в виде (3.1).

Чтобы удовлетворить условию убывания при  $z \rightarrow +\infty$ , отбрасываем член  $t_2 \exp(\lambda_2 z)$ , поскольку по принятому условию (2.14)  $\operatorname{Re} \lambda_2 > 0$ . Так как  $\operatorname{Re} \lambda_1 < 0$ , то из условия (3.4) получаем  $t_1 = 1/a$ . Функция  $K$  является решением краевой задачи (3.4) для полупространства  $z \geq 0$ ,

$$K(\alpha, \beta, z) = \exp(\lambda_1 z) / a, \quad (3.5)$$

решение задачи  $\Phi$  (1.5) имеет вид

$$\Phi(\alpha, \beta, z) = \frac{\exp(\lambda_1 z)}{a} Q(\alpha, \beta). \quad (3.6)$$

Для полупространства  $z \leq 0$ , очевидно,

$$K(z) = \exp(\lambda_2 z) / a, \quad (3.7)$$

$$\Phi(\alpha, \beta, z) = \frac{\exp(\lambda_2 z)}{a} Q(\alpha, \beta). \quad (3.8)$$

Заметим, что для верхнего и нижнего полупространства параметр  $a$  граничного условия

(3.2) считаем положительным  $a > 0$ . Асимптотика символа функции Грина задачи 1

$$K(\alpha, \beta, z)|_{z=0} = 1/a, \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow +\infty. \quad (3.9)$$

При  $z \neq 0$  символ убывает экспоненциально

$$K(\alpha, \beta, z)|_{z \neq 0} \sim \exp\left(-|z| \sqrt{\mu/\nu} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right) / a, \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow +\infty. \quad (3.10)$$

Асимптотика (3.9) означает, что оригинал функции Грина является дельтаобразной функцией

$$k(x, y, z)|_{z=0} = \delta(x)\delta(y)/a. \quad (3.11)$$

Для параметра  $b$  из граничных условий (1.2) введем, в зависимости от того, рассматриваем ли мы верхнее полупространство  $z > 0$  или нижнее полупространство  $z < 0$ , следующее правило знаков

$$\text{sign } b = \text{sign } z, \quad (3.12)$$

которое определяется направлением внутренней нормали к поверхности полупространства.

**Задача 2, задача Неймана для полупространства.**

$$g\phi = 0, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad (3.13)$$

$$-b\nu \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = q(x, y),$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \phi(x, y, z) = 0.$$

Задача 2 в образах Фурье

$$G\Phi = 0, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad (3.14)$$

$$-b\nu \frac{d\Phi(\alpha, \beta, z)}{dz} \Big|_{z=0} = Q(\alpha, \beta),$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi(\alpha, \beta, z) = 0.$$

Символ функции Грина для задачи 2 должен удовлетворять следующей вспомогательной краевой задаче:

$$GK = 0, \quad a = 0, \quad b = 1, \quad (3.15)$$

$$-b\nu \frac{dK(\alpha, \beta, z)}{dz} \Big|_{z=0} = 1,$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} K(\alpha, \beta, z) = 0.$$

В решении также оставляем слагаемое  $t_1 \exp(\lambda_1 z)$ , удовлетворяя граничным условиям (3.15), получаем  $t_1 = -1/(b\nu\lambda_1)$ . Символ функции Грина задачи 2 для полупространства  $z \geq 0$  имеет вид

$$K(z) = \frac{\exp(\lambda_1 z)}{-b\nu\lambda_1}, \quad b > 0; \quad (3.16)$$

для полупространства  $z \leq 0$

$$K(z) = \frac{\exp(\lambda_2 z)}{-b\nu\lambda_2}, \quad b < 0. \quad (3.17)$$

Асимптотика символа функции Грина задачи 2 при  $z = 0$

$$K(\alpha, \beta, z)|_{z=0} \sim \frac{1}{-b\sqrt{\nu\mu} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow +\infty. \quad (3.18)$$

При  $z \neq 0$  функция  $K(\alpha, \beta, z)$  имеет асимптотику

$$K(\alpha, \beta, z)|_{z \neq 0} \sim \frac{\exp\left(-|z| \sqrt{\mu/\nu} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\right)}{-b\sqrt{\nu\mu} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow +\infty. \quad (3.19)$$

Асимптотика (3.18) означает, что оригинал функции Грина имеет логарифмическую особенность в нуле вида

$$k(x, y, z)|_{z=0} \approx f(x, y) \ln(\sqrt{x^2 + y^2}), \quad \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0, \quad (3.20)$$

где  $f(x, y)$  — некоторая непрерывная в окрестности нуля функция,  $f(0,0) \neq 0$ .

**Задача 3, задача третьего рода для полупространства.**

Рассмотрим краевую задачу для полупространства более общего вида

$$g\phi = 0, \quad a, b > 0, \quad (3.21)$$

$$a\phi(x, y, z) - b\nu \frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} = q(x, y),$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \phi(x, y, z) = 0.$$

В образах Фурье задаче 3 соответствует задача

$$G\Phi = 0, \quad a, b > 0, \quad (3.22)$$

$$a\Phi(\alpha, \beta, z) - b\nu \frac{d\Phi(\alpha, \beta, z)}{dz} \Big|_{z=0} = Q(\alpha, \beta),$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \Phi(\alpha, \beta, z) = 0.$$

В свою очередь, символ функции Грина для задачи 3 должен удовлетворять следующей вспомогательной краевой задаче:

$$GK = 0, a, b > 0, \quad (3.23)$$

$$aK(\alpha, \beta, z) - b\nu \frac{dK(\alpha, \beta, z)}{dz} \Big|_{z=0} = 1,$$

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} K(\alpha, \beta, z) = 0.$$

В решении также оставляем слагаемое  $t_1 \exp(\lambda_1 z)$ , удовлетворяя граничным условиям и условиям убывания (3.23), получаем  $t_1 = 1/(a - b\nu\lambda_1)$ .

Символ функции Грина задачи 3 для полупространства  $z \geq 0$  имеет вид

$$K(z) = \frac{\exp(\lambda_1 z)}{a - b\nu\lambda_1}, \quad b > 0, \quad (3.24)$$

для полупространства  $z \leq 0$  функция Грина  $K(z) -$

$$K(z) = \frac{\exp(\lambda_2 z)}{a - b\nu\lambda_2}, \quad b < 0. \quad (3.25)$$

Асимптотики функций  $K$  при  $z = 0$  и  $z \neq 0$  имеют вид (3.18), (3.19), оригинал также имеет логарифмическую особенность в нуле вида (3.20).

Решения (3.24), (3.25) для однородных полупространств имеют среди рассмотренных задач наиболее общий вид, из которого подстановкой значений граничных параметров  $a, b$  можно получить в частном виде решения задач 1, 2.

Рассмотрим задачи 1–3 в исключительных случаях, когда одно или два характеристических числа  $\lambda_j$  (2.4) равняются нулю. В случаях (2.10), когда  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = w/\nu$  не всегда возможно построить убывающее на бесконечности решение. Так, если  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ , то для полупространства  $z \leq 0$  решение  $\Phi(\alpha, \beta, z) = t_2 \exp(\lambda_2 z)$  убывает при  $z \rightarrow -\infty$ , при этом для задачи 1 символ функции Грина  $K(z) = \exp(\lambda_2 z)$ . Для полупространства  $z \geq 0$  можно при данных  $\lambda_j$  построить только ограниченное (в виде константы) на бесконечности решение  $\Phi(\alpha, \beta, z) = t_1$  (соответственно, решение задачи 1  $K(z) = 1$ ).

Решение задачи 2 в данном случае может быть построено только для одного из полупространств

$$K(z) = \frac{\exp(\lambda_2 z)}{-b\nu\lambda_2}$$

при  $z \leq 0$ , для полупространства  $z \geq 0$  функцию  $K(z)$  в виде

$$K(z) = \frac{\exp(\lambda_1 z)}{-b\nu\lambda_1}$$

получить нельзя, поскольку  $\lambda_1 = 0$ .

В случае кратных нулевых характеристических значений (2.8)  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  общее решение имеет вид (2.9). Член  $t_2 z$  является линейно растущим и в силу этого должен быть отброшен для  $z \geq 0$ , так и для  $z \leq 0$ . Таким образом, получаем только ограниченное (постоянное) решение  $\Phi(\alpha, \beta, z) = t_1$ . Для задачи 1  $K(z) = 1$ , для задачи 2 решение не может быть получено. Для задачи 3 формально можно получить решение из формул (3.24), (3.25), но фактически оно соответствует задаче 1, поскольку коэффициенты граничных условий  $a \neq 0, b = 0$ .

Отметим, что при вещественных  $\alpha, \beta$  знаменатель  $(a - b\nu\lambda_j)$  функций  $K$  (3.24), (3.25) при соблюдении правила (3.12) всегда ненулевой. Рассмотрим случай, когда правило (3.12) не соблюдается.

**Лемма 3.** При нулевых коэффициентах горизонтальной конвекции символ функции Грина задачи 3 для полупространства  $z \leq 0$  (3.25), для некоторых положительных  $a, b > 0$  может иметь однократные вещественные полюса по  $\alpha, \beta$ . Доказательство. Пусть  $u, v = 0$ , для удобства положим  $\beta = 0$ . Тогда из уравнения

$$a - b\nu\lambda_2 = 0, \quad (3.26)$$

получаем другое уравнение

$$\lambda_2 = \frac{a}{b\nu} = \frac{w + \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma + 4\nu\mu\alpha^2}}{2\nu}. \quad (3.27)$$

Обозначим  $c = a/b > 0$ , тогда

$$2c - w = \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma + 4\nu\mu\alpha^2} \quad (3.28)$$

(потребуем  $c > w/2$ ),

откуда получаем нули уравнения (3.26)

$$\alpha_0 = \pm \sqrt{\frac{c^2 - cw - \nu\sigma}{\nu\mu}}. \quad (3.29)$$

Очевидно, что при  $c > c_1 \geq 0$ , где

$$c_1 = \frac{w + \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma}}{2}, \quad (3.30)$$

значения  $\alpha_0$  (3.29) дают решения уравнения (3.26), описывающие положительный и отрицательный полюс функций Грина (3.25). Очевидно, что условие  $w/2 \leq c_1 < c$  (3.28) всегда выполняется. Вычеты в  $\pm\alpha_0$  получим в виде

$$\operatorname{res}_{\pm\alpha_0} K = \frac{-\exp(\lambda_j(\pm\alpha_0)z)\sqrt{w^2 + 4\nu\sigma + 4\nu\mu\alpha_0^2}}{2b\nu\mu(\pm\alpha_0)}. \quad (3.31)$$

**Следствие из леммы 3.** Если для коэффициентов  $a, b$  (1.2) выполняется условие  $0 < a/b = c < c_1$  (3.30), то функция Грина (3.25) не имеет вещественных полюсов. Доказательство непосредственно следует из формул (3.27)–(3.30).

**Лемма 4.** Функция Грина задачи 3 для полупространства (3.25) при определенных положительных  $a, b > 0$  может иметь два однократных мнимых полюса по  $\alpha, \beta$ .

*Доказательство.* Для удобства рассмотрим случай, когда  $\beta = 0$ . Тогда из уравнения

$$a - b\nu\lambda_2 = 0, \quad (3.32)$$

получаем

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \frac{a}{b\nu} = \\ &= \frac{w + \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma + 4\nu\mu\alpha^2 - i4\nu i\alpha}}{2\nu} > 0. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Обозначим  $c = a/b > 0$ , при условии  $c > \max(0, w/2)$  и  $\alpha = i\tau$  ( $\tau$  — вещественное), тогда

$$\begin{aligned} 2c - w &= \sqrt{(w^2 + 4\nu\sigma - 4\nu\mu\tau^2 + 4\nu i\tau)}, \\ c^2 - cw &= \nu\sigma - \nu\mu\tau^2 + \nu i\tau. \end{aligned}$$

Относительно действительного  $\tau$  получаем уравнение

$$\nu\mu\tau^2 - \nu i\tau + (c^2 - cw - \nu\sigma) = 0, \quad (3.34)$$

откуда

$$\tau_{1,2} = \frac{\nu i \pm \sqrt{\nu^2 u^2 + 4\nu\mu(-c^2 + cw + \nu\sigma)}}{2\nu\mu}, \quad (3.35)$$

$$\alpha_j = i\tau_j.$$

Найдем условие неотрицательности дискриминанта (3.35)

$$-c^2 + cw + (\nu\sigma + \nu u^2/\mu) \geq 0.$$

Для этого находим корни относительно  $c = a/b$ :

$$c_1 = \frac{w + \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma + \nu u^2/\mu}}{2} > 0,$$

$$c_2 = \frac{w - \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma + \nu u^2/\mu}}{2} < 0.$$

Очевидно, в интервале  $c_2 < 0 < c < c_1$  дискриминант для  $\tau_j$  (3.35) положителен, при этом  $\tau_j$  могут быть положительными, отрицательными, или иметь разные знаки. Соответствующие значения  $\alpha_j = i\tau_j$  будут давать чисто мнимые нули по  $\alpha$  уравнения (3.32). Найдем вычеты в чисто мнимых полюсах  $\alpha_j = i\tau_j$

$$\operatorname{res}_{\alpha_j} K = \frac{\xi_1}{b(2\nu\mu\alpha_j - i\nu u)}, \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\exp(\lambda_2(\alpha_j)z) \times \\ &\times \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma + 4\nu\mu\alpha_j^2 - 4i\nu u\alpha_j}, \end{aligned}$$

□

Заметим, что хотя доказательства лемм 3, 4 приведены для плоского случая, они легко переносятся на трехмерный случай. При этом вещественные полярные множества будут представлять собой окружности в плоскости  $\alpha, \beta$ .

**Следствия из лемм 3, 4.** Пусть

$$r_1 = \frac{w + \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma}}{2} \geq 0,$$

$$r_2 = \frac{w + \sqrt{w^2 + 4\nu\sigma + \nu u^2/\mu}}{2} \geq 0, \quad r_1 \leq r_2,$$

тогда в диапазоне значений  $r_1 < a/b < r_2$  символ функция Грина задачи 3 (3.25) при  $a/b > 0$  имеет два вещественных (3.29) и два чисто мнимых (3.35) простых полюса по  $\alpha$ . В случае, когда  $r_2 < c$ , имеется только два вещественных однократных полюса, при  $0 < c < r_1$  — только два чисто мнимых однократных полюса.

Для символа функции Грина задачи 3 (3.24) при  $a > 0, b < 0, z \geq 0$ , когда правило (3.12) не соблюдается, можно сформулировать леммы, аналогичные леммам 3, 4, доказываемые по той же схеме.

#### 4. Символ функции Грина краевой задачи для двух сцепленных диффузионных полупространств с внутренним источником

Рассмотрим пример краевой задачи для двух сцепленных полупространств. Первое полупространство занимает область  $0 \geq z$ , второму полупространству соответствует область  $z \leq 0$ . Материальные константы различны:  $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}, \sigma^{(n)}, \mu^{(n)}, \nu^{(n)}, n = 1, 2$ . Первому полупространству соответствует индекс  $n = 1$ , второму — индекс  $n = 2$ .

Рассмотрим краевую задачу, где производная функции концентрации терпит разрыв

$$\phi^{(1)}(x, y, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} -\nu^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \\ &= -\nu^{(2)} \frac{\partial \phi^{(2)}(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} + q, \end{aligned}$$

$$\phi^{(1)}(x, y, z) \Big|_{z=0} = \phi^{(2)}(x, y, z) \Big|_{z=0},$$

$$\phi^{(2)}(x, y, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Для символа функции Грина имеем задачу

$$K^{(1)}(\alpha, \beta, z) \rightarrow 0, \quad z \rightarrow +\infty, \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} -\nu^{(1)} \frac{\partial K^{(1)}(\alpha, \beta, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \\ &= -\nu^{(2)} \frac{\partial K^{(2)}(\alpha, \beta, z)}{\partial z} \Big|_{z=0} + 1, \end{aligned}$$

$$K^{(1)}(\alpha, \beta, z) \Big|_{z=0} = K^{(2)}(\alpha, \beta, z) \Big|_{z=0},$$

$$K^{(2)}(\alpha, \beta, z) \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow -\infty.$$

Т.к. по принятому условию (2.14)  $\text{Re } \lambda_1^{(n)} < 0, \text{Re } \lambda_2^{(n)} > 0, n = 1, 2$ , то решение для верхнего полупространства будет иметь вид

$$K^{(1)} = t_1^{(1)} \exp(\lambda_1^{(1)} z), \quad z \geq 0. \quad (4.3)$$

Для нижнего полупространства решение —

$$K^{(2)} = t_2^{(2)} \exp(\lambda_2^{(2)} z), \quad z \leq 0. \quad (4.4)$$

Относительно вектора  $\{t_1^{(1)}, t_2^{(2)}\}^T$  имеем систему уравнений

$$\begin{pmatrix} -\nu^{(1)}\lambda_1^{(1)} & \nu^{(2)}\lambda_2^{(2)} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^{(1)} \\ t_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

решая которую явно, получаем

$$t_1^{(1)} = \frac{-1}{(\nu^{(1)}\lambda_1^{(1)} - \nu^{(2)}\lambda_2^{(2)})},$$

$$t_2^{(2)} = \frac{-1}{(\nu^{(1)}\lambda_1^{(1)} - \nu^{(2)}\lambda_2^{(2)})},$$

$$K^{(1)}(z) = \frac{-\exp(\lambda_1^{(1)} z)}{(\nu^{(1)}\lambda_1^{(1)} - \nu^{(2)}\lambda_2^{(2)})}, \quad z \geq 0, \quad (4.5)$$

$$K^{(2)}(z) = \frac{-\exp(\lambda_2^{(2)} z)}{(\nu^{(1)}\lambda_1^{(1)} - \nu^{(2)}\lambda_2^{(2)})}, \quad z \leq 0. \quad (4.6)$$

Таким образом, символ функции Грина для задачи (4.2) найден. Предположим, что свойства верхнего и нижнего полупространств совпадают, что соответствует однородному диффузионному пространству. Тогда

$$K(a, \beta, z) \Big|_{z=0} = \frac{-1}{\nu(\lambda_1 - \lambda_2)}.$$

Функция  $K(\alpha, \beta, 0)$  имеет следующую скорость убывания

$$K(a, \beta, z) \Big|_{z=0} \sim \frac{1}{2\sqrt{\nu\mu}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (4.7)$$

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow \infty.$$

Оценка (4.7) означает, что соответствующий оригинал функции Грина для задачи (4.2) имеет логарифмическую особенность в нуле вида (3.20). При  $z \neq 0$

$$\begin{aligned} K^{(j)}(a, \beta, z) \Big|_{z \neq 0} &\sim \\ &\sim \frac{\exp(-|z| \sqrt{\mu/\nu} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2})}{2\sqrt{\nu\mu}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}, \quad (4.8) \\ &\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Решение задачи (4.1) имеет вид (1.5). Вычисление интеграла (1.6) можно произвести численно.



## 5. Численные примеры

Приведем вначале примеры численного решения модельных задач 1–3 и задачи для сцепленных полупространств.

Функция источника  $q(x, y)$  для всех рассмотренных задач задана одинаково

$$q(x, y) = \begin{cases} 1, & |x| \leq L, |y| \leq L; \\ 0, & |x| > L \vee |y| > L, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$L = 1/2.$$

В образах Фурье

$$Q(\alpha, \beta) = \frac{\sin(\alpha L) \sin(\beta L)}{\alpha \beta L^2}.$$

Для однородных полупространств были приняты следующие безразмерные значения материальных констант

$$w = 0,5, \quad u = 1, \quad v = 0, \quad (5.2)$$

$$\nu = 0,1, \quad \mu = 0,1, \quad \sigma = 0,1.$$

Для сцепленных полупространств параметры верхнего полупространства  $z \geq 0$ ,  $n = 1$  и нижнего полупространства  $z \leq 0$ ,  $n = 2$  следующие:

$$w^{(1)} = 0,5, \quad u^{(1)} = 1, \quad v^{(1)} = 0, \quad (5.3)$$

$$\nu^{(1)} = 0,1, \quad \mu^{(1)} = 0,1, \quad \sigma^{(1)} = 0,1,$$

$$w^{(2)} = -1, \quad u^{(2)} = 0,5, \quad v^{(2)} = 0, \quad (5.4)$$

$$\nu^{(2)} = 0,5, \quad \mu^{(2)} = 0,5, \quad \sigma^{(2)} = 0,2.$$

Решения получены численным расчетом интеграла (1.6) с помощью программ библиотеки IMSL [9]. Для задачи 1 использованы формулы (3.5) с граничными параметрами  $a = 1$ ,  $b = 0$ ; для задачи 2 — формулы (3.16),  $a = 0$ ,  $b = 1$ ; для задачи 3 — формулы (3.24),  $a = 1$ ,  $b = 1$ . Сцепленные полупространства рассчитывались по формулам (4.5), (4.6).

Также были рассчитаны два варианта специальных решений краевой задачи третьего рода, соответствующих лемме 3, с разными значениями параметра  $a/b = 0,6$ ,  $a/b = 0,5$  (критическое значение параметра  $c_1$  (3.30)  $c_1 \approx 0,5926$ ) и с параметрами нижнего полупространства  $z \leq 0$

$$w = 0,5, \quad u = 0, \quad v = 0, \quad (5.5)$$

$$\nu = 0,1, \quad \mu = 0,1, \quad \sigma = 0,1.$$

Значение параметра  $a/b = 0,6 > c_1$  для задачи 3 приводит к появлению вещественных полюсов у функции  $K$  (3.25), соответствующее решение  $\phi(x, y, 0)$  изображено на рис. 2а). При значении параметра  $a/b = 0,5 < c_1$  вещественные полюса у функции  $K$  (3.25) согласно той же лемме 3 не возникают, соответствующее решение  $\phi(x, y, 0)$  изображено на рис. 2а).

## Выводы

1. В случае уравнений турбулентной диффузии модель диффузионной среды в виде полупространства является более простой по сравнению со слоем в аналитическом и численном отношении, но при этом появляются некоторые специфические особенности.

2. Модель полупространства физически более адекватно соответствует убывающему по вертикали решению, нежели слой с соответствующей (верхней или нижней) поглощающей границей.

3. При возникновении двух нулевых характеристических чисел построить убывающее по вертикали решение для первой краевой задачи невозможно, можно построить только решение в виде константы. В этом же случае построение решений второй и третьей задач не представляется возможным.

4. При возникновении одного нулевого характеристического числа построить убывающее по вертикали решение для первой, второй и третьей краевой задачи возможно только для одного, верхнего или нижнего, в зависимости от знака действительной части характеристического числа, полупространства. Для оставшегося полупространства возможно построение ограниченного (константного) решения, решения же 2 и 3 задачи получить нельзя.

5. При наличии ненулевого коэффициента распада и при любых допустимых прочих параметрах среды характеристические числа имеют различные знаки действительной части, нулевые характеристические числа не возникают. Это позволяет введением пренебрежимо малого коэффициента распада, если в исходной задаче он задан нулевым, получать убывающие на бесконечности решения краевых задач 1, 2, 3.

6. Задача для двух сцепленных полупространств с внутренним источником, заданным в виде разрыва нормальной производной функции концентрации, близка по постановке, асимптотикам символов функций Грина

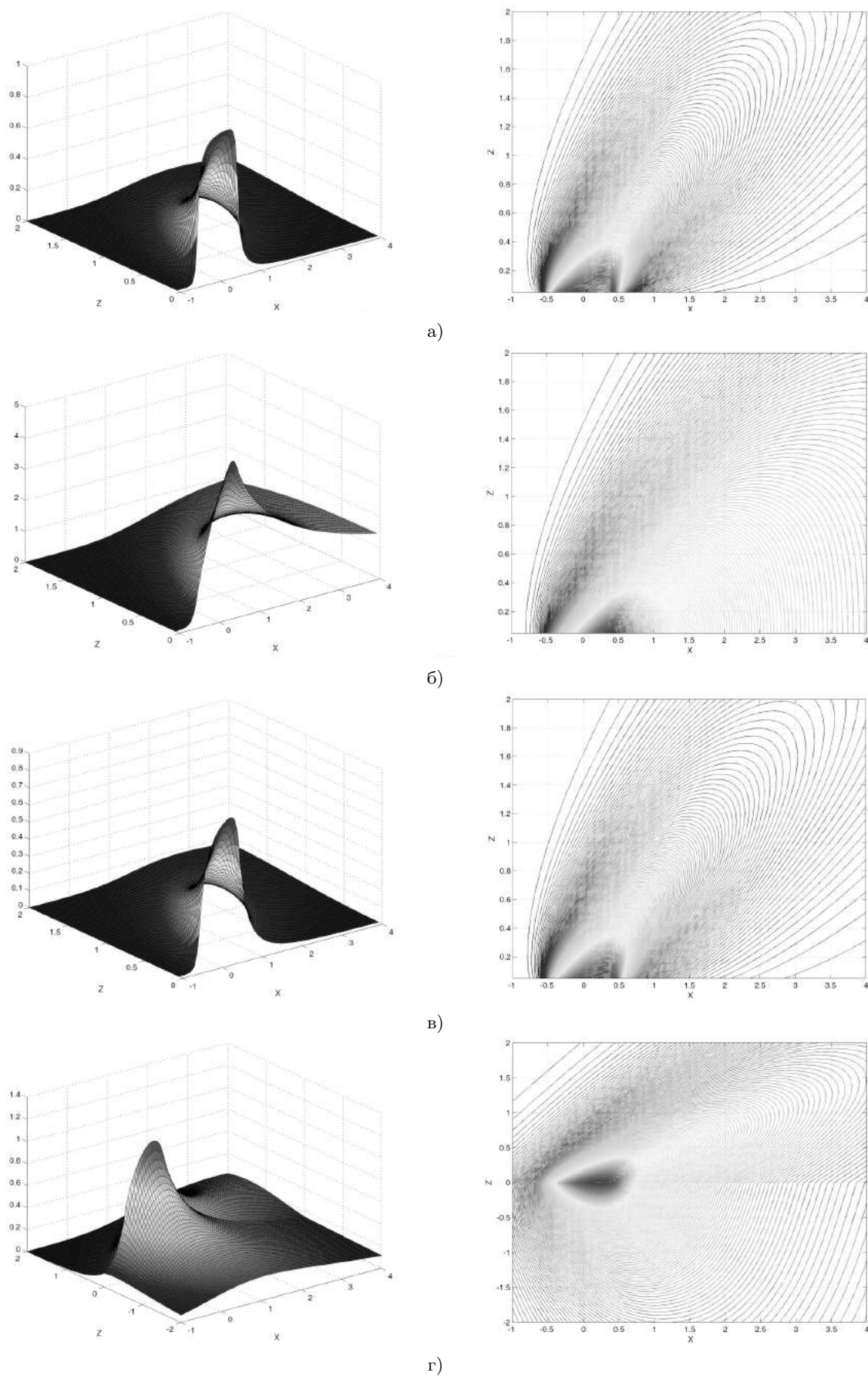


Рис. 1. Вид функции концентрации  $\phi(x,0,z)$ : а) задача 1, б) задача 2; в) задача 3; г) задача для сцепленных полупространств

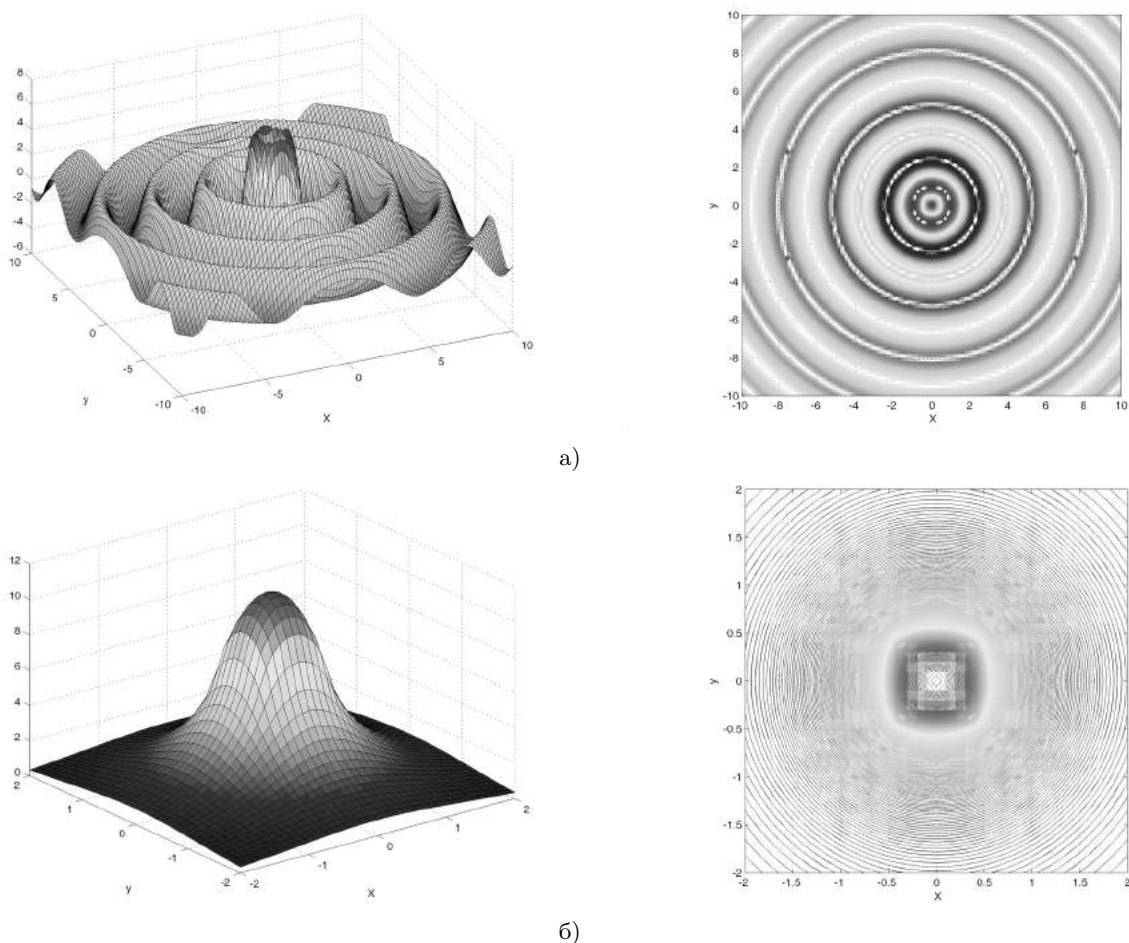


Рис. 2. а) функция концентрации  $\phi(x, y, 0)$  при наличии вещественных полюсов, параметр  $a/b = 0,6$ ; б) функция концентрации  $-\phi(x, y, 0)$  при отсутствии вещественных полюсов, параметр  $a/b = 0,5$

и численным результатам ко второй краевой задаче для полупространств.

7. При данных параметрах различия в полученных решениях 1 и 2 задач наиболее заметны, наибольшее сходство наблюдается в решениях 1 и 3 задачи, весьма сходны решения задачи 2 и задачи со сцепленными полупространствами.

8. Снятие ограничений на знаки параметров  $a$ ,  $b$  в третьей краевой задаче при отсутствии горизонтальной конвекции приводит к возможности возникновения вещественных полюсов у символов функций Грина. Соответствующее решение ведет себя аналогично функции Бесселя первого порядка (рис. 2а), принимает как положительные, так и отрицательные значения. Уменьшение отношения параметров  $a/b < c_1$  приводит к исчезновению полюсов, но полученное решение всюду отрицательно (рис. 2б). Последнее может

означать только то, что необходимо изменить знак функции источника.

## Литература

1. Бекман И.Н. Высшая математика: математический аппарат диффузии: учебник для бакалавриата и магистратуры. М.: Издательство Юрайт, 2018. 397 с.
2. Степаненко С.Н., Волошин В.Г., Тупцов С.В. Решение уравнения турбулентной диффузии для стационарного точечного источника // Украинський гідрометеорологічний журнал. 2008. № 3. С. 13–24.
3. Сыромятников П.В., Кривошеева М.А., Нестеренко А.Г., Никитин Ю.Г., Лапина О.Н. Модель распространения загрязняющих веществ в многослойной среде с периодическим источником излучения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019. Т. 16. № 3. С. 54–62. DOI: 10.31429/vestnik-16-3-54-62
4. Бабешко В.А., Павлова А.В., Бабешко О.М., Евдокимова О.В. Математическое моделиро-

- вание экологических процессов распространения загрязняющих веществ. Краснодар: Кубанский государственный университет, 2009. 138 с.
- Приказ Министерства природных ресурсов и экологии Российской Федерации от 6 июня 2017 года № 273 «Об утверждении методов расчетов рассеивания выбросов вредных (загрязняющих) веществ в атмосферном воздухе». Режим доступа: <http://docs.cntd.ru/document/456074826> (дата обращения: 28.11.2019)
  - Давыдов С.А., Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двухкомпонентное упруго-диффузионное полупространство под воздействием нестационарных возмущений // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2014. № 2. С. 31–38.
  - Франк-Каменецкий Д.А. Основы макрокинетики. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Издательский Дом Интеллект, 2008. 408 с.
  - Перепухов А.М., Кишенков О.В., Меньшиков Л.И., Максимычев А.В., Александров Д.А. Проявление эффекта аномальной диффузии в поровых жидкостях // Прикладная физика Труды МФТИ. 2015. Т. 7. № 1. С. 174–183.
  - Международная библиотека математических подпрограмм IMSL. Режим доступа: <https://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries> (дата обращения: 28.11.2019).
  - Beckman, I.N. *Higher mathematics: the mathematical apparatus of diffusion: a textbook for undergraduate and graduate programs*. Yurayt Publishing House, Moscow, 2018. (In Russian)
  - Stepanenko, S.N., Voloshin, V.G., Tiptsov, S.V. The solution of the turbulent diffusion equation for a stationary point source. *Ukrainian Hydrometeorological Journal*, 2008, no. 3, pp. 13–24. (In Russian)
  - Syromyatnikov, P.V., Krivosheeva, M.A., Nesterenko, A.G., Nikitin, Yu.G., Lapina, O.N. Model of distribution of pollutant substances in a multilayered medium with a periodic radiation source. *Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2019, vol. 16, no. 3, pp. 54–62. DOI: 10.31429/vestnik-16-3-54-62 (In Russian)
  - Babeshko, V.A., Pavlova, A.V., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. *Mathematical modeling of environmental processes of the spread of pollutants*. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
  - Order of the Ministry of Natural Resources and Ecology of the Russian Federation dated June 6, 2017 N 273 “On approval of calculation methods for dispersing emissions of harmful (polluting) substances in the air”. Available at: <http://docs.cntd.ru/document/456074826> (accessed: 11.28.2019). (In Russian)
  - Davydov, S.A., Zemskov, A.V., Tarlakovsky, D.V. Two-component elastically diffusive half-space under the influence of unsteady disturbances. *Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation*, 2014, no. 2, pp. 31–38. (In Russian)
  - Frank-Kamenetsky, D.A. *Fundamentals of macrokinetics. Diffusion and heat transfer in chemical kinetics*. Intellect Publishing House, 2008.
  - Perepukhov, A.M., Kishenkov, O.V., Menshikov, L.I., Maksimychev, A.V., Alexandrov, D.A. Manifestation of the effect of anomalous diffusion in pore fluids. *Applied Physics Transactions of Moscow Institute of Physics and Technology*, 2015, vol. 7, no. 1, pp. 174–183. (In Russian)
  - International library of mathematical routines IMSL. Available at: <https://www.roguewave.com/products-services/imsl-numerical-libraries> (accessed: 11.28.2019)

## References

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2019

© Сыромятников П. В., Кривошеева М. А., Лапина О. Н., Нестеренко А. Г., Никитин Ю. Г., 2019

Статья поступила 28 ноября 2019 г.