ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2020. Т. 17. № 1. Ч. 1. С. 17–22

Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-1-17-22

ОБ ОДНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕ В КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A WEDGE-SHAPED DOMAIN

V. A. Babeshko[1,2], O. V. Evdokimova[2], O. M. Babeshko[1]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

[2] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia

Abstract. The boundary value problem for the three-dimensional Helmholtz equation is considered in an area that represents a rectangular wedge of infinite length. The block element method is used for the first time to construct an exact solution of this boundary value problem in the form of a Packed block element, which is necessary for the study of more complex, including mixed problems for block structures. Representations of solutions to boundary problems in the form of Packed block elements make it possible to study and solve boundary problems of almost any complexity and in any areas. This is due to the fact that an arbitrary area can always be represented in real or virtual form as a block structure, blocks of which can be formed from the condition of convenience of solving specified boundary problems on them. In this paper, we consider a three-dimensional Dirichlet boundary value problem for the Helmholtz equation, for which the block element method is used to construct solutions for arbitrary boundary conditions in a wedge-shaped region in the form of Packed and unpacked block elements. There are no such solutions in publications, they exist only for special cases. The block element method solves it quite simply and can be used for more complex tasks.

Keywords: block element method, boundary value problem, automorphism, pseudo differential equation, wedge-shaped area.

Исследованию уравнения Гельмгольца посвящено большое количество работ. В первую очередь это работы в слоистых областях [1], где эффективно применен метод интегральных преобразований. В работах [2–4] развит и эффективно применен лучевой метод, давший возможность исследовать граничные задачи в произвольных областях при высоких частотах, в том числе для уравнения Гельмгольца. В работах [5–9] развивается метод представления решений граничных задач теории упругости термолектроупругости, поронасыщенных сред Био с использованием решений уравнения Гельмгольца. Достаточно большое число работ посвящено исследованию этого уравнения для плоских клиньев методом преобразования Конторовича–Лебедева [10] и других преобразований. Метод блочного элемента впервые рассмотрен в [11] для решения граничной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца. В этой работе построено точное решение граничной задачи в виде упакованных блочных элементов при произвольных граничных условиях в области типа неограниченного прямоугольного клина. Также произведен анализ акустический свойств среды в этой области.

В настоящей работе по аналогии с указанной работой исследуется граничная задача Дирихле для уравнения Гельмгольца. Иссле-

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки на 2019 г. (проекты 9.8753.2017/8.9), ЮНЦ РАН на 2019 г. (проекта 00-18-04) № госрег. 01201354241, программ президиума РАН I-16 (проект 00-18-21) и I-52 (проект 00-18-29), и при поддержке грантов РФФИ (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 17-08-00323, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

дован ряд свойств решения этой граничной задачи, необходимой для решения более сложных задач.

Представления решений граничных задач в виде упакованных блочных элементов открывают возможность исследования и решения граничных задач практически любой сложности и в любых областях. Это связано с тем, что произвольную область всегда можно реально или виртуально представить в виде некоторой блочной структуры, блоки которой можно формировать из условия удобства решения на них заданных граничных задач [12].

1. Введем правую прямоугольную систему координат, направив оси ox_1, ox_3 горизонтально, а ось ox_2 — вертикально вверх. Рассматривается граничная задача для трехмерного уравнения Гельмгольца в прямоугольной области $\Omega(|x_3| \leqslant \infty, x_1 \leqslant 0, x_2 \leqslant 0)$. На границах области Ω задаются условия Дирихле. Задачи такого рода возникают при исследовании акустических свойств неограниченных областей тип клина, а также при подготовке исходных данных для исследования более сложных граничных задач для уравнений Ламе, Навье–Стокса, Максвелла и других [7–9] в таких областях. Построение решений в форме упакованных блочных элементов — необходима часть исследования при изучении блочных структур. Указанная краевая задача в ограниченной области (прямоугольнике) рассматривалась в [13], где методом блочного элемента с введением касательного расслоения границы были построены псевдодифференциальные уравнения. Приведем одно из них

$$\left[A_{11}\partial^2 x_1 + A_{22}\partial^2 x_2 + A_{33}\partial^2 x_3 + A\right] \times \\ \times \phi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Имеем

$$\mathrm{K}_1\Phi_1 = \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\phi'_{13} - i\alpha_3^1\phi_1\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^1\eta_1^1 + \alpha_2^1\eta_2^1\right] \mathrm{d}\eta_1^1\,\mathrm{d}\eta_2^1 + \\ + \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{11}\left(\phi'_{22} + i\alpha_1^1\phi_2\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^2 + \alpha_3^1\left(x_1^2 - b\right)\right] \mathrm{d}x_1^2\,\mathrm{d}x_2^2 + \\ + \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\phi'_{33} + i\alpha_3^1\phi_3\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^3 + \alpha_2^1 x_2^3 - \alpha_3^1 2b\right] \mathrm{d}x_1^3\,\mathrm{d}x_2^3 - \\ - \int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{11}\left(\phi'_{43} - i\alpha_1^1\phi_4\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^1 a + \alpha_2^1 x_2^4 - \alpha_3^1\left(x_1^4 + b\right)\right] \mathrm{d}x_1^4\,\mathrm{d}x_2^4 + \\ + \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\phi'_{53} + i\alpha_2^1\phi_5\right) \times \\ \times \exp i\left[\alpha_1^1 x_1^5 - \alpha_2^1 c + \alpha_3^1\left(x_2^5 - b\right)\right] \mathrm{d}x_1^5\,\mathrm{d}x_2^5 + \\ + \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\phi'_{63} - i\alpha_2^1\phi_6\right) \times \\ \times \exp i\left[-\alpha_1^1 x_1^6 + \alpha_2^1 c + \alpha_3^1\left(x_2^6 - b\right)\right] \mathrm{d}x_1^6\,\mathrm{d}x_2^6.$$

Здесь постоянные a, b, c определяют ограниченный прямоугольник, если все постоянные ограничены, или полуограниченный, если среди постоянных имеются бесконечные.

В настоящей работе применяется облегченный вариант метода блочного элемента, основанный на привязке локальных систем координат к единой координатной системе, что, в связи с формой области Ω, позволяет выполнить исследование более наглядно. Ниже рассматривается трехмерное уравнение Гельмгольца

$$\left[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + p^2\right] u(x_1, x_2, x_3) = 0$$

в области $\Omega(|x_3| \leqslant \infty,\ x_1 \leqslant 0,\ x_2 \leqslant 0)$. Здесь p может быть комплексным числом.

Для применения метода блочного элемента к граничной задаче в блочной структуре необходимо выполнить три алгоритма: внешней алгебры, внешнего анализа и построение фактор-топологии. Ввиду рассмотрения лишь одного блочного элемента, необходимость в последнем алгоритме отпадает.

Рассмотрим для этого уравнения граничную задачу Дирихле.

В первом случае считаем, что граничные условия имеют вид

$$u(0, x_2, x_3) = f_2(x_2, x_3), \\ u(x_1, 0, x_3) = f_1(x_1, x_3). \tag{1}$$

Здесь произвольные функции f_n, $n = 1, 2$ обладают свойствами, достаточными для разрешимости соответствующих граничных задач в пространствах медленно растущих обобщенных функций. Поскольку область Ω содержит бесконечно удаленные точки, если в граничной задаче появляются волновые функции, решение ищется с применением принципа излучения.

2. Применением преобразования Фурье к дифференциальному уравнению по параметру x_3 в обеих граничных задачах получаем дифференциальное уравнение с параметром вида

$$\left(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2\right) u(x_1, x_2, \alpha_3) = 0,$$

$$k^2 = p^2 - \alpha_3^2.$$

Используя один из способов касательного расслоения границы, после использования двумерного преобразования Фурье и введения внешних форм, приходим к функциональным уравнениям вида

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2) U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int\limits_{\partial\Omega} \omega,$$

$$\begin{aligned}\omega = \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2}\, \mathrm{d}x_2 - \\ - i\alpha_1 u(0, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2}\, \mathrm{d}x_2 + \\ + \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1 - \\ - i\alpha_2 u(x_1, 0, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения

$$\begin{aligned}U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = \iiint\limits_{\Omega} u(x_1, x_2, x_3) e^{i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}\, \mathrm{d}x_1\, \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_3,\end{aligned}$$

$$\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

$$\begin{aligned}u(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{1}{8\pi^3} \iiint\limits_{R^3} U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) e^{-i\langle \boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}\, \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2\, \mathrm{d}\alpha_3.\end{aligned}$$

Правую часть в функциональном уравнении можно представить в виде

$$\begin{aligned}\int\limits_{\partial\Omega} \omega = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1} e^{i\alpha_2 x_2}\, \mathrm{d}x_2 - \\ - i\alpha_1 \int\limits_{-\infty}^{0} u(c, x_2, \alpha_3) e^{i\alpha_2 x_2}\, \mathrm{d}x_2 + \\ + \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} e^{i\alpha_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1 - \\ - i\alpha_2 \int\limits_{-\infty}^{0} u(x_1, b, \alpha_3) e^{i\alpha_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1.\end{aligned}$$

Вычислив одномерные интегралы, которые являются преобразованиями Фурье соответствующих функций, можем представить функциональное уравнение в форме

$$\begin{aligned}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = \frac{\partial U(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 U(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\ + \frac{\partial U(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 U(\alpha_1, 0, \alpha_3).\end{aligned}$$

В дальнейшем прописной буквой будут обозначаться преобразования Фурье, вычисленные от функций, представленных соответствующей строчной буквой.

3. Рассмотрим случай задачи Дирихле. Внесем в правую часть значения функций (1), имеем

$$\begin{aligned}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) U_1(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \\ = \frac{\partial U_1(0, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 F_2(0, \alpha_2, \alpha_3) + \\ + \frac{\partial U_1(\alpha_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 F_1(\alpha_1, 0, \alpha_3).\end{aligned}$$

Для выполнения алгоритма внешнего анализа факторизуем коэффициент функционального уравнения по каждому параметру

$$\begin{aligned}(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - k^2) = (\alpha_1 - \alpha_{1=})(\alpha_1 + \alpha_{1=}) = \\ = (\alpha_2 - \alpha_{2=})(\alpha_2 + \alpha_{2=}),\end{aligned}$$

$$\alpha_{1=} = -i\sqrt{\alpha_2^2 - k^2}, \quad \alpha_{2=} = -i\sqrt{\alpha_1^2 - k^2},$$

$$\operatorname{Im}\alpha_{1=} \leqslant 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_2 = \leqslant 0.$$

Условие автоморфизма для носителя и функций на нем приводит к псевдодифференциальным уравнениям вида

$$\frac{\partial U_1(0,\alpha_{2-},\alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_1 F_2(0,\alpha_{2-},\alpha_3) + \\ + \frac{\partial U_1(\alpha_1,0,\alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_{2-}F_1(\alpha_1,0,\alpha_3) = 0,$$

$$\frac{\partial U_1(0,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial x_1} - i\alpha_{1-}F_2(0,\alpha_2,\alpha_3) + \\ + \frac{\partial U_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3)}{\partial x_2} - i\alpha_2 F_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3) = 0.$$

Неизвестными в псевдодифференциальном уравнении являются функции

$$\frac{\partial U_1(0,\alpha_{2-},\alpha_3)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3)}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial U_1(0,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial U_1(\alpha_1,0,\alpha_3)}{\partial x_2}.$$

Решение псевдодифференциальных уравнений, найденное с требованием обращения в ноль псевдодифференциальных уравнений вне области Ω, после преобразований приводит к следующему виду функционального уравнения

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2)U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \\ = \left[F_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3) - F_1(\alpha_1,0,\alpha_3)\,\right](\alpha_2-\alpha_{2-}) + \\ + \left[\,F_2(0,\alpha_{2-},\alpha_3) - F_2(0,\alpha_2,\alpha_3)\right](\alpha_1-\alpha_{1-}).$$

Тогда решение, представляющее упакованный блочный элемент, принимает вид

$$u(x_1,x_2,x_3) = \\ = \frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{R^3} U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)e^{-i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3,$$

$$U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \\ = \frac{i}{(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2)}\times \\ \times\left\langle[F_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3) - F_1(\alpha_1,0,\alpha_3)]\,(\alpha_2-\alpha_{2-}) + \right. \\ \left. +[F_2(0,\alpha_{2-},\alpha_3) - F_2(0,\alpha_2,\alpha_3)]\,(\alpha_1-\alpha_{1-})\right\rangle.$$

Функцию $U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ можно представить в виде

$$U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \\ = i\left\langle\frac{[F_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3) - F_1(\alpha_1,0,\alpha_3)]}{(\alpha_2+\alpha_{2-})} + \right. \\ \left. + \frac{[F_2(0,\alpha_{2-},\alpha_3) - F_2(0,\alpha_2,\alpha_3)]}{(\alpha_1+\alpha_{1-})}\right\rangle.$$

Если на одной из граней функция $u(x_1,x_2,x_3)$ обращается в ноль (например, $F_2=0$), то решение упрощается и принимает вид

$$U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \\ = i\left\langle\frac{[F_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3) - F_1(\alpha_1,0,\alpha_3)]}{(\alpha_2+\alpha_{2-})}\right\rangle.$$

В том случае, когда на поверхности акустической среды задается дельта-функция $\delta(x_1-x_{10},x_3-x_{30})$, имеем

$$F_1(\alpha_1,0,\alpha_3) = e^{i(\alpha_1x_{10}+\alpha_3x_{30})}.$$

$$U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) = \\ = i\,\frac{\left[e^{i(\alpha_{1-}x_{10}+\alpha_3x_{30})} - e^{i(\alpha_1x_{10}+\alpha_3x_{30})}\right]}{(\alpha_2+\alpha_{2-})}.$$

Вспоминая, что

$$\alpha_{1-} = -i\sqrt{\alpha_2^2-p^2+\alpha_3^2},$$

$$\alpha_{2-} = -i\sqrt{\alpha_1^2-p^2+\alpha_3^2}$$

получаем представление решения граничной задачи в виде

$$u(x_1,x_2,x_3) = \frac{i}{8\pi^3}\iiint\limits_{R^3}\frac{\psi}{\xi}\times \\ \times e^{-i[\alpha_1(x_1-x_{10})+\alpha_2x_2+\alpha_3(x_3-x_{30})]}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3,$$

$$\psi = \left[\exp(x_{10}\sqrt{\alpha_2^2-p^2+\alpha_3^2} - i\alpha_1x_{10}) - 1\right],$$

$$\xi = (\alpha_2 - i\sqrt{\alpha_1^2-p^2+\alpha_3^2}).$$

Записанные в таком виде решения топологически представляют упакованные блочные элементы. Функции, построенные в области Ω, имеют эту область в качестве носителя, то есть вне нее они обращаются в ноль. Упакованные блочные элементы нужны при исследовании и решении граничных задач, поставленных для блочных структур, в каждом ее блоке. С их помощью выполняется алгоритм построения фактор-топологии, когда в качестве соотношений эквивалентности выступают межблоковые граничные условия. Для осуществления аналитического или численного анализа решения, представленного упакованным блочным элементом, его надо распаковать [14], вычислив по теории вычетов интеграл, что всегда возможно. Получившееся в результате выражение, представленное с участием интегралов или без них, во внутренности области Ω дает решение граничной задачи. Оно имеет вид для $x_1, x_2 \leqslant 0$

$$u(x_1,x_2,x_3) = \frac{i}{2\pi^2} \iint\limits_{R^2} (\sin\alpha_1 x_{10})\times$$
$$\times e^{-i\left[\alpha_1 x_1 + i\sqrt{\alpha_1^2 - p^2 + \alpha_3^2}x_2 + \alpha_3(x_3 - x_{30})\right]}\, \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_3.$$

С помощью внутренних односторонних пределов на границе можно убедиться в выполнении заданных граничных условий. Решение распакованного блочного элемента удовлетворяет в области Ω дифференциальным уравнениям граничной задачи и граничным условиям, но не обязательно равно нулю вне этой области. Например, из распакованного блочного элемента видно, что выполняются граничные условия

$$u(0,x_2,x_3) = 0,$$
$$u(x_1,0,x_3) = \delta(x_1 - x_{10}, x_3 - x_{30}).$$

Применяя для анализа полученного интеграла метод перевала или стационарной фазы [15], достаточно просто получить асимптотическое поведение решения в дальней зоне. Построенное интегральное представление решения уравнения Гельмгольца достаточно просто переносится на решение нестационарных задач. Достаточно применить к нестационарному уравнению Гельмгольца преобразование Лапласа по времени с параметром s. В результате получаем аналогичную граничную задачу с двумя параметрами — α_3 и s. Все остальное сохраняется без изменения.

Литература

1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 502 с.
2. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Математический сборник. 1964. Т. 65. С. 577–630.
3. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 256 с.
4. *Cerveny v., Molotkov I.A., Psencik I.* Rey Method in seismology. Praha, Univerzita Karlova, 1977. 216 p.
5. *Мухина И.В.* Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // ПММ. 1972. Т. 36. Р. 667–671.
6. *Молотков Л.А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. С.-Пб.: Наука, 2001. 348 с.
7. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
9. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
10. *Беркович В.Н.* К теории смешанных задач динамики клиновидных композитов // ДАН. 1990. Т. 314. № 1. С. 172–175.
11. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме акустических и гидродинамических свойств среды, занимающей область трехмерного прямоугольного клина // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60. № 6. С. 90–96. DOI: 10.15372/PMTF20190610
12. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Рядчиков И.В.* Метод проектирования неоднородных материалов и блочных конструкций // ДАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014
13. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О проблеме блочных структур академика М.А. Садовского // ДАН. 2009. Т. 427. № 4. С. 480–485.
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стадиях преобразования блочных элементов // ДАН. 2016. Т. 468. № 2. С. 154–158.
15. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.

References

1. Brekhovskikh L.M. *Volny v sloistykh sredakh* [Waves in layered media]. Nauka, Moscow, 1973. (In Russian)
2. Babich V.M. O korotkovolnovoy asimptotike funktsii Grina dlya uravneniya Gel'mgol'tsa [On the short-wave asymptotics of the Green's function for the Helmholtz equation]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection], 1964, vol. 65, pp. 577–630. (In Russian)

3. Babich V.M., Buldyrev V.S. *Asimptoticheskie metody v probleme difraktsii korotkikh voln* [Asymptotic methods in the problem of short-wave diffraction]. Nauka, Moscow, 1972. (In Russian)
4. Cerveny v., Molotkov I.A., Psencik I. *Rey Method in seismology.* Univerzita Karlova, Praha, 1977.
5. Mukhina I.V. Priblizhennoe svedenie k uravneniyam Gel'mgol'tsa uravneniy teorii uprugosti i elektrodinamiki dlya neodnorodnykh sred [Approximate reduction to the Helmholtz equations of the equations of elasticity theory and electrodynamics for inhomogeneous media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1972, vol. 36, pp. 667–671. (In Russian)
6. Molotkov L.A. *Issledovanie rasprostraneniya voln v poristykh i treshchinovatykh sredakh na osnove effektivnykh modeley Bio i sloistykh sred* [Study of wave propagation in porous and fractured media based on effective Bio and layered media models]. Nauka, Saint petersburg, 2001. (In Russian)
7. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Mir, Moscow, 1975. (In Russian)
8. Novatskiy V. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic problems of thermoelasticity]. Mir, Moscow, 1970. (In Russian)
9. Novatskiy V. *Elektromagnitnye effekty v tverdykh telakh* [Electromagnetic effects in solids]. Mir, Moscow, 1986. (In Russian)
10. Berkovich V.N. K teorii smeshannykh zadach dinamiki klinovidnykh kompozitov [On the theory of mixed problems of the dynamics of wedge-shaped composites]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 1990, vol. 314, no. 1, pp. 172–175. (In Russian)
11. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. K probleme akusticheskikh i gidrodinamicheskikh svoystv sredy, zanimayushchey oblast' trekhmernogo pryamougol'nogo klina [On the problem of acoustic and hydrodynamic properties of a medium occupying the region of a three-dimensional rectangular wedge]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2019, vol. 60, no. 6, pp. 90–96. DOI: 10.15372/PMTF20190610 (In Russian)
12. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Ryadchikov I.V. Metod proektirovaniya neodnorodnykh materialov i blochnykh konstruktsiy [The method of designing heterogeneous materials and block structures]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2018, vol. 482, no. 4, pp. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014 (In Russian)
13. Babeshko V.A., Babeshko O.M., Evdokimova O.V. O probleme blochnykh struktur akademika M. A. Sadovskogo [On the problem of block structures of academician M.A. Sadovsky]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2009, vol. 427, no. 4, pp. 480–485. (In Russian)
14. Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M. O stadiyakh preobrazovaniya blochnykh elementov [About the stages of transforming block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2016, vol. 468, no. 2, pp. 154–158. (In Russian)
15. Fedoryuk M.V. *Metod perevala* [Pass Method]. Nauka, Moscow, 1977. (In Russian)

Статья поступила 24 февраля 2020 г.