

## МЕХАНИКА

УДК 532.526

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-1-23-29

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩЕНИЯ ЖИДКОСТИ  
ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ

Батищев В. А.

## OCCURRENCE OF FLUID ROTATION UPON COOLING OF THE FREE BOUNDARY

V. A. Batishchev

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia  
e-mail: batishev-v@mail.ru

*Abstract.* For the Navier-Stokes system and the heat equation with vanishing viscosity, the stationary thermocapillary flow of an incompressible fluid in a horizontal layer of infinite thickness is calculated. The layer is bounded above by a free non-deformable boundary on which an uneven temperature distribution is specified. In the approximation of the boundary layer, asymptotic expansions of the solution of the problem are constructed. The main terms of the asymptotics satisfy the Prandtl equations of the boundary layer. Two types of regimes in the boundary layer are calculated – non-swirling and rotational fluid flows.

Rotational regimes of fluid flows arise as a result of bifurcation of non-swirling regimes in the boundary layer. Bifurcation points are found by solving a boundary value problem for eigenvalues. It is shown that rotational regimes arise only when the free boundary is locally cooled. When the boundary is heated, fluid rotation does not occur.

Two types of rotational modes are numerically calculated. All modes exist only if the velocity of the external fluid flow does not exceed the bifurcation value. The modes of the first type have axial symmetry. There are only two such modes. Other modes do not have axial symmetry. For modes of the second type, an exact solution in cylindrical coordinates is obtained. These modes depend on two independent parameters that fill the circle of unit radius. So, at the bifurcation point, many rotational regimes arise, which are a two-parameter family.

*Keywords:* thermocapillary, boundary layer, free boundary, bifurcation, rotation.

## Введение

Нелинейные пограничные слои вблизи свободной границы могут формироваться в жидкости с исчезающими диффузионными коэффициентами в результате воздействия касательных напряжений на свободную поверхность. Такие напряжения формируются вследствие зависимости коэффициента поверхностного натяжения свободной границы от температуры. Эти напряжения приводят к возникновению термокапиллярного течения жидкости (эффект Марангони) [1–3]. Активное исследование таких эффектов в пограничных слоях Марангони проводится, начиная со второй половины прошлого столетия. В одной из первых опубликованных работ [1] получено автомодельное решение, описывающее осесимметричное термокапиллярное стационарное течение жидкости в пограничном слое Марангони. Нелинейные свойства слоев Марангони изучались во многих работах, напри-

мер в [2], где исследованы групповые свойства уравнений пограничного слоя в нестационарном случае. Отметим, что вблизи свободной границы может возникать нелинейный пограничный слой под действием касательных напряжений, вызванных ветровыми нагрузками [4]. Расчет поля скорости в пограничном слое Марангони в однородной жидкости приводит к расчету пограничного слоя, выполненному ранее в [4]. Нелинейный пограничный слой вблизи свободной границы может возникать и при отсутствии поверхностных касательных напряжений за счет обратного влияния поля температуры на поле скоростей жидкости [3].

Асимптотический анализ, выполненный в работе [3], показал, что при охлаждении свободной границы в слое Марангони в осесимметричном случае может возникать пара вращательных режимов течений жидкости, которые однозначно определяются краевы-

ми условиями. Ниже показано, что при тех же температурных условиях на границе при отсутствии осевой симметрии возможно появление множества вращательных режимов, зависящих от двух произвольных параметров, которые заполняют круг единичного радиуса. Такие режимы отщепляются в пограничном слое от осесимметричного не закрученного течения жидкости.

### 1. Уравнения движения

Рассматривается стационарное течение вязкой несжимаемой жидкости в горизонтальном слое бесконечной толщины. Сверху слой ограничен свободной поверхностью  $\Gamma$ , вдоль которой температура изменяется неравномерно. Стационарное течение однородной жидкости описывается системой Навье–Стокса и уравнением теплопроводности

$$(\mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) = -\rho^{-1} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (1.1)$$

$$\mathbf{v} \nabla T = \chi \Delta T, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Здесь  $\mathbf{v} = (v_r, v_\phi, v_z)$  — вектор скорости,  $(r, \phi, z)$  — цилиндрические координаты,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g_t)$ ,  $g_t$  — ускорение свободного падения,  $T$  — температура,  $\nu$  и  $\chi$  — соответственно коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности, которые считаются малыми. На свободной поверхности  $\Gamma$  выполняются граничные условия, состоящие из динамических условий для нормальных и касательных напряжений, кинематического условия непротекания жидкости через границу и заданной температуры  $T_\Gamma$ :

$$p = 2\nu\rho\mathbf{n}\Pi\mathbf{n} - \sigma(k_1 + k_2) + p_*, \quad (1.2)$$

$$2\nu\rho(\mathbf{n}\Pi - (\mathbf{n}\Pi\mathbf{n})\mathbf{n}) = \nabla_\Gamma \sigma,$$

$$T = T_\Gamma(r, z), \quad (r, \phi, z) \in \Gamma.$$

Здесь введены обозначения:  $\Pi$  — тензор скоростей деформации,  $\mathbf{n}$  — единичный вектор внешней нормали к свободной границе,  $k_1$  и  $k_2$  — главные кривизны свободной поверхности,  $p_*$  — давление на свободной границе, которое считается постоянным,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения, линейно зависящий от температуры  $\sigma = \sigma_0 - |\sigma_T|(T - T_*)$ , где  $\sigma_0, |\sigma_T|, T_*$  — известные постоянные,  $\nabla_\Gamma$  — градиент вдоль поверхности  $\Gamma$ . При удалении от границы  $\Gamma$  в поперечном направлении температура жидкости стремится к постоянному

значению  $T_\infty$ , а скорость жидкости ограничена.

Начало системы координат выбираем на свободной границе. Ниже строится решение, для случая, когда свободная граница в главном приближении не деформируется и описывается уравнением  $z = 0$ . Предположим, что температура на свободной границе зависит квадратично от радиальной координаты  $T_\Gamma = T_\infty + T_m(r^2/L^2 - 1)$  при  $r \leq L$  и  $T_\Gamma = T_\infty$  при  $r > L$ . Здесь  $T_m$  перепад температуры  $T_m = T_\Gamma|_{r=L} - T_\Gamma|_{r=0}$  на  $\Gamma$  на промежутке  $r \in [0, L]$ . Отметим, что в случае  $T_m > 0$  и  $r < L$  свободная граница в окрестности оси  $Oz$  охлаждается, а в случае  $T_m < 0$  — нагревается.

Введем безразмерный перепад температуры  $\alpha$  по формуле  $\alpha = T_m/T_\infty$ . Предположим, что перепад температуры при охлаждении изменяется на промежутке  $0 < T_m < T_\infty$ . В этом случае  $0 < \alpha < 1$ . Уравнения движения и краевые условия приведем к безразмерному виду. В качестве масштабов длины, температуры, скорости и давления принимаем параметры  $L, T_\infty, u_0, \rho u_0^2$ , соответственно. Масштаб скорости  $u_0$  и безразмерный параметр  $\varepsilon$  введем по формулам

$$u_0 = (T_\infty^2 \sigma_T^2 L^{-1} \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/3}, \quad \varepsilon = \sqrt{\nu/u_0 L}.$$

Здесь параметр  $T_\infty$  рассматривается как верхняя грань множества, к которому принадлежит перепад температуры  $T_m$ . Предположим, что параметр  $\alpha^{2/3}$  конечен. В этом случае масштаб  $u_0$  имеет такой же порядок, как и параметр  $u_m = (T_m^2 \sigma_T^2 L^{-1} \nu^{-1} \rho^{-2})^{1/3}$ , построенный по перепаду температуры  $T_m$ .

### 2. Пограничный слой

При конечных значениях параметра  $L$  и малых значениях коэффициента кинематической вязкости  $\nu$  параметр  $\varepsilon$  является малым. В данном случае это означает наличие пограничного слоя Марангони, толщиной порядка  $O(\varepsilon)$  вблизи свободной границы. Вне этого слоя возникает «внешнее» течение жидкости, которое в главном приближении удовлетворяет уравнениям Эйлера невязкой жидкости. Рассмотрим случай, когда порядки скоростей в пограничном слое и во внешней области одинаковы и равны  $O(u_0)$ . Введем скорость внешнего потока  $\mathbf{v}_0 = (v_{r0}, v_{\phi0}, v_{z0})$ . Предположим, что жидкость вне пограничного слоя не вращается  $v_{\phi0} = 0$ .

Решение задачи строится методом пограничного слоя [5]. Введем преобразование растяжения  $s = z/\varepsilon$ . Асимптотические разложения решения задачи при  $\varepsilon \rightarrow 0$  строятся по формулам

$$\begin{aligned} v_r &= v_{r0} + h_{r0} + \varepsilon(v_{r1} + h_{r1}) + \dots, \\ v_\phi &= h_{\phi0} + \varepsilon h_{\phi1} + \dots, \\ v_z &= v_{z0} + \varepsilon(v_{z1} + h_{z1}) + \dots, \\ T &= 1 + \theta_0 + \varepsilon(T_1 + \theta_1) + \dots \end{aligned}$$

Асимптотический ряд для давления строится по аналогии. Функции  $h_{r0}$ ,  $h_{r1}$ ,  $h_{z1}$ ,  $h_{\phi0}$ ,  $h_{\phi1}$ ,  $\theta_0$ ,  $\theta_1$  определены в области пограничного слоя  $D_\Gamma$ , зависят от переменных  $s$ ,  $r$ ,  $\phi$  и исчезают вместе с производными вне  $D_\Gamma$ . Функции  $v_{r0}$ ,  $v_{r1}$ ,  $v_{z0}$ ,  $v_{z1}$ ,  $T_1$  определены как вне, так и внутри области пограничного слоя, зависят от переменных  $r$ ,  $\phi$ ,  $z$  и описывают течение жидкости вне области  $D_\Gamma$ . Функции  $v_{r0}$ ,  $v_{z0}$  описывают течение идеальной жидкости. Асимптотическое разложение окружной компоненты скорости  $v_\phi$  учитывает предположение, что вне области пограничного слоя жидкость не вращается.

Краевая задача для главных членов асимптотических рядов в области  $D_\Gamma$  получается путем применения метода пограничного слоя [5] к системе уравнений движения (1.1) и к соответствующим краевым условиям (1.2). Введем функции  $H_r = h_{r0} + v_{r0}|_\Gamma$  и  $H_z = h_{z1} + v_{z1}|_\Gamma + s\partial v_{z0}/\partial z|_\Gamma$ . Для определения функций  $H_r$ ,  $H_z$ ,  $h_{\phi0}$  выводим систему уравнений пограничного слоя

$$H_r \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{h_{\phi0}}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} + H_z \frac{\partial H_r}{\partial s} - \frac{h_{\phi0}^2}{r} = \frac{\partial^2 H_r}{\partial s^2} + v_{r0} \frac{\partial v_{r0}}{\partial r} \Big|_\Gamma, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{H_r}{r} \frac{\partial(rh_{\phi0})}{\partial r} + \frac{h_{\phi0}}{r} \frac{\partial h_{\phi0}}{\partial \phi} + H_z \frac{\partial h_{\phi0}}{\partial s} &= \frac{\partial^2 h_{\phi0}}{\partial s^2}, \\ \frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial h_{\phi0}}{\partial \phi} + \frac{\partial H_z}{\partial s} &= 0. \end{aligned}$$

Краевые условия приводятся к виду

$$\frac{\partial H_r}{\partial s} = -\frac{\partial t_\Gamma}{\partial r}, \quad \frac{\partial h_{\phi0}}{\partial s} = 0 \quad (s = 0), \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} H_z &= 0 \quad (s = 0), \\ H_r &\rightarrow v_{r0}|_\Gamma, \quad h_{\phi0} \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow -\infty). \end{aligned}$$

По координате  $\phi$  выполняется условие периодичности. Здесь  $t_\Gamma = \alpha(r^2 - 1)$  при  $r < 1$  и  $t_\Gamma = 0$  при  $r \geq 1$ .

Применяя метод пограничного слоя к уравнению теплопроводности в (1.1) и к условиям (1.2) для температуры, приходим к краевой задаче для определения функции  $\theta_0$  в пограничном слое

$$H_r \frac{\partial \theta_0}{\partial r} + \frac{h_{\phi0}}{r} \frac{\partial \theta_0}{\partial \phi} + H_z \frac{\partial \theta_0}{\partial s} = \frac{1}{\text{Pr}} \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial s^2}, \quad (2.3)$$

$$\theta_0 = t_\Gamma \quad (s = 0), \quad \theta_0 \rightarrow 0 \quad (s \rightarrow -\infty).$$

Здесь  $\text{Pr}$  — число Прандтля.

### 3. Незакрученные режимы

Предположим, что на свободной границе вблизи оси  $Oz$  радиальная компонента скорости идеальной жидкости зависит линейно от радиальной координаты  $v_{r0}|_\Gamma = Ur$ , где  $U \geq 0$ . Асимптотические значения компонент поля скорости идеальной жидкости вблизи свободной границы приводятся к виду  $v_{r0} \sim Ur$ ,  $v_{z0} \sim -2Uz$ ,  $v_{\phi0} = 0$ .

Решения краевой задачи (2.1)–(2.2) описывают два типа режимов — вращательные ( $h_{\phi0} \neq 0$ ) и незакрученные ( $h_{\phi0} = 0$ ). Сначала рассмотрим течение жидкости без вращения в осесимметричном случае, представив решение уравнений пограничного слоя в виде

$$\begin{aligned} H_r &= r(\Phi'(\eta) + U), \\ h_{\phi0} &= 0, \quad H_z = 2(\Phi + \eta U). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\eta = -s$ . Последние формулы описывают решение задачи только в окрестности оси  $Oz$  и не переносятся на область вне этой окрестности, где решение может быть продолжено численно.

Функция  $\Phi(\eta)$  определяется из нелинейной краевой задачи

$$\Phi''' = \Phi'^2 + 2U\Phi' - 2\Phi''(\Phi + \eta U), \quad (3.2)$$

$$\Phi(0) = 0, \quad \Phi''(0) = 2\alpha, \quad \Phi'(\infty) = 0.$$

Полученная задача решалась численно методом пристрелки. Для различных значений  $\alpha > 0$  решение задачи (3.2) можно найти, рассчитав решение этой задачи при  $\alpha = 0,5$  и выполнив перерасчет по формулам

$$\begin{aligned} \Phi(\eta) &= \tau^{1/3} \Phi_1(\xi), \quad U = \tau^{2/3} U_1, \\ \xi &= \tau^{1/3} \eta, \quad \tau = 2\alpha. \end{aligned} \quad (3.3)$$

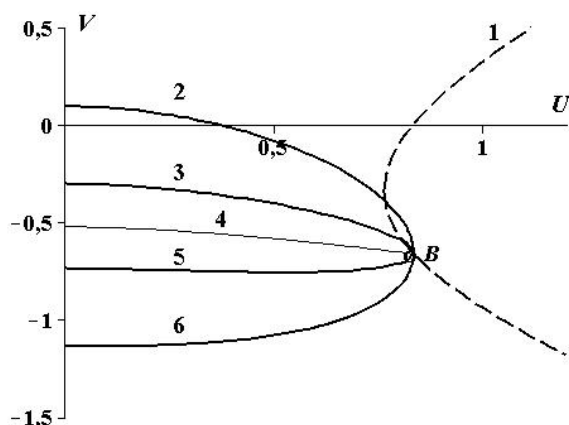


Рис. 1. Зависимость  $V(U)$  на свободной границе при  $\alpha = 0,5$

Здесь функция  $\Phi_1$  и параметр  $U_1$  находятся при решении задачи (3.2) для  $\alpha = 0,5$ .

Обозначим через  $V = U + \Phi'(0)$  параметр, который пропорционален радиальной компоненте скорости вязкой жидкости на свободной границе. На рис. 1 кривая 1 представляет график зависимости параметра  $V$  от амплитуды скорости невязкой жидкости  $U$  на границе  $\Gamma$  при  $\alpha = 0,5$  в случае охлаждения свободной поверхности. Отметим, что режимы течений жидкости без вращения в пограничном слое при  $\alpha > 0$  существуют только, если  $U \geq U_m$ . Численный расчет и формулы (3.3) приводят к формуле  $U_m \approx 1,2145\alpha^{2/3}$ . Значению  $U = U_m$  соответствует крайняя левая точка («вершина») кривой 1. Краевая задача (3.2) при  $U > U_m$  имеет по два различных решения для каждого фиксированного значения  $U$ . Эти решения отличаются формой профиля скорости. Обозначим через  $U_0$  значение параметра  $U$ , при котором  $V(U_0) = 0$ . При  $U \geq U_0$  и  $V \geq 0$  (верхняя часть ветви 1) профиль скорости имеет только зону тока, в которой  $v_r > 0$ . Для остальных точек кривой 1 в профиле скорости имеются зона тока и зона противотока. Отметим, что радиальная компонента вектора скорости изменяется монотонно при удалении от свободной границы и при выходе из области пограничного слоя асимптотически стремится к текущему значению параметра  $U$ .

Функцию  $\theta_0$ , описывающую температуру в пограничном слое в главном приближении для незакрученных режимов, представим в виде суммы  $\theta_0 = r^2\theta_{00}(\eta) + \theta_{01}(\eta)$ . Функции  $\theta_{00}$ ,  $\theta_{01}$  определяются из краевых задач, коэффициенты которых зависят от функции  $\Phi(\eta)$ .

Численный расчет этих задач показывает, что в области пограничного слоя в окрестности оси  $Oz$  функция  $\theta_0$  при удалении от свободной границы монотонно возрастает при  $\alpha > 0$ .

#### 4. Бифуркация решений

Незакрученные режимы при охлаждении свободной границы  $\alpha > 0$  отсутствуют при значениях параметра  $U$ , удовлетворяющих неравенству  $U < U_m$ . Однако в этом случае существуют решения задачи (2.1)–(2.2), которые представляют собой вращательные режимы течений жидкости в пограничном слое. Такие вращательные режимы ответвляются в пограничном слое в точках бифуркации от незакрученных режимов (3.1). Точки бифуркации находятся путем решения краевой задачи на собственные значения, которая получается линейризацией задачи (2.1)–(2.2) вблизи невращательных осесимметричных режимов (3.1). У собственных функций линейризованной задачи отделим радиальную координату  $r$  и представим эти функции в виде  $H_r = rH_{rc}(\eta, \phi)$ ,  $h_{\phi 0} = rh_{\phi c}(\eta, \phi)$ ,  $H_z = H_{zc}(\eta, \phi)$ . Приведем линейризованную задачу для определения неизвестных функций  $H_{rc}$ ,  $h_{\phi c}$ ,  $H_{zc}$  и собственных значений параметра  $U$

$$\frac{\partial^2 H_{rc}}{\partial \eta^2} = L_0 H_{rc} - \Phi''(\eta) H_{zc}, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 h_{\phi c}}{\partial \eta^2} = L_0 h_{\phi c}, \quad \frac{\partial H_{zc}}{\partial \eta} = 2H_{rc} + \frac{\partial h_{\phi c}}{\partial \phi},$$

$$\frac{\partial H_{rc}}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial h_{\phi c}}{\partial \eta} = 0, \quad H_{zc} = 0 \quad (\eta = 0);$$

$$H_{rc} = 0, \quad h_{\phi c} = 0 \quad (\eta = \infty).$$

По переменной  $\phi$  выполняется условие периодичности. Оператор  $L_0$  определяется формулой

$$L_0 = 2(\Phi' + U)E - 2(\Phi + \eta U)\partial/\partial\eta.$$

Здесь  $E$  — единичный оператор.

Используя разделение переменных, решение задачи (4.1) представим в виде

$$H_{rc} = u_c(\eta)f'(\phi), h_{\phi c} = v_c(\eta)f(\phi),$$

$$H_{zc} = w_c(\eta)f'(\phi).$$

Здесь  $f(\phi)$  — произвольная периодическая функция.

Функции  $u_c, v_c, w_c$  и собственное число  $U$  находятся из краевой задачи

$$u_c'' = L_0 u_c - \Phi'' w_c,$$

$$v_c'' = L_0 v_c, \quad w_c' = 2u_c + v_c,$$

$$u_c'(0) = 0, \quad v_c'(0) = 0, \quad w_c(0) = 0,$$

$$u_c(\infty) = 0, \quad v_c(\infty) = 0.$$

Полученная задача решалась численно. Рассчитана ветвь простых собственных значений  $U = U_* \approx 1,3262\alpha^{2/3}$ . Собственное решение получено в виде  $v_c = c_0 g_*(\eta)$ ,  $u_c = -0,5c_0 g_*(\eta)$ ,  $w_c = 0$ . Здесь  $c_0$  — произвольная постоянная, не равная нулю. Функция  $g_*$  удовлетворяет условию нормировки  $g_*(0) = 1$  и определяется из краевой задачи  $g_*'' = L_0 g_*$ ,  $g_*'(0) = g_*(\infty) = 0$ . При этом функция  $g_*(\eta)$  монотонно убывает от единицы до нуля на полуоси  $[0, \infty)$ . При  $U = U_*$  собственное решение задачи (4.1) представим по формулам  $H_{rc} = -0,5g_*(\eta)f'(\phi)$ ,  $h_{\phi c} = g_*(\eta)f(\phi)$  и  $H_{zc} = 0$ . Постоянная  $c_0$  включена в функцию  $f(\phi)$ . Отметим, что функция  $f(\phi)$  не определяется из условий задачи (4.1). В случае осевой симметрии  $f(\phi) \equiv \text{const}$ , поэтому собственное решение принимает вид  $h_{\phi c} = c_1 g_*(\eta)$ ,  $H_{rc} = H_{zc} = 0$ , где  $c_1 = \text{const}$ .

Задача для уравнения теплопроводности в пограничном слое (2.3) для функции  $\theta_0$  линеаризуется вблизи невращательных режимов (3.1). Собственную функцию представим в виде  $\theta_{0c} = r^2\theta_{1c} + \theta_{2c}$ . Краевая задача для функций  $\theta_{1c}, \theta_{2c}$  при  $U = U_*$  имеет единственное решение  $\theta_{1c} = \theta_{2c} = 0$ .

Краевая задача для уравнений пограничного слоя (2.1)–(2.2) кроме незакрученных

режимов имеет вращательные как осесимметричные, так и несимметричные режимы. Осесимметричные режимы представим в виде

$$H_r = r(F'(\eta) + U), \quad h_{\phi 0} = rG(\eta),$$

$$H_z = 2(F + \eta U).$$

Функции  $F(\eta), G(\eta)$  определяются из краевой задачи

$$F''' = F'^2 + 2UF' - 2F''(F + \eta U) - G^2, \quad (4.2)$$

$$G'' = 2(F' + U)G - 2(F + \eta U)G',$$

$$F(0) = 0, \quad F''(0) = 2\alpha, \quad G'(0) = 0,$$

$$F'(\infty) = 0, \quad G(\infty) = 0.$$

Краевая задача (4.2) решалась численно. При  $G = 0$  эта задача совпадает с задачей (3.2) и ее решение описывает незакрученное течение жидкости. Для  $G \neq 0$ ,  $\alpha > 0$  и  $U < U_*$  при каждом фиксированном значении  $U$  найдено по паре осесимметричных решений, которые описывают вращательные режимы, отличающиеся между собой только направлением вращения. Эти режимы ответвляются от незакрученных режимов в точке бифуркации  $U = U_*$ . На рис. 1 кривая 4 изображает поведение амплитуды радиальной компоненты скорости для осесимметричных вращательных режимов на свободной границе в зависимости от параметра  $U$  при  $\alpha = 0,5$ . Точка  $B$  — точка бифуркации. Окружная компонента скорости в главном приближении  $h_{\phi 0}$  монотонно убывает внутри пограничного слоя  $D_\Gamma$  при удалении от свободной границы и стремится к нулю при выходе из  $D_\Gamma$ .

Несимметричные вращательные режимы, которые ответвляются от незакрученных режимов в точке бифуркации  $U = U_*$ , представим в виде

$$H_r = r u_r(\eta, \phi), h_{\phi 0} = r u_\phi(\eta, \phi), H_z = u_z(\eta, \phi).$$

Функции  $H_r, h_{\phi 0}, H_z$  удовлетворяют краевой задаче (2.1)–(2.2) при  $s = -\eta$ . Решение этой задачи строится в виде рядов Фурье по координате  $\phi$ . Анализ краевых задач для коэффициентов Фурье показал, что существует точное решение, для которого эти ряды обрываются и содержат только конечное число слагаемых, состоящих из нулевой и второй гармоник по координате  $\phi$

$$u_r = u(\eta) + v(\eta)(\alpha_0 \sin 2\phi + \beta_0 \cos 2\phi), \quad (4.3)$$

$$u_\phi = v(\eta)(1 - \beta_0 \sin 2\phi + \alpha_0 \cos 2\phi),$$

$$u_z = w(\eta).$$

Здесь  $\alpha_0, \beta_0$  параметры.

Коэффициенты  $u, v, w$  решения (4.3) определяются из краевой задачи

$$u'' = u^2 - u'w + (\alpha_0^2 + \beta_0^2 - 1)v^2 - U^2, \quad (4.4)$$

$$v'' = 2uv - v'w, \quad w' = 2u,$$

$$u' = 2\alpha, \quad v' = 0, \quad w = 0 \quad (\eta = 0);$$

$$u = U, \quad v = 0 \quad (\eta = \infty).$$

Краевая задача (4.4) решалась численно. Отметим, что при  $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \geq 1$  решения отсутствуют. На рис. 1 кривые 2 и 6 изображают зависимость  $V(U)$  при  $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0,2$  и  $\alpha = 0,5$  для двух вращательных режимов с противоположным направлением вращения. Кривым 3 и 5 соответствуют параметры  $\alpha_0 = 0, \beta_0 = 0,5$  и  $\alpha = 0,5$ . Формулы (4.3) представляет собой двухпараметрическое семейство решений, содержащее произвольные параметры  $\alpha_0, \beta_0$ , удовлетворяющие условию  $\alpha_0^2 + \beta_0^2 < 1$ . Таким образом, из точки бифуркации ответвляются два семейства вторичных вращательных режимов. При  $\alpha_0 = \beta_0 = 0$  существуют два частных режима, отличающиеся между собой только направлением вращения и обладающие осевой симметрией. Остальные режимы несимметричны и определяются различными значениями параметров  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ , которые заполняют круг единичного радиуса.

Вторичные режимы для температуры представим в виде

$$\theta_\phi = r^2\theta_a(\eta, \phi) + \theta_b(\eta).$$

Функция  $\theta_a$  содержит гармоники нулевого и второго порядков

$$\theta_a = \theta_{a1}(\eta) + \theta_{a2}(\eta) \sin 2\phi + \theta_{a3}(\eta) \cos 2\phi.$$

Для осесимметричных режимов  $\theta_{a2} = \theta_{a3} = 0$ . Функции  $\theta_{a1}, \theta_{a2}, \theta_{a3}, \theta_b$  содержат параметры  $\alpha_0$  и  $\beta_0$ . Краевые задачи для этих функций решены численно. Для различных значений параметров  $\alpha_0$  и  $\beta_0$  из точки бифуркации  $U = U_*$  от решения  $\theta_0 = r^2\theta_{00}(\eta) + \theta_{01}(\eta)$  ответвляется двухпараметрическое семейство решений  $\theta_\phi(r, \phi, \eta)$ , описывающее распределение температуры вращающейся жидкости в пограничном слое.

Отметим, что ответвление бесконечного числа вторичных режимов, зависящих от произвольного параметра, не определяемого из краевых условий, рассмотрено в задаче о конвекции жидкости в пористой среде [6].

## Заключение

В работе показано, что в случае локального охлаждения горизонтальной свободной поверхности однородной жидкости возникает бифуркация в пограничном слое вблизи этой поверхности. В результате бифуркации появляются вращательные режимы течений жидкости в пограничном слое. В случае осевой симметрии возникают два закрученных режима, которые однозначно определяются постановкой задачи. Однако при отсутствии этой симметрии возникает семейство вращательных режимов, зависящих от двух дополнительных параметров.

## Литература

1. *Napolitano L.G.* Marangoni boundary layers // Proceedings III European Symposium on Material Science in Space. Grenoble. 24-27 April 1979. ESA SP-142. Paris. 1979. P. 313-315.
2. *Пухначев В.В.* Групповой анализ уравнений нестационарного пограничного слоя Маранго-ни // Доклады АН СССР. 1984. Т. 279. № 5. С. 1061-1064.
3. *Batishchev V.A., Getman V.A.* The onset of fluid rotation in a thermogravitational boundary layer with local cooling of the free surface // Fluid Dynamics. 2018. Vol. 53. Iss. 4. P. 500-509. DOI: 10.1134/S0015462818040031
4. *Шкадов В.Я.* К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 3. С. 133-137.
5. *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук. 1957. Т. 12. № 5. С. 3-122.
6. *Любимов Д.В.* О конвективных движениях в пористой среде, подогреваемой снизу // Прикладная механика и техническая физика. 1975. № 2. С. 131-137.

## References

1. *Napolitano, L.G.* Marangoni boundary layers. *Proc. III European European Symposium on Material Science in Space. Grenoble. 24-27 April 1979. ESA SP-142.* Paris. 1979. P. 313-315.
2. *Pucknachev, V.V.* Gruppovoy analiz uravneniy nestacionarnogo pogranichnogo sloya [Group analysis of equations of non-stationary boundary layer]. *Doklady akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1984, vol. 279, no. 5, pp. 1061-1064. (In Russian)
3. *Batishchev, V.A., Getman, V.A.* The onset of fluid rotation in a thermogravitational bound-

- ary layer with local cooling of the free surface // Fluid Dynamics, 2018, vol. 53, no. 4, pp. 500–509. DOI: 10.1134/S0015462818040031
4. Shkadov, V.Y. К образованию волн на поверхности вязкой тяжелой жидкости под действием касательного напряжения [To the formation of waves on the surface of a viscous heavy fluid under the action of shear stress]. *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Proc. of the USSR Academy of Sciences. Fluid and gas mechanics], 1970, no. 3, pp. 133–137. (In Russian)
  5. Vishik, M.I., Lyusternik, L.A. Regularnoe vyroghdenie i pogranichniy sloy dlya lineinykh differentsialnykh uravneniy s malim parametrom [Regular degeneracy and a boundary layer for linear differential equations with a small parameter]. *Yspekhi matematicheskikh nauk* [Advances in mathematical sciences], 1957, vol. 12, no. 5, pp. 3–122. (In Russian)
  6. Lyubimov, D.V. O konvektivnykh dvizheniyakh v poristoy srede podogrevaemoy snizu [On convective motions in a porous medium heated from below]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied mechanics and technical physics], 1975, no. 2, pp. 131–137. (In Russian)

---

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2020

© Батищев В. А., 2020

Статья поступила 13 февраля 2020 г.