Математика

УДК 517.5

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-1-6-16

ОБ УСЛОВИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ РАВНОВЕСНОЙ КАПЛИ В МОДЕЛИ, УЧИТЫВАЮЩЕЙ УПРУГОСТЬ ПРОМЕЖУТОЧНОГО СЛОЯ

Щербаков М. Е.

ON THE CONDITION OF EXISTENCE OF AN EQUILIBRIUM DROP IN A MODEL THAT TAKES INTO ACCOUNT THE ELASTICITY OF THE INTERMEDIATE LAYER

M. E. Shcherbakov

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: latiner@mail.ru

Abstract. In this paper, the 1st variation of the Willmore functional is calculated. Here the Willmore functional is defined as

$$\|H\|_2^2 = \sigma 2\pi \int\limits_0^L H^2 y \, \mathrm{d}s$$

The variational problem for the function $\mathfrak{F}(S)$ is solved. Here

$$\mathfrak{F}(S) := F(S) + \mu \|H\|_2^2(S), \quad F(S) = \sigma\Lambda(S) + l_p\sigma\Xi^*(S) - \beta\sigma S^* + \lambda\sigma V(S) + V(S)\Gamma\rho$$

It is proved that the extreme surface belongs to an admissible class of surfaces. We consider surfaces that are defined by curves that are graphs of functions of a variable y that lies on an axis perpendicular to the axis of rotation. We prove the existence of a generalized 4th order derivative for functions that define curves that generate an extremal surface. A condition for the existence of an equilibrium drop is derived in the model that takes into account not only the thickness of the intermediate layer, but also the elasticity energy of this layer. This condition is defined by the equation

$$\mu\cdot\Delta_S H + 2\mu \cdot H\left(H^2 - K\right) + \sigma\left(2H + l_p K\right) = \lambda + \frac{1}{\sigma}\Gamma\rho$$

Here Δ_S is the Laplace–Beltrami operator of the surface, K — the Gaussian curvature and H — the mean curvature of it respectively.

Keywords: mean surface curvature, Gaussian surface curvature, surface tension, intermediate layer, Willmore functional, intermediate layer elasticity, equilibrium form, Union functional of Gaussian curvature, variational problem.

Введение

Задача отыскания равновесных форм капель является хорошо известной задаче со времён Лапласа. Однако интерес к ней не утрачен и в настоящее время.

Классическая теория, связанная с условием Лапласа, в современных теориях тесно связана с исследованиями обобщённых решений уравнений типа уравнения средней кривизны [1,2]. Многие работы посвящены численному анализу проблем построения равновесных форм [3, 4].

Однако в том случае, когда размеры капель достаточно малы, возникает необходимость обобщения классического условия Лапласа. В первую очередь это приводит к необходимости учитывать в двухфазной модели равновесия наличие промежуточного слоя, состоящего из молекул жидкости и газа. Кроме того, это вызывает необходимость учёта его упругих свойств. На необходимость такого рода исследования было указано в работе Максвелла [5].

Одним из методов решения задачи о равновесных формах является вариационный метод.

Основным результатом данной работы является теорема о существовании равновесных

Щербаков Михаил Евгеньевич, преподаватель кафедры функционального анализа и алгебры Кубанского государственного университета; e-mail: latiner@mail.ru

форм в модели, учитывающей толщину промежуточного слоя и его эластичные свойства.

С этой целью к классическому функционалу, приводящему к уравнению средней кривизны, добавляется функционал, вариация которого определяет работу по формированию промежуточного слоя.

Кроме того, к нему добавляется функционал Уиллмора, отвечающий за упругие свойства промежуточного слоя и определяемый межмолекулярными взаимодействиями в нём.

В последнее время появилось много работ, связанных с исследованиями последнего функционала. Интерес к нему связан с тем, что с его помощью исследуются различные наноструктуры.

1. Определение класса допустимых поверхностей

Классом $\mathfrak{I}_H$ допустимых поверхностей называются поверхности, удовлетворяющие условиям:

1. Образующие этих поверхностей есть функции $x_1(y)$, $y \in [0, Y_A]$.

2. Естественная параметризации этих поверхностей задается функциями $x = x(s)$, $y = y(s)$. Эти функции обладают обобщёнными производными второго порядка в смысле С. Л. Соболева.

3. $\|H\|_2^2(S)$ ограничен на $\forall\, S \in \mathfrak{I}_H$, где

$$\sigma\|H\|_2^2 = \sigma 2\pi \int\limits_0^L H^2(s) y\dot{y}\,\mathrm{d}s.$$

2. Постановка задачи

1. В классе всех поверхностей $\mathfrak{I}_H$ найти поверхность S_E такую, что

$$F^*(S_E) = \lim_{n\to\infty} F^*(S_n).$$

Каплю с такой поверхностью называем равновесной.

Последовательность $\{S_n\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{F}S_n) = \inf\{\mathfrak{F}(S) \,|\, S \in \mathfrak{I}_H\}.$$

Такую последовательность называем минимизирующей.

2. Из того, что первая вариация функционала $F^*(S)$ для поверхности S_E равна нулю, вычислить условие нахождения равновесной капли

$$\mu\cdot\Delta_S H + 2\mu\cdot H\left(H^2 - K\right) + \\ + \sigma\left(2H + l_p K\right) = \lambda + \frac{1}{\sigma}\Gamma\rho,$$

где

$$\mathfrak{F}(S) := F(S) + \mu\|H\|_2^2(S),$$

$$F(S) = \sigma\Lambda(S) + l_p\sigma\Xi^*(S) - \beta\sigma S^* + \\ + \lambda\sigma V(S) + V(S)\Gamma\rho.$$

Здесь $\Lambda(S)$ — функционал площади поверхности капли, $S^*(S)$ — функционал площади прилипания капли, $V(S)$ — функционал объёма, $\sigma^{-1}V(S)\Gamma\rho$ — функционал поля гравитационных сил, l_p — толщина промежуточного слоя между жидкостью и газом, σ — коэффициент поверхностного натяжения, λ — коэффициент Лагранжа, μ — коэффициент упругости промежуточного слоя, Γ — коэффициент гравитации, ρ — плотность жидкости, $\Xi(S)$ — функционал энергии формирования промежуточного слоя, H, K — средняя и гауссова кривизны, соответственно.

3. Доказать, что предельная поверхность S_E принадлежит классу допустимых поверхностей. Для этого нужно доказать, что функции $x(s)$, $y(s)$ параметрического задания образующей предельной поверхности S_E обладают обобщенными производными 2-го порядка.

4. Доказать, что для экстремальной поверхности из того, что первая вариация равна нулю следует, что существуют 3 и 4 обобщенные производные.

Ясно, что в случае, когда $l_p\mu$ равны нулю, сформулированная задача при достаточно очевидном изменении класса допустимых поверхностей совпадает с классической задачей.

Лемма 1. Рассмотрим функционал Уиллмора $\sigma\|H\|_2^2$, определенный на допустимых поверхностях $\mathfrak{I}_H$, обладающих обобщенными производными 4-го порядка на $[0, L]$

$$\sigma\|H\|_2^2 = \sigma 2\pi \int\limits_0^L H^2(s) y\dot{y}\,\mathrm{d}s,$$

тогда первая вариация функционала Уиллмора равна

$$\delta_1\left(\sigma\|H\|_2^2\right) = \\ = 2\pi\varepsilon\sigma \int\limits_0^L \left[\Delta_s(H) + 2H^3 - 4HK\right]\dot{y}ty\,\mathrm{d}s,$$

где K — Гауссова кривизна поверхности, $\Delta_s H$ — оператор Лапласа–Бельтрами

$$\Delta_s H = \ddot{H} + \frac{\dot{y}}{y}\dot{H}.$$

Доказательство. Рассмотрим поверхность S_ε с образующей l_ε, задаваемой графиком функции $x_\varepsilon(y) = x_1(y) + \varepsilon t_1(y)$, где $t_1(y)$ — финитная функция.

Параметрическая запись этой кривой будет иметь вид

$$x_\varepsilon\left(s_\varepsilon\right) = x\left(s_\varepsilon(S)\right) + \varepsilon t\left(s_\varepsilon(s)\right),$$
$$y_\varepsilon\left(s_\varepsilon\right) = y\left(s_\varepsilon(S)\right),$$

где

$$s_\varepsilon(S) = \int\limits_0^s \sqrt{\left(\dot{x}(\tau) + \varepsilon\dot{t}(\tau)\right)^2 + \dot{y}^2\left(\tau\right)}\,\mathrm{d}\tau,$$

s_ε — новый натуральный параметр.

Легко посчитать, что

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_\varepsilon(S)} = 1 - \varepsilon\dot{t}(s)\dot{x}(S).$$

Вычислим вариацию $2H$, где

$$2H = \frac{\dot{x}}{y} - \dot{x}\ddot{y} + \dot{y}\ddot{x}. \tag{1.1}$$

Тогда

$$2H_\varepsilon = \frac{\left[\left(\frac{\mathrm{d}x_\varepsilon}{\mathrm{d}s_\varepsilon}\right)\right]}{y} - \frac{[\mathrm{d}x_\varepsilon]}{\mathrm{d}s_\varepsilon}\frac{\left[\mathrm{d}^2 y_\varepsilon\right]}{\mathrm{d}s_\varepsilon{}^2} + \\ + \frac{[\mathrm{d}y_\varepsilon]}{\mathrm{d}s_\varepsilon}\frac{\left[\mathrm{d}^2 x_\varepsilon\right]}{\mathrm{d}s_\varepsilon{}^2}. \tag{1.2}$$

Нетрудно убедиться, что

$$\frac{\mathrm{d}y_\varepsilon}{\mathrm{d}s_\varepsilon} = \dot{y}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_\varepsilon} = (\dot{y})\left(1 - \varepsilon\dot{t}(s)\dot{x}(S)\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}x_\varepsilon}{\mathrm{d}s_\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}(x_1\left(s_\varepsilon(S)\right) + \varepsilon t\left(s_\varepsilon(S)\right))}{\mathrm{d}s} \times \\ \times\left(1 - \varepsilon\dot{t}(s)\dot{x}(S)\right) = \dot{x} + \varepsilon\dot{t}\dot{y}^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_\varepsilon}{\mathrm{d}s_\varepsilon{}^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\left(\dot{y} - \varepsilon\dot{t}\dot{x}\dot{y}\right)\right)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_\varepsilon} = \\ = \ddot{y} - \varepsilon\left[\dot{x}\ddot{y}\dot{t} + \frac{\mathrm{d}\left(\dot{t}\dot{x}\dot{y}\right)}{\mathrm{d}s}\right],$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_\varepsilon}{ds_\varepsilon{}^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\left(\dot{x} + \varepsilon\dot{t}\dot{y}^2\right)\right)}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_\varepsilon} = \\ = \ddot{x} + \varepsilon\left[\frac{\mathrm{d}\left(\dot{y}^2\dot{t}\right)}{\mathrm{d}s} - \dot{x}\ddot{x}\dot{t}\right].$$

Тогда $2H_\varepsilon$ будет иметь следующий вид:

$$2H_\varepsilon = 2H - \\ -\varepsilon\left[-\frac{\dot{t}\dot{y}^2}{y} - \frac{\mathrm{d}\left(\dot{y}\dot{t}\right)}{\mathrm{d}s} - \dot{t}\dot{x}^2\ddot{y} + \dot{t}\dot{x}\ddot{x}\dot{y}\right] + \\ + \bar{o}\left(\varepsilon\right). \tag{1.3}$$

Заметим, что оператор Лапласа–Бельтрами $\Delta_s f = \ddot{f} + \dot{y}/y\dot{f}$ для функции $\dot{y}t$ запишется в виде

$$\Delta_s\left(\dot{y}t\right) = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{y}\dot{t}\right)}{\mathrm{d}s} + \dot{t}\ddot{y} + \dot{t}\dddot{y} + \\ + \frac{\dot{y}^2\dot{t}}{y} + \frac{\dot{t}\ddot{y}\dot{y}}{y}. \tag{1.4}$$

Тогда из (1.4) и (1.3) получаем

$$2H_\varepsilon = 2H - \\ -\varepsilon\left[-\Delta_s\left(\dot{y}t\right) + \dot{t}\ddot{y}\dot{y}^2 + \dot{t}\dddot{y} + \frac{\dot{t}\ddot{y}\dot{y}}{y} + \dot{t}\dot{x}\ddot{x}\dot{y}\right] + \\ + \bar{o}(\varepsilon).$$

Заметим, что

$$\dot{x}\ddot{x} = -\ddot{y}\dot{y}.$$

Тогда

$$\delta 2H = -\varepsilon\left[-\Delta_s\left(\dot{y}t\right) + \dot{t}\dddot{y} + \frac{\dot{t}\ddot{y}\dot{y}}{y}\right]. \tag{1.5}$$

Продифференцировав (1.1) по s и умножив на $\dot{x}_1$, с учетом того, что $-\dddot{x}\dot{x} = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + y\dddot{y}$, получим

$$t\dddot{y} = -\dot{x}2\dot{H}t + \frac{\ddot{x}y\dot{x} - \dot{x}^2\dot{y}}{y^2}t - t\ddot{y}^2\dot{y} - t\ddot{x}^2\dot{y}. \tag{1.6}$$

Подставим (1.6) в (1.5)

$$\delta 2H = \varepsilon\left[\Delta_s\left(\dot{y}t\right) + \dot{x}2\dot{H}t + \frac{\dot{x}^2\dot{y}}{y^2}t + \dot{y}t\left(\frac{\ddot{y}^2}{\dot{x}^2}\right)\right],$$

$$\delta 2H = \varepsilon \Bigg[\Delta_s\left(\dot y t\right) + \dot x 2\dot H t + \\ + \dot y t \left(\frac{\dot x}{y} - \frac{\ddot y}{\dot x}\right)^2 + 2\frac{\dot x}{y}\frac{\ddot y}{\dot x}\dot y t\Bigg].$$

Заметим, что

$$2H = \frac{\dot x}{y} - \frac{\ddot y}{\dot x}, \quad K = -\frac{\ddot y}{y},$$

$$2H_\varepsilon - 2H = \\ = \varepsilon \Big[\Delta_s\left(\dot y t\right) + \dot x 2\dot H t + \dot y t \left[(2H)^2 - 2K\right]\Big] + \\ + \bar o\left(\varepsilon\right). \quad (1.7)$$

Обозначим через $2R$ выражение в скобках в правой части (1.7)

$$4H_\varepsilon^2 - 4H^2 = \\ = \left(2H_\varepsilon - 2H\right)^2 + 2\left(2H\right)\left(2H_\varepsilon\right) - 8H^2 + \bar o\left(\varepsilon\right) = \\ = 2(2H)\left(2H + \varepsilon 2R\right) - 8H^2 + \bar o(\varepsilon),$$

$$4H_\varepsilon^2 - 4H^2 = 2(2H)(2R)\varepsilon + \bar o(\varepsilon),$$

$$H_\varepsilon^2 - H^2 = \\ = \varepsilon \Big[\Delta_s\left(\dot y t\right) H + \dot x 2\dot H t H + t H \left[(2H)^2 - 2K\right]\Big] + \\ + \bar o\left(\varepsilon\right), \quad (1.8)$$

$$H_\varepsilon^2 y_\varepsilon \,\mathrm{d}s_\varepsilon - H^2 y \,\mathrm{d}s = \\ = \left(H_\varepsilon^2 - H^2\right) y_\varepsilon \,\mathrm{d}s_\varepsilon + H^2\left(y_\varepsilon \,\mathrm{d}s_\varepsilon - y\,\mathrm{d}s\right).$$

При этом

$$y_\varepsilon \,\mathrm{d}s_\varepsilon - y\,\mathrm{d}s = \varepsilon y \dot t \dot x \,\mathrm{d}s,$$

$$H_\varepsilon^2 y_\varepsilon \,\mathrm{d}s_\varepsilon - H^2 y \,\mathrm{d}s = \\ = \left(H_\varepsilon^2 - H^2\right) y \,\mathrm{d}s + H^2 \varepsilon y \dot t \dot x \,\mathrm{d}s,$$

$$\frac{\mathrm{d}y_\varepsilon}{\mathrm{d}s_\varepsilon} = \dot y \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s_\varepsilon} = \left(\dot y\right)\left(1 - \varepsilon \dot t(s)\dot x(s)\right).$$

Тогда первая вариация функционала Уилмора $\|H\|_2^2$ равна

$$\delta_1\|H\|_2^2 = 2\pi \int\limits_0^L \left(H_\varepsilon^2 - H^2\right) y\,\mathrm{d}s - \\ - 2\pi \int\limits_0^L H^2 \varepsilon y \dot t \dot x \,\mathrm{d}s = \\ = 2\pi \int\limits_0^L \varepsilon \Big[\Delta_s\left(\dot y t\right) H + \dot x 2\dot H t H + \\ + \dot y t H \left[(2H)^2 - 2K\right]\Big] y\,\mathrm{d}s + \\ + 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L H^2 \dot t \dot x y \,\mathrm{d}s.$$

В силу (1.8) и того, что

$$\dot t \dot x y = \frac{\mathrm{d}(t \dot x y)}{\mathrm{d}s} - t \ddot x y - t \dot x \dot y,$$

$$\delta_1\|H\|_2^2 = 2\pi \int\limits_0^L \varepsilon \Big[\Delta_s\left(\dot y t\right) H + \\ + \dot x 2\dot H t H + \dot y t H \left[(2H)^2 - 2K\right]\Big] y\,\mathrm{d}s - \\ - 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L H^2 d\left(y t \dot x\right) + 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L H^2 t \ddot x y \,\mathrm{d}s + \\ + 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L H^2 t \dot x \dot y \,\mathrm{d}s.$$

Интегрируя по частям и сокращая, получим

$$\delta_1\|H\|_2^2 = 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L \Delta_s\left(\dot y t\right) H y\,\mathrm{d}s + \\ + 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L \dot y t H \left[4H^2 - 2K\right] y\,\mathrm{d}s - \\ - 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L H^2 t \ddot x y \,\mathrm{d}s - 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L H^2 t \dot x \dot y \,\mathrm{d}s.$$

Функции $\dot{y}t$ и ее производная по s являются финитными на $[0, L]$. Значит,

$$\int\limits_0^L \Delta_s(\dot{y}t)\, Hy\, \mathrm{d}s = \int\limits_0^L \Delta_s(H)\, \dot{y}ty\, \mathrm{d}s, \qquad (1.9)$$

$$\delta_1 \|H\|_2^2 = \\ = 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L \dot{y}t\left[\Delta_s(H) + 4H^3 - 2KH\right] y\, \mathrm{d}s - \\ - 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L H^2 ty\dot{y}\left[\frac{\ddot{x}}{\dot{y}} + \frac{\dot{x}}{y}\right] \mathrm{d}s,$$

$$\delta_1 \|H\|_2^2 = \\ = 2\pi\varepsilon \int\limits_0^L \left[\Delta_s(H) + 2H^3 - 4HK\right] \dot{y}ty\, \mathrm{d}s.$$

Лемма доказана. □

Чтобы доказать, что предельная поверхность является допустимой, покажем, что функции $x(S)$, $y(S)$ естественной параметризации обладают обобщенными производными 2-го порядка.

Рассмотрим минимизирующую последовательность поверхностей $\{S_n\}$:

$$\mathfrak{F}S_n) \to \inf\{\mathfrak{F}(S) : S \in \mathfrak{I}_H\}.$$

Обозначим через l_n образующие этих поверхностей, заданные функциями $x_n : [0, L_n] \to \to R$, $y_n : [0, L_n] \to R$ от натурального параметра s_n.

Рассмотрим для каждого n функцию

$$s_n(t) = t\frac{L_n}{L} \text{ здесь } t \in [0, L].$$

Заметим, что $s_n : [0, L] \to [0, L_n]$ являются дифференцируемыми.

Откуда получаем

$$\mathrm{d}s_n(t) = \mathrm{d}t\frac{L_n}{L}, \quad \mathrm{d}t = \frac{L}{L_n}\mathrm{d}s_n. \qquad (1.10)$$

Построим новую последовательность образующих, зависящих от одного параметра

$$\{x_n^*(t) := x_n \circ s_n(t)\}, \quad \{y_n^*(t) := y_n \circ s_n(t)\}.$$

В силу того, что значения функционала $\mathfrak{F}$ определены на поверхностях S_n, получаем, что для всех функций $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ верно

$$\int\limits_0^L (2H_n)^2 y_n\, \mathrm{d}s_n < A. \qquad (1.11)$$

Здесь ${H_n}^2$ — квадрат средней кривизны поверхности, задаваемой образующей $\big(x_n(S_n), y_n(s_n)\big)$, от натурального параметра (s_n).

Лемма 2. Последовательности $\{x_n^*\}$, $\{y_n^*\}$ компактны в смысле равномерной сходимости на $[0, L]$.

Доказательство. Докажем сначала, что $\{y_n^*(t)\}$ равностепенно непрерывна.

Из этой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность $\{l_{n_j}\} \to l$. Будем обозначать ее по-прежнему $\{l_n\}$ с образующими $\big(x_n^*(t), y_n^*(t)\big)$. Тогда в силу того, что переменная $s_n(t) = tL_n/L$ является натуральным параметром для $\big(x_n(s_n), y_n(s_n)\big)$, получаем

$$[y_n^*(t)]' = \frac{\mathrm{d}\left[y_n\left(t\frac{L_n}{L}\right)\right]}{\mathrm{d}t} = \\ = \frac{\mathrm{d}\left[y_n\left(t\frac{L_n}{L}\right)\right]}{\mathrm{d}t\frac{L_n}{L}}\frac{L_n}{L} = \dot{y_n}\left(t\frac{L_n}{L}\right)\frac{L_n}{L}. \qquad (2.1)$$

Вычислим вторую производную

$$(y_n^*)'' = \frac{d\left[\dot{y_n}\left(t\frac{L_n}{L}\right)\frac{L_n}{L}\right]}{\mathrm{d}t} = \\ = \frac{L_n}{L}\frac{\mathrm{d}\left[\dot{y_n}\left(t\frac{L_n}{L}\right)\right]}{\mathrm{d}\left(\frac{L_n}{L}t\right)}\frac{\mathrm{d}\left(\frac{L_n}{L}t\right)}{\mathrm{d}t} = \ddot{y_n}\left(\frac{L_n}{L}\right)^2. \qquad (2.2)$$

Тогда по теореме о среднем значении

$$\left|y_{n_j}^*(t_1) - y_{n_j}^*(t_2)\right| = \\ = \left|y_{n_j}\left(\frac{L_{n_j}}{L}t_1\right) - y_{n_j}\left(\frac{L_{n_j}}{L}t_2\right)\right| = \\ = \dot{y}_{n_j}(\xi_{n_j})\frac{L_{n_j}}{L}|t_1 - t_2|,$$

где $\xi_{n_j} \in \big(0, L_{n_j}\big)$ — внутренняя точка. Так как $L_{n_j}/L \to 1$, то существует N_1

$$\frac{1}{2} < \frac{L_{n_j}}{L} < 2 \text{ для любых } n_j > N_1.$$

Значит,

$$\left|y^*_{n_j}(t_1) - y^*_{n_j}(t_2)\right| < \\ < 2\dot{y}_{n_j}(\xi_{n_j})\,|t_1 - t_2| < 2\,|t_1 - t_2|\,. \quad (2.3)$$

Для последовательности $\{x^*_{n_j}\}$ доказательство равностепенной непрерывности аналогично.

Длины дуг минимизирующей последовательности ограничены, значит, $\{y^*_{n_j}(t)\}$, $\{x^*_{n_j}(t)\}$ — равномерно ограничены.

Следовательно, $\{x^*_{n_j}\}$, $\{y^*_{n_j}\}$ — компакты в метрике равномерной сходимости.

Лемма доказана. □

Оставим за ними обозначения самих последовательностей. Обозначим

$$y^*(t) = \lim_{n\to\infty} y^*_n, \quad x^*(t) = \lim_{n\to\infty} x^*_n.$$

Лемма 3. Последовательность $\{(y^*_n)'\}$ равностепенно непрерывна на $[\varepsilon, L]$.

Доказательство. Действительно, в силу (1.11) и того, что

$$4{H_n}^2 = \frac{(\dot{x_n})^2}{y_n^2} - 2\frac{\ddot{y_n}}{y_n} + \frac{(\ddot{y_n})^2}{(\dot{x_n})^2}$$

получаем

$$\int_0^{L_n} \left[\frac{(\dot{x_n})^2}{y_n 2} - 2\frac{\ddot{y_n}}{y_n} + \frac{(\ddot{y_n})^2}{(\dot{x_n})^2}\right] y_n\,\mathrm{d}s_n < A.$$

Далее заметим, что

$$(\ddot{y_n})^2 \leqslant \frac{(\ddot{y_n})^2}{(\dot{x_n})^2} = 4H_n^2 - \frac{(\dot{x_n})^2}{y_n^2} + 2\frac{\ddot{y_n}}{y_n} \leqslant \\ \leqslant 4H_n^2 + 2\frac{\ddot{y_n}}{y_n}.$$

Получаем, что

$$y_n\,(\ddot{y_n})^2 \leqslant 4y_n H_n^2 + 2\ddot{y_n}.$$

Тогда

$$\int_0^{L_n} y_n\,(\ddot{y_n})^2\,\mathrm{d}s_n \leqslant \\ \leqslant \int_0^{L_n} 4y_n H_n^2 ds_n + \int_0^{L_n} 2\ddot{y_n}\,\mathrm{d}s_n. \quad (3.1)$$

Преобразуем левую часть, используя (2.2) и (1.10),

$$\int_0^{L_n} y_n\,(s_n(t)) \left[\left(\frac{L}{L_n}\right)^2 (y^*_n)''\right]^2 \frac{L_n}{L}\,\mathrm{d}t \leqslant \\ \leqslant \int_0^{L_n} 4y_n H_n^2\,\mathrm{d}s_n + \int_0^{L_n} 2\ddot{y_n}\,\mathrm{d}s_n.$$

Заметим, что

$$\int_0^{L_n} 2\ddot{y_n}\,\mathrm{d}s_n = 2\,\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}s_n}\bigg|_0^{L_n},$$

тогда

$$\left(\frac{L}{L_n}\right)^3 \int_0^L y^*_n(t)\,\left[(y^*_n)''\right]^2 \mathrm{d}t \leqslant \\ \leqslant \int_0^{L_n} 4y_n {H_n}^2\,\mathrm{d}s_n + 2\,\frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}s_n}\bigg|_0^{L_n} = \\ = \int_0^{L_n} 4y_n {H_n}^2 ds_n + 2\,\dot{y}_n\big|_0^{L_n}.$$

Так как класс рассматриваемых поверхностей удовлетворяет (1.11) и $\dot{y}_n \leqslant 1$, получаем

$$\left(\frac{L}{L_n}\right)^3 \int_0^L y^*_n(t)\,\left[(y^*_n)''\right]^2 \mathrm{d}t \leqslant 4A + 4.$$

При достаточно больших n получаем, что $1/2 < (L/L_n)^3$, тогда

$$\frac{1}{2}\int_0^L \left[(y^*_n)''\right]^2 y^*_n\,\mathrm{d}t \leqslant \\ \leqslant \left(\frac{L}{L_n}\right)^3 \int_0^L y^*_n(t)\,\left[(y^*_n)''\right]^2 \mathrm{d}t \leqslant \\ \leqslant 4A + 4 = \frac{A_1}{2}.$$

Таким образом, интеграл в левой части ограничен.

Запишем его в виде суммы

$$\int_0^L \left[(y_n^*)''\right]^2 y_n^* \,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{L-\varepsilon_1} \left[(y_n^*)''\right]^2 y_n^* \,\mathrm{d}t +$$

$$+ \int_{L-\varepsilon_1}^{L} \left[(y_n^*)''\right]^2 y_n^* \,\mathrm{d}t \leqslant A_1.$$

Итак, справедлива оценка

$$\int_0^{L-\varepsilon_1} \left[(y_n^*)''\right]^2 y_n^* \,\mathrm{d}t \leqslant A_1. \qquad (3.2)$$

Заметим, что по построению $\{y_n^*\}$,

$$y_n^*(t) \geqslant y_n^*(L-\varepsilon_1) = B \quad \forall n \,\forall\, t \epsilon [0, L-\varepsilon_1]. \qquad (3.3)$$

Что противоречит тому факту, что $y_n^*(t) = 0$ только для $t = L$.

Значит, для любых $n > N_2$

$$\int_0^{L-\varepsilon_1} \left[(y_n^*)''\right]^2 B dt \leqslant \int_0^{L-\varepsilon_1} \left[(y_n^*)''\right]^2 y_n^* \,\mathrm{d}t \leqslant A_1,$$

$$\int_0^{L-\varepsilon_1} \left[(y_n^*)''\right]^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{A_1}{B}. \qquad (3.4)$$

В силу неравенства треугольника для скалярного произведения в пространстве L_2 при любых $t_1 t_2 \in [0, L-\varepsilon_1]$.

$$\left|\int_{t_2}^{t_1} (y_n^*)'' \,\mathrm{d}t\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{t_2}^{t_1} \left((y_n^*)''\right)^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{t_2}^{t_1} (1)^2 \,\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left[\int_{t_2}^{t_1} \left((y_n^*)''\right)^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} (t_1 - t_2)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_{t_2}^{L-\varepsilon_1} \left((y_n^*)''\right)^2 \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}} (t_1 - t_2)^{\frac{1}{2}}.$$

Значит, в силу (3.4) получаем,

$$\left|\int_{t_2}^{t_1} (y_n^*)'' \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left[\frac{A_1}{B}\right]^{\frac{1}{2}} (t_1 - t_2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{для любых } n > N_2. \qquad (3.5)$$

В силу формулы Ньютона–Лейбница и (3.5) для любых для любых $n > N_2$ получаем

$$\left|[y_n^*((t_2))]' - [y_n^*((t_1))]'\right| =$$

$$= \left|\int_{t_2}^{t_1} (y_n^*)'' \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \left[\frac{A_1}{B}\right]^{\frac{1}{2}} (t_1 - t_2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.6)$$

Что означает, что $\left\{(y_n^*)'(t)\right\}$ — равностепенно непрерывная последовательность на $[0, L-\varepsilon_1]$.

Лемма доказана. □

Таким образом, $\left\{(y_n^*)'(t)\right\}$ — равностепенно непрерывная последовательность на $(0, L-\varepsilon_1)$ и равномерно ограниченная на $(0, L-\varepsilon_1)$. А значит, $\left\{(y_n^*)'(t)\right\}$ — компакт, т.е. из любой последовательности на $(0, L-\varepsilon_1)$ можно выбрать сходящуюся равномерно подпоследовательность $\left\{\left(y_{n_1}^*\right)'(t)\right\}$.

Далее рассмотрим эту последовательность на $(0, L-\varepsilon_2)$, где $\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1$.

Выберем сходящуюся равномерно подпоследовательность (это возможно т.к. $\left\{\left(y_{n_1}^*\right)'(t)\right\}$ — тоже компакт $(0, L-\varepsilon_2)$). Будем выбирать $\varepsilon_k \to 0$ и строить для каждого k сходящуюся равномерно на $(0, L-\varepsilon_k)$ подпоследовательность $\left\{\left(y_{n_k}^*\right)'(t)\right\}$.

В итоге получим счетное число подпоследовательностей $\left\{\left(y_{n_k}^*\right)'(t)\right\}$, каждая из которых сходится равномерно на $(0, L-\varepsilon_k)$. Выбираем диагональную подпоследовательность, получим сходящуюся подпоследовательность на $(0, L)$. Значит, предел этой последовательности (обозначим его $(y^*)'(t)$) существует и принадлежит $\left\{(y_n^*)'(t)\right\}$, т.е. является непрерывной функцией. Очевидно, если продифференцировать $y^*(t)$ по t, получим $(y^*)'(t)$

Лемма 4. Существует обобщенная производная 2-го порядка по t для функции $y^*(t)$.

Здесь

$$y^*(t) = \lim_{n\to\infty} y_n^*.$$

Доказательство. Действительно, в (3.4) имеем $\forall\, n > N_2$, $\forall\, \varepsilon_1 > 0$

$$\int\limits_0^{L-\varepsilon_1} \left[(y_n^*)''\right]^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{A_1}{B}. \qquad (4.1)$$

Тогда получаем, что $\{y_n^*(t)\}$ ограниченна в $W^{2,2}\,[0, L-\varepsilon_1]$.

Последовательность $\{y_n^*\}$ равномерно сходится к y^* на отрезке $[0, L]$. Значит, для любого $\varphi \in L^2\,[0,\, L]$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\varepsilon^L \varphi\,(y_n^* - y^*)\,\mathrm{d}t = 0. \qquad (4.2)$$

Обозначим обобщенные производные 2-го порядка для y_n^* на $[\varepsilon, L]$ через g_n

$$\int\limits_\varepsilon^L \psi''\,(y_n^*)\,\mathrm{d}t + \int\limits_\varepsilon^L \psi g_n\,\mathrm{d}t = 0$$
$$\forall\,\psi\text{— финитной функции на }\ [\varepsilon, L]\,.$$

Откуда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_\varepsilon^L \psi''\,(y_n^*)\,\mathrm{d}t + \int\limits_\varepsilon^L \psi g_n\,\mathrm{d}t\right] = 0 \qquad \forall\,\psi \in C_0^\infty. \qquad (4.3)$$

В силу (4.2) существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_\varepsilon^L \psi''\,(y_n^*)\,\mathrm{d}t\right] = \int\limits_\varepsilon^L \psi'' y^*\,\mathrm{d}t\,\forall\,\psi \in C_0^\infty.$$

Значит, в силу (4.3) существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\varepsilon^L \psi g_n\,\mathrm{d}t\,\forall\,\psi \in C_0^\infty, g_n \in L^2\,[\varepsilon, L]\,. \qquad (4.4)$$

Далее воспользуемся следующей теоремой.

$\forall\,\{h_n\}$ — ограниченной в $L^2[\varepsilon, L]$ последовательности. Из того, что

$$\forall\,\psi \in \mathrm{C}_0^\infty\,[\varepsilon, L]\ \exists\ \lim_{n\to\infty}\int\limits_\varepsilon^L \psi h_n\,\mathrm{d}t$$

следует, что

$$\exists\ \lim_{n\to\infty}\int\limits_\varepsilon^L \varphi h_n\,\mathrm{d}t\,\forall\,\varphi \in L^2\,[\varepsilon, l]\,.$$

В силу этой теоремы в (4.4) можно считать, что $\psi \in L^2\,[\varepsilon, L]$.

Теперь можно воспользоваться теоремой Банаха–Олаоглу, в силу которой ограниченная последовательность $\{g_n\}$ в самосопряженном пространстве $L^2\,[\varepsilon, L]$ является слабым компактом.

Это означает, что $\exists\, G \in L^2\,[\varepsilon, L]$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\varepsilon^L \psi\,(g_n - G)\,\mathrm{d}t = 0\,\forall\,\psi \in L^2\,[\varepsilon,\, L]\,.$$

В частности, для $\psi = \varphi''$, где $\varphi \in C_0^\infty$, получили, что

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\varepsilon^L \varphi''\,(g_n - G)\,\mathrm{d}t = 0 \qquad \forall\,\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty\,[\varepsilon, L]\,. \qquad (4.5)$$

Тогда из (4.2) и (4.5)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_\varepsilon^L \varphi\,(y_n^* - y^*)\,\mathrm{d}t + \int\limits_\varepsilon^L \varphi''\,(g_n - G)\,\mathrm{d}t\right] = 0. \qquad (4.6)$$
$$\forall\,\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty\,[\varepsilon, L]\,.$$

Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int\limits_\varepsilon^L \varphi y_n^*\,\mathrm{d}t + \int\limits_\varepsilon^L \varphi'' g_n\,\mathrm{d}t\right] = \int\limits_\varepsilon^L \varphi y^*\,\mathrm{d}t + \int\limits_\varepsilon^L \varphi'' G\,\mathrm{d}t \qquad (4.7)$$
$$\forall\,\varphi \in C_0^\infty\,[\varepsilon, L]\,.$$

Левая часть равна нулю, т.к. g_n обобщенная производная для y_n^*. Значит,

$$\int\limits_\varepsilon^L \varphi y^* dt + \int\limits_\varepsilon^L \varphi'' G\,\mathrm{d}t = 0\,\forall\,\varphi \in \mathrm{C}_0^\infty[\varepsilon, L].$$

Итак, y^* обладает обобщенной производной 2-го порядка G.

Лемма доказана. $\square$

Нетрудно доказать, что параметр t в параметрическом представлении предельной поверхности является натуральным параметром. Теперь будем записывать предельную поверхность в виде $\big(x(s), y(s)\big)$, где s — натуральный параметр.

Итак, предельная поверхность является допустимой поверхностью.

Докажем теперь, что для предельной поверхности выполняется соотношение

$$\mu\Delta_S H + 2\mu H\left(H^2 - K\right) + \\ + \sigma\left(2H + l_p K\right) = \lambda + \frac{1}{\sigma}\Gamma\rho.$$

Для этого докажем следующую лемму.

Лемма 5. Для $y(S)$ существует непрерывная производная 3-го порядка и обобщенная производная 4-го порядка.

Доказательство. Рассмотрим первую вариацию функционала Уиллмора

$$\|H\|_2^2 = 2\pi\int\limits_0^L (2H)^2 y^*\,\mathrm{d}s,$$

$$2H = \frac{\dot{x}}{y} - \dot{x}\ddot{y} + \dot{y}\ddot{x}. \qquad (5.1)$$

Легко убедиться, что $2H_\varepsilon$ будет иметь следующий вид:

$$2H_\varepsilon = 2H + \varepsilon\left[\frac{\dot{t}\dot{y}^2}{y} + \dot{y}\ddot{t} + 2\dot{t}\ddot{y}\right]. \qquad (5.2)$$

Значит,

$$(2H_\varepsilon)^2 = \\ = (2H)^2 + 2\varepsilon\left[\frac{\dot{t}\dot{y}^2}{y} + \dot{y}\ddot{t} + 2\dot{t}\ddot{y}\right](2H). \qquad (5.3)$$

Заметим, что $y\,\mathrm{d}s_\varepsilon - y\,\mathrm{d}s = \varepsilon y\dot{t}\dot{x}\,\mathrm{d}s$, тогда

$$\delta_1\|H\|_2^2 = \\ = 2\pi\int\limits_0^{L_\varepsilon}(2H_\varepsilon)^2 y\,\mathrm{d}s_\varepsilon - 2\pi\int\limits_0^L (2H)^2 y\,\mathrm{d}s = \\ = 2\pi\varepsilon\int\limits_0^L \dot{t}\left[(2H)^2 y\dot{x} + 2\dot{y}^2(2H) + 4(2H)\dot{y}\ddot{y}\right]\mathrm{d}s + \\ + 2\pi\varepsilon\int\limits_0^L \ddot{t}4\dot{y}(2H)y\,\mathrm{d}s.$$

Интегрируя по частям первый интеграл, получим

$$\delta_1\|H\|_2^2 = \\ = 2\pi\varepsilon\int\limits_0^L \left[(2H)^2 y\dot{x} + 2\dot{y}^2(2H) + 4(2H)\dot{y}\ddot{y}\right]\mathrm{d}t + \\ + 2\pi\varepsilon\int\limits_0^L \ddot{t}\dot{y}(8H)y\,\mathrm{d}s.$$

Заметим, что выражение

$$\left[(2H)^2 y\dot{x} + 2\dot{y}^2(2H) + 4(2H)\dot{y}\ddot{y}\right].$$

интегрируемо на $[0, L]$, т.к. $(2H)^2$, $(2H)$, $\ddot{y}$ интегрируемы по условию и функции $\dot{x}$, $\dot{y}$, y — ограничены на $[0, L]$. Прообраз этого выражения обозначим через G_1.

Тогда

$$\delta_1\|H\|_2^2 = 2\pi\varepsilon\int\limits_0^L \dot{t}dG_1 + 2\pi\varepsilon\int\limits_0^L \ddot{t}4\dot{y}(2H)y\,\mathrm{d}s.$$

Интегрируя по частям и пользуясь финитностью функции $\dot{t}$, будем иметь

$$\delta_1\|H\|_2^2 = \\ = -2\pi\varepsilon\int\limits_0^L G_1 d\dot{t} + 2\pi\varepsilon\int\limits_0^L \ddot{t}4\dot{y}(2H)y\,\mathrm{d}s = \\ = 2\pi\varepsilon\int\limits_0^L \ddot{t}\left[y4\dot{y}(2H) - G_1\right]\mathrm{d}s.$$

Заметим, что

$$2H = \frac{\dot{x}}{y} + \frac{\ddot{x}}{\dot{y}},$$

$$\delta_1 \|H\|_2^2 = 2\pi\varepsilon \int_0^L \ddot{t}\left[y4\dot{y}\left(\frac{\dot{x}}{y} + \frac{\ddot{x}}{\dot{y}}\right) - G_1\right] \mathrm{d}s = \\ = 2\pi\varepsilon \int_0^L \ddot{t}\left[4\left(\dot{x}\dot{y} + \ddot{x}y\right) - G_1\right] \mathrm{d}s.$$

Тогда вариация функционала

$$F^*\left(\breve{S}\right) = F\left(\breve{S}\right) + 2\pi \int_0^L (2H)^2\, y \,\mathrm{d}s$$

для равновесной капли S равна нулю, т.е.

$$\delta_1\left(F^*(S)\right) = 2\pi\varepsilon \int_0^L \ddot{t}\left[4\left(\dot{x}\dot{y} + \ddot{x}y\right) - G_1\right] \mathrm{d}s + \\ + 2\pi\varepsilon \int_0^L t(s)\dot{y}\big[-(2H + l_pK) + \\ + \lambda + \sigma^{-1}\Gamma\rho\big] y \,\mathrm{d}s = 0. \quad (5.4)$$

Получаем, что $\left[4\left(\dot{x_1}\dot{y} + \ddot{x_1}y\right) - G_1\right]$ обладает обобщенной производной 2го порядка: $\dot{y}\left[-\left(2H + l_pK\right) + \lambda + \sigma^{-1}\Gamma\rho\right] y$. Значит, она обладает непрерывной производной 1-го порядка. Следовательно, $\ddot{x}$ обладает непрерывной производной.

Проинтегрируем по частям (5.4), пользуясь финитностью $\dot{t}$

$$\delta_1\left(F^*(S)\right) = \\ = -2\pi\varepsilon \int_0^L \dot{t}\left[4\left(\ddot{x_1}\dot{y} + \dot{x_1}\ddot{y} + \ddot{x_1}\dot{y} + \dddot{x}_1 y\right)\right] \mathrm{d}s - \\ -2\pi\varepsilon \int_0^L \dot{t}\left[(2H)^2 y\dot{x_1} + 2\dot{y}^2\left(2H\right) + 4(2H)\dot{y}\ddot{y}\right] \mathrm{d}s + \\ +2\pi\varepsilon \int_0^L t(s)\dot{y}\left[-(2H + l_pK) + \lambda + \sigma^{-1}\Gamma\rho\right] y \,\mathrm{d}s = \\ = 0.$$

Получаем, что $\dot{y}\left[-(2H + l_pK) + \lambda + \sigma^{-1}\Gamma\rho\right] y$ — обобщенная производная для

$$\Big[4\left(\ddot{x}\dot{y} + \dot{x}\ddot{y} + \ddot{x}\dot{y} + \dddot{x}y\right) - \\ - \left[(2H)^2 y\dot{x}_1 + 2\dot{y}^2(2H) + 4(2H)\dot{y}\ddot{y}\right]\Big].$$

Откуда получаем, что для $x(t)$ существует обобщенная производная 4-го порядка.

Лемма доказана. □

Аналогично доказывается существование обобщенной производной 4-го порядка для $y(s)$. Опираясь на полученные результаты, докажем следующую теорему.

Теорема 6. Пусть $S_E \in \mathfrak{I}_H$ — решение вариационной задачи, l — образующая поверхности вращения S_E Тогда функции x, y из естественного параметрического представления кривой l принадлежат пространству $W^{4,2}\left([0, L - \varepsilon]\right)$.

При этом средняя кривизна H и гауссова кривизна K поверхности S_E удовлетворяют следующему уравнению:

$$\mu\Delta_S H + 2\mu H\left(H^2 - K\right) + \sigma\left(2H + l_pK\right) = \\ = \lambda + \frac{1}{\sigma}\Gamma\rho. \quad (6.1)$$

Доказательство. Рассмотрим поверхность S_ε с образующей l_ε, задаваемой графиком функции $x_\varepsilon(y) = x_1(y) + \varepsilon t_1\left(y\right)$, где $t_1(y)$ — финитная функция.

Параметрическая запись этой кривой будет иметь вид

$$x_\varepsilon\left(s_\varepsilon\right) = x\left(s_\varepsilon(S)\right) + \varepsilon t\left(s_\varepsilon(s)\right),$$

$$y_\varepsilon\left(s_\varepsilon\right) = y\left(s_\varepsilon(S)\right),$$

где

$$s_\varepsilon(S) = \int_0^s \sqrt{\left(\dot{x}(\tau) + \varepsilon\dot{t}(\tau)\right)^2 + \dot{y}^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau,$$

s_ε — новый натуральный параметр.

Пользуясь результатом работы [6], имеем

$$\delta_1\left(F(S)\right) = \\ = -2\pi\varepsilon \int_0^L t(s)\big[-\left(2H + l_pK\right)\sigma + \\ + \lambda\sigma + \Gamma\rho\big]\dot{y}y \,\mathrm{d}s.$$

В силу Леммы 1

$$\delta_1\left(\sigma\|H\|_2^2\right) = \\ = 2\pi\varepsilon\sigma\int\limits_0^L \left[\Delta_s(H) + 2H^3 - 4HK\right]\dot{y}ty\,\mathrm{d}s.$$

Тогда

$$\delta_1\left(F(S)\right) = -2\pi\varepsilon\int\limits_0^L t(s)\big[-\left(2H + l_pK\right)\sigma + \\ + \lambda\sigma + \Gamma\rho\big]\dot{y}y\,\mathrm{d}s + \\ + 2\pi\varepsilon\sigma\int\limits_0^L \left[\Delta_s(H) + 2H^3 - 4HK\right]\dot{y}ty\,\mathrm{d}s,$$

где

$$\mathfrak{F}(S) := F(S) + \mu\|H\|_2^2(S).$$

Так как на экстремальных поверхностях $\delta_1\left(\mathfrak{F}(S)\right) = 0$, то в силу произвольности финитной функции, получаем, что экстремальная поверхность удовлетворяет условию (6.1).

Теорема доказана. $\square$

Заключение

Доказана разрешимость вариационной задачи, определение равновесной формы поверхности висящей жидкой капли.

Исследованы дифференциальные формы поверхности. Выведено дифференциальное уравнение, обобщающее уравнение средней кривизны для поверхностей вращения.

Методы, развитые в работе кроме классического макро случая, дают возможность уточнять исследования наноструктур.

Литература

1. *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* Линейные, квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. 576 с.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 441 с.
3. *Klyachin A.A., Klyachin V.A., Grigoreva E.G.* Visualization of Stability and Calculation of the Shape of the Equilibrium capillary surface // Scientific Visualization. 2016. Vol. 8. Iss. 2. P. 37–52.
4. *Саранин В.А., Иванов Ю.В.* Равновесие жидкостей и его устойчивость. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2009. 87 с.
5. *Maxwell J.C.* Capillary Attraction / Encyclopedia Britanica, 9^{th} Ed., Vol. 5, Samuel L. Hall.
6. *Щербаков М.Е.* О союзном функционале гауссовой кривизны и равновесных формах жидких капель // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019. № 2. С. 6–12.

References

1. Ladyzhenskaya O.A., Ural'tseva N.N. *Lineynye, kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear, quasilinear equations of elliptic type]. Nauka, Moscow, 1973. (In Russian)
2. Gilbarg D., Trudinger N. *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Second-order elliptic partial differential equations]. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)
3. Klyachin A.A., Klyachin V.A., Grigoreva E.G. Visualization of Stability and Calculation of the Shape of the Equilibrium capillary surface. *Scientific Visualization*, 2016, vol. 8, iss. 2, pp. 37–52.
4. Saranin V.A., Ivanov Yu.V. *Ravnovesie zhidkostey i ego ustoychivost'* [The balance of liquids and its stability]. Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika, Izhevsk, 2009. (In Russian)
5. Maxwell J.C. Capillary Attraction. *Encyclopedia Britanica, 9^{th} Ed., Vol. 5*, Samuel L. Hall.
6. Shcherbakov M.E. O soyuznom funktsionale gaussovoy krivizny i ravnovesnykh formakh zhidkikh kapel' [On the union functional of Gaussian curvature and equilibrium forms of liquid droplets]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2019, no. 2, pp. 6–12. (In Russian)

Статья поступила 17 марта 2020 г.