Механика

УДК 539.3

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ РАСЧЕТА КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ В ЛИТОСФЕРНЫХ ПЛИТАХ[1]

В. А. Бабешко[2], *О. М. Бабешко*[3]

ABOUT ONE MODEL FOR CALCULATING STRESS CONCENTRATION IN LITHOSPHERE PLATES

Babeshko V. A., Babeshko O. M.

The work offers a model for calculating stress concentration in interacting lithosphere plates. On a fine scale, lithosphere plates are modeled by nonlinear shell equations. On a large scale, zones are defined, which contain inhomogeneities, i.e. viruses of vibration strength. These inhomogeneities are studied in terms of the corresponding theory. The case of two interacting half-infinite lithosphere plates is considered. Correlations necessary for calculations are derived. The convenience of the model assumed lies in the possibility to continue studying the problem of plates' stability loss.

1. Современная геология дает представление о литосферных плитах как о механических деформируемых объектах плитообразной формы, взаимодействующих между собой по границам сквозных разломов [1]. В том случае, если разлом или совокупность разломов не являются сквозными — такие неоднородности относятся к вирусам вибропрочности [2].

Поэтому будем рассматривать проблему взаимодействия литосферных плит как контактирующих разделенных деформируемых плит, расположенных на деформируемом основании, аналогично смешанным задачам теории упругости [3].

Причиной для такого рассмотрения является установленное медленное движение литосферных плит, а также сейсмическая активность именно зон сквозного разлома [4].

Направления перемещения литосферных плит могут быть произвольными. Они могут расходиться, двигаться перпендикулярно поверхности Земли, могут надвигаться одна на другую. Последний случай является наиболее общим и сложным, объемлющим остальные. А именно, в случае надвигания литосферных плит при достаточно малых перемещениях будет происходить процесс деформации литосферных плит в их плоскости без заметного изменения их положения по отношению к поверхности Земли. Это так называемая докритическая деформация литосферных плит [5, 6]. По достижении некоторых критических значений параметров, в частности, сжимающих усилий, положение плит мо-

[1] Работа выполнена при поддержке РФФИ (03-01-00694), при поддержке администрации Краснодарского края и РФФИ р2003юг (03-01-96537, 03-01-96527, 03-01-96519, 03-01-96584), гранта Президента РФ (НШ-2107.2003), ФЦНТП (РИ-112/001/301), программ отделения ЭММПУ и Президиума РАН, выполняемых Южным научным центром РАН.

[2] Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, директор НИИ проблем механики и геоэкологии, ректор Кубанского государственного университета.

[3] Бабешко Ольга Мефодиевна, канд. хим. наук, заведующая отделом Государственного научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф при Кубанском государственном университете.

жет измениться, их части могут покинуть плоскость первоначального положения. Математически это выражается в потере устойчивости и «ветвлении решений» краевой задачи [5]. Именно так формируются горы.

Такого рода перемещения называются потерей устойчивости плит, что математически описывается ветвлением решений. Для математического описания таких явлений необходимо рассматривать литосферные плиты геометрически нелинейными. Заметим, что для оценки нарастания концентрации напряжений достаточно ограничиться линеаризованными уравнениями. Они же служат и для нахождения критических параметров задачи [5]. Таким образом, если задача состоит в определении концентрации напряжений литосферных плит и в отыскании критических значений параметров, при которых литосферные плиты начнуть терять устойчивость, можно ограничиться линеаризованными уравнениями [5]. Если же стоит вопрос о выяснении параметров перемещения литосферной плиты после потери устойчивости, то необходим анализ нелинейной задачи. Нужно также заметить, что потеря устойчивости — изгиб плит — вызывает снижение продольных напряжений в плите, но в то же время приводит к поперечным смещениям.

2. Построим интегральные уравнения напряженно-деформированного состояния системы: взаимодействующие литосферные плиты — деформируемое основание.

В соответствии с вышеотмеченным примем для описания поведения литосферных плит, расположенных на деформируемом основании, нелинейные уравнения оболочек в перемещениях, построенные в [6]. Для каждой из оболочек в областях Ω_k, $k=1,2$, они имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_1^2}{\partial x_1}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1\partial x_2}-\\ -\left(k_{x_1}+\mu k_{x_2}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+n_1(\mathbf{u})+\\ +\frac{1-\mu^2}{Eh}(q_1+t_1)-\frac{\gamma}{g}\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=0, \quad (1)$$

$$\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}-\\ -\left(\mu k_{x_1}+k_{x_2}\right)\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+n_2(\mathbf{u})+\\ +\frac{1-\mu^2}{Eh}(q_2+t_2)-\frac{\gamma}{g}\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}=0, \quad (2)$$

$$\frac{h^2}{12}\nabla^4 u_3-\left(k_{x_1}+\mu k_{x_2}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\left(\mu k_{x_1}+k_{x_2}\right)\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\\ +\left(k_{x_1}^2+k_{x_2}^2+2\mu k_{x_1}k_{x_2}\right)u_3+n_3(\mathbf{u})-\\ -\frac{1-\mu^2}{Eh}(q_3+t_3)+\frac{\gamma}{g}\frac{1-\mu^2}{E}\frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}=0. \quad (3)$$

Здесь

$$\nabla^4=\nabla^2\nabla^2=\frac{\partial^4}{\partial x_1^4}+2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\frac{\partial^4}{\partial x_2^4},$$

$$n_1(\mathbf{u})=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_2}+\\ +\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2},$$

$$n_2(\mathbf{u})=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1\partial x_2}+\\ +\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2},$$

$$n_3(\mathbf{u})=\frac{k_{x_1}+\mu k_{x_2}}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2-\\ -\frac{k_{x_2}+\mu k_{x_1}}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)^2-\\ -\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\left(k_{x_1}+\mu k_{x_2}\right)u_3\right]+\right.\\ \left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\right\}-\\ -\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\left[\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}-\left(\mu k_{x_1}+k_{x_2}\right)u_3\right]+\right.\\ \left.+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\right\},$$

$$\mathbf{u}=\{u_1,u_2,u_3\},\quad \mathbf{n}(u)=\{n_1(\mathbf{u}),n_2(\mathbf{u}),n_3(\mathbf{u})\},\\ \mathbf{q}=\{q_1,q_2,q_3\},\quad \mathbf{t}=\{t_1,t_2,t_3\}.$$

$\mathbf{q}$ — вектор усилий, действующих на нижнюю границу литосферной плиты, и $\mathbf{t}$ — воздействий сверху соответственно.

Граничные условия для случая шарнирного опирания или большого трения в зоне контакта имеют вид

$$M_{x_1} = -D\left(\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2}\right) = 0.$$

Для случая, когда краям литосферных плит разрешается свободно смещаться вдоль оси x_3, граничные условия описываются выражениями

$$Q_{x_1} + \frac{\partial H}{\partial x_2} + N_{x_1}\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + T\frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0,$$

$$Q_{x_1} = -D\frac{\partial}{\partial x_1}\nabla^2 u_3,$$

$$H = -D\,(1-\mu)\,\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$N_{x_1} = \frac{Eh}{1-\mu^2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - k_{x_1}\omega + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right] + \\ + \mu\left[\frac{\partial u_2}{\partial x_2} - k_{x_2}u_3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2\right],$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$T = \frac{Eh}{2\,(1+\mu)}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right),$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}.$$

Здесь приняты обозначения: E — модуль упругости, μ — модуль сдвига материалов плит; перемещение точек плиты по главным направлениям срединной поверхности — u_1, u_2 и по нормали — u_3; k_{x_1}, k_{x_2} — кривизны по осям x_1, x_2 соответственно.

Будучи линеаризованными, они имеют тот же вид, с опущенными компонентами нелинейного вектора $\mathbf{n}(\mathbf{u})$. В дальнейшем ограничимся случаем горизонтальных литосферных плит с плоскими границами, лежащих на деформируемом основании. В этом случае кривизны k_{x_1}, k_{x_2} по осям исчезают.

В качестве деформируемого основания, на котором находятся литосферные плиты, можно рассматривать различные модели: деформируемое полупространство, слой, многослойное полупространство, в том числе анизотропное, вязко-упругие среды. Во всех перечисленных случаях соотношения между напряжениями на поверхности среды q_k и перемещениями u_k, $k = 1, 2, 3$, имеют вид [7, 8]

$$u_k(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{s=1}^{3} R_{ks}(\alpha_1, \alpha_2, x_3) Q_s \times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2, \quad (4)$$

$$Q_s(\alpha_1, \alpha_2) = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} q_s(x_1, x_2) e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\, dx_1\, dx_2$$

или в матричной форме

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2) \times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2,$$

$$\mathbf{R} = \|R_{mn}\|, \quad m, n = 1, 2, 3.$$

$R_{ks}(\alpha_1, \alpha_2, x_3)$ — аналитические функции двух комплексных переменных α_k, в частности, мероморфные.

Эти соотношения имеют аналогичный вид в плоском случае x_2, x_3, с той разницей, что $m, n = 2, 3$.

Их выражения для различных типов деформируемых оснований даются в [7, 8] и др. Эти соотношения называются функциями влияния. В тех случаях, когда известны уравнения, описывающие поведение среды (основания), элементы матрицы-функции $\mathbf{R}$ удается вычислить. Если такие уравнения отсутствуют, то функции влияния могут быть получены экспериментально.

Введем в рассмотрение дифференциальный оператор вида

$$\mathbf{L}_3(\partial x_1, \partial x_2) = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{33} \end{pmatrix},$$

$$l_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad l_{22} = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$

$$l_{12} = l_{21} = \varepsilon_2\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$l_{33} = \varepsilon_3 \left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \right).$$

$$\varepsilon_1 = 0,5(1-\mu), \quad \varepsilon_2 = 0,5(1+\mu), \quad \varepsilon_3 = \frac{h^2}{12}.$$

Ему соответствует следующая характеристическая матрица-функция:

$$-\mathbf{L}_3(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \\ = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_3(\alpha_1, \alpha_2),$$

$$d_{11} = -\alpha_1^2 - \varepsilon_1\alpha_2^2, \quad d_{12} = d_{21} = -\varepsilon_2\alpha_1\alpha_2,$$

$$d_{22} = -\alpha_2^2 - \varepsilon_1\alpha_1^2, \quad d_{33} = \varepsilon_3(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2.$$

Определитель ее имеет вид

$$\Delta_3 = \Delta_1(\alpha_1^2 + \alpha_2^2)^2\varepsilon_3,$$

$$\Delta_1 = \varepsilon_1(\alpha_1^4 + \alpha_2^4) + 2\varepsilon_1\alpha_1^2\alpha_2^2.$$

Обратной матрицей является

$$-\mathbf{L}_3^{-1}(-i\alpha_1, -i\alpha_2) = \\ = \begin{pmatrix} d_{22}\Delta_1^{-1} & -d_{12}\Delta_1^{-1} & 0 \\ -d_{21}\Delta_1^{-1} & d_{11}\Delta_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_1\Delta_3^{-1} \end{pmatrix}.$$

Аналогично введем такие же матрицы-функции для двумерных задач

$$\mathbf{L}_2(\partial x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} & 0 \\ 0 & \varepsilon_3\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} \end{pmatrix},$$

$$-\mathbf{L}_2(-i\alpha_2) = \begin{pmatrix} -\alpha_2^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3\alpha_2^4 \end{pmatrix} = \mathbf{D}_2(\alpha_2),$$

$$-\mathbf{L}_2^{-1}(-i\alpha_2) = \begin{pmatrix} -\alpha_2^{-2} & 0 \\ 0 & \varepsilon_3^{-1}\alpha_2^{-4} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_2 = -\varepsilon_3\alpha_2^6,$$

С использованием этих операторов дифференциальные уравнения нелинейной теории оболочек можно записать для трехмерного и двумерного случаев в виде

$$\mathbf{L}_3(\partial x_1, \partial x_2)\mathbf{u} = \mathbf{E}_3(\mathbf{q} + \mathbf{t}) - \mathbf{n}(\mathbf{u}),$$

$$\mathbf{E}_3 = \frac{1-\mu^2}{Eh}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{L}_2(\partial x_2)\mathbf{u} = \mathbf{E}_2(\mathbf{q} + \mathbf{t}) - \mathbf{n}(\mathbf{u}).$$

Найдя указанные выше напряжения $\mathbf{q}$ под литосферными плитами, можем вычислить перемещения различных точек литосферных плит.

Внося выражение для перемещений (4) в нелинейные уравнения плит (1)–(3), приходим к нелинейным интегральным уравнениям для определения возникающих под пластиной контактных напряжений вида

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int [\mathbf{D}_s(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, 0) - \mathbf{E}_s]\mathbf{Q}\times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 = \\ = \mathbf{E}_s\mathbf{t} - \mathbf{n}_*(x_1, x_2, \mathbf{Q}) \equiv \mathbf{p}(x_1, x_2), \quad (5)$$

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3).$$

$\mathbf{n}_*(x_1, x_2, \mathbf{Q})$ — вектор, в котором осуществлена замена (4), нелинейно зависящий от компонент вектора $\mathbf{Q}$.

Преобразуем систему следующим образом.

Примем во внимание, что имеют место асимптотические оценки

$$\mathbf{R}(\alpha_1, \alpha_2, 0) = \mathbf{O}(A^{-1}),$$

$$\mathbf{D}_s(\alpha_1, \alpha_2) = \mathbf{O}(A^4), \quad A = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

Введем в рассмотрение дифференциальные операторы соответственно в трехмерном и двумерном случаях вида

$$\mathbf{M}_3(\partial x_1, \partial x_2)\boldsymbol{\nu} = (\Delta + b_1)(\Delta + b_2)\mathbf{I}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{g},$$

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \mathbf{g} = (g_1, g_2, g_3),$$

$$\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = \mathbf{f}_1, \quad \left.\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \mathbf{f}_2, \quad (6)$$

$$\mathbf{f}_s = (f_{1s}, f_{2s}, f_{3s}),$$

$$\mathbf{M}_2(\partial x_2)\boldsymbol{\nu} = \\ = \left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + b_1\right)\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + b_2\right)\mathbf{I}\boldsymbol{\nu} = \mathbf{g},$$

$$\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2), \quad \mathbf{g} = (g_2, g_3),$$

$$\boldsymbol{\nu}|_{\partial\Omega} = \mathbf{f}_1, \quad \left.\frac{\partial\boldsymbol{\nu}}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = \mathbf{f}_2, \quad \mathbf{f} = (f_{2s}, f_{3s}).$$

n — внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа, b_1, b_2 — некоторые постоянные, $\mathbf{I}$ — единичная матрица.

Тогда методом факторизации строится обратный оператор, позволяющий представить решение краевой задачи в форме

$$\mathbf{u} = \mathbf{M}_3^{-1}\mathbf{g} + \mathbf{m}_1^{-1}\mathbf{f}_1 + \mathbf{m}_2^{-1}\mathbf{f}_2.$$

Здесь $\mathbf{M}^{-1}$, $\mathbf{m}^{-1}$ — линейные, ограниченные в L_1 операторы, общее представление которых было получено в [9, 10].

Применяя оператор $\mathbf{M}^{-1}$ к (5), приходим к системе интегральных уравнений

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{K}_s\mathbf{Q}e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}\,d\alpha_1\,d\alpha_2 = \mathbf{p}^*,$$

$$\mathbf{K}_s = -\mathbf{M}_s^{-1}\left(-i\alpha_1, -i\alpha_2\right)\left(\mathbf{D}_s\mathbf{R} - \mathbf{E}_s\right), \quad (7)$$

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{M}_s^{-1}\mathbf{t} - \mathbf{M}^{-1}\mathbf{n}\left(\mathbf{q}\right) + \mathbf{m}_1^{-1}\mathbf{f}_1 + \mathbf{m}_1^{-1}f_2.$$

Элементы матрицы-функции символа ядра интегрального уравнения (7) убывают на бесконечности как A^{-1}. Аналогично в двумерном случае.

При некоторых значениях напряжений может возникнуть ситуация, при которой пластины потеряют устойчивость, т. е. начнется ветвление решений. Другими словами, при некоторых значениях параметров возможно существование нескольких решений.

Значения параметров, при которых последнее имеет место, называются бифуркационными. Для их нахождения линеаризуем систему интегральных уравнений.

2. Запишем систему (7) для каждой плиты в отдельности

$$\int\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_1\mathbf{Q}e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}\,d\alpha_1\,d\alpha_2 = \\ = \mathbf{p}_1^*\left(x_1, x_2\right),$$

$$(x_1, x_2) \in \Omega_1,$$

$$\int\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_2\mathbf{Q}e^{-i(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2)}\,d\alpha_1\,d\alpha_2 = \\ = \mathbf{p}_2^*(x_1, x_2),$$

$$(x_1, x_2) \in \Omega_2,$$

$$\mathbf{p}_1^* = \mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{p}_1, \quad \mathbf{p}_2^* = \mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{p}_2.$$

Последние функции зависят от f_{sk}.

В общем случае интегральные уравнения необходимо исследовать методом факторизации, применяемым для изучения вирусов вибропрочности. В связи с тем, что литосферные плиты имеют большую протяженность, изучим случай контакта полуограниченных плит. Именно, будем считать, что Ω_1 и Ω_2 — полуплоскости

$$\Omega_1 : x_2 \leqslant \infty, \quad |x_1| \leqslant \infty,$$

$$\Omega_2 : x_2 \geqslant \infty, \quad |x_1| \leqslant \infty.$$

Будем рассматривать два типа задач. Первый связан с расчетом напряженно-деформированного состояния литосферных плит, подверженных внешним воздействиям в предположении, что плита не теряет устойчивость. Второй случай связан с изучением ситуации, при которой плита теряет устойчивость. В последнем случае возникают несколько положений равновесия литосферной плиты, могут начаться выпучивания ее отдельных участков.

Исходя из этого, представим интегральные уравнения, предварительно применив преобразование Фурье по x_1 в форме

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_1(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2 x_2}\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)\,d\alpha_2 = \\ = \mathbf{p}_{1*}^*(\alpha_1, x_2), \quad (8)$$

$$-\infty \leqslant x_2 < 0,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{K}_2(\alpha_1, \alpha_2)e^{-i\alpha_2 x_2}\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)\,d\alpha_2 = \\ = \mathbf{p}_{2*}^*(\alpha_1, x_2), \quad (9)$$

$$0 \leqslant x_2 < \infty.$$

Продолжив правую часть уравнения (8) в область $x_2 > 0$ вектор-функцией $\mathbf{R}_1^-(\alpha_1, x_2)$, а уравнения (9) — вектор-функцией $\mathbf{R}_2^+(\alpha_1, x_2)$ в область $x_2 < 0$ и применив к ним интегральное преобразование Фурье по x_2, приходим к системе функциональных уравнений вида

$$K_{1*}\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{1*}^+\left(\alpha_1, \alpha_2\right) + \mathbf{R}_1^-\left(\alpha_1, \alpha_2\right),$$

$$K_{2*}\mathbf{Q} = \mathbf{P}_{2*}^-\left(\alpha_1, \alpha_2\right) + \mathbf{R}_2^+\left(\alpha_1, \alpha_2\right).$$

Исключая из этих соотношений $\mathbf{Q}$, получим

$$\mathbf{K}_{1*}^{-1}\left[\mathbf{P}_{1*}^+ + \mathbf{R}_1^-\right] = \mathbf{K}_{2*}^{-1}\left[\mathbf{P}_{2*}^- + \mathbf{R}_2^+\right].$$

Отсюда имеем

$$\mathbf{M}\mathbf{R}_2^+ = \mathbf{R}_1^- + \mathbf{P}_{1*}^+ - \mathbf{K}_{1*}\mathbf{K}_{2*}^{-1}\mathbf{P}_{2*}^-,$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}_{1*}\mathbf{K}_{2*}^{-1}.$$

Матрица-функция второго порядка $\mathbf{M}$, зависящая от двух комплексных переменных α_1, α_2, предполагается мероморфной. В противном случае ее можно аппроксимировать мероморфной матрицей-функцией.

Осуществим факторизацию по параметру α_2 этой матрицы-функции слева, используя формулы факторизации [11] в виде

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_-\mathbf{M}_+.$$

В результате имеем

$$\mathbf{M}_+\mathbf{R}_2^+ = \mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{R}_1^- + \mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{P}_{1*}^-\mathbf{M}_+\mathbf{P}_{2*}^-.$$

Осуществив факторизацию выражения справа в виде суммы и группируя регулярные в верхней и нижней полуплоскостях функции, найдем

$$\mathbf{M}_+\mathbf{R}_2^+ - \left\{\mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{P}_{1*}^+\right\}^+ + \left\{\mathbf{M}_+\mathbf{P}_{2*}^-\right\}^+ = \\ = \mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{R}_1^- + \left\{\mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{P}_{1*}^+\right\}^- - \left\{\mathbf{M}_+\mathbf{P}_{2*}^-\right\}^- \equiv \\ \equiv \mathbf{\Gamma}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Здесь $\mathbf{\Gamma}(\alpha_1, \alpha_2)$ — некоторая целая вектор-функция. Выражение представляет собой аналитическое продолжение через вещественную ось соотношений, регулярных в верхней и нижней полуплоскостях. Все члены соотношений убывают на бесконечности.

В результате целая функция $\mathbf{\Gamma} \equiv 0$.

Отсюда находим неизвестные функции в виде

$$\mathbf{R}_2^+ = \mathbf{M}_+^{-1}\left[\{\mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{P}_{1*}^+\}^+ - \{\mathbf{M}_+\mathbf{P}_{2*}^-\}^+\right],$$

$$\mathbf{R}_1^- = \mathbf{M}_-\left[-\{\mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{P}_1^+\}^- + \{\mathbf{M}_+\mathbf{P}_{2*}^-\}^-\right],$$

Внося их значения в формулы, найдем выражение для $\mathbf{Q}$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}_{2*}^{-1}\mathbf{P}_{2*}^- + \mathbf{K}_{2*}^{-1}\mathbf{M}_+^{-1}\times \\ \times\left[\{\mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{P}_{1*}^+\}^+ - \{\mathbf{M}_+\mathbf{P}_{2*}^-\}^+\right], \quad (10)$$

или

$$\mathbf{Q} = \mathbf{K}_{1*}^{-1}\mathbf{P}_{1*}^+ + \mathbf{K}_{1*}^{-1}\mathbf{M}_-\times \\ \times\left[-\{\mathbf{M}_-^{-1}\mathbf{P}_{1*}^+\}^- + \{\mathbf{M}_+\mathbf{P}_{2*}^-\}^-\right].$$

В обоих равенствах справа находится одно и то же выражение. В результате несложных преобразований одна из его форм переходит в другую.

Таким образом, для перемещений получили представление вида (4) с использованием формул (10).

Остается определить искомые граничные функции. Применяя к (4) граничные операторы, будем иметь соотношения вида

$$\boldsymbol{\ell}_1\mathbf{u}_1(x_1, 0) \equiv \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{N}_1(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)\boldsymbol{\ell}_1\times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 = 0,$$

$$x_2 = -0,$$

$$\boldsymbol{\ell}_2\mathbf{u}_2(x_1, 0) \equiv \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{N}(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)\boldsymbol{\ell}_2\times \\ \times e^{-i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 = 0,$$

$$x_2 = +0.$$

Из последних формул необходимо найти неизвестные постоянные

$$B_{sn}, \quad s = 1, 2; \quad n = 1, 2, 3, 4.$$

Для их нахождения применим к предыдущим соотношениям преобразование Фурье по параметру x_1, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_1(\alpha_1, \alpha_2)\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2)\boldsymbol{\ell}_1\times \\ \times e^{-i\alpha_2 x_2}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 = 0,$$

$$x_2 \to -0,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{R}_2\,(\alpha_1, \alpha_2)\,\mathbf{Q}\,(\alpha_1, \alpha_2)\,\boldsymbol{\ell}_2\times \\ \times e^{-i\alpha_2 x_2}\, d\alpha_1\, d\alpha_2 = 0,$$

$$x_2 \to +0.$$

Из этой системы найдем неизвестные постоянные, затем определим напряженно-деформированное состояние литосферной плиты, как контактирующих пластин, описанных выше. Построив значения поперечных сил, касательных и нормальных усилий в любом сечении пластины, можем теперь анализировать напряженно-деформированное состояние отдельных участков литосферных плит, содержащих неоднородности различного происхождения. К ним относятся, в первую очередь, неоднородности другой природы.

Вырезав прямоугольную плиту, содержащую неоднородности, поставив на ее границах найденные из предыдущей задачи граничные значения, приходим к исследованию задачи теории вирусов вибропрочности, но уже относительно напряженно-деформированного состояния ограниченной плиты с неоднородностями. Решение этой задачи позволяет уточнить напряженно-деформированное состояние в указанной зоне.

Принятая модель достаточно удобна также для постановки и изучения задачи потери устойчивости взаимодействующих литосферных плит и ветвления решений.

Литература

1. *Садовский М. А., Болховитинов Л. Г., Писаренко В. Ф.* Деформирование геофизической среды и сейсмический процесс. М.: Наука, 1987. 104 с.
2. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Метод факторизации в теории вирусов вибропрочности // ДАН. 2003. Т. 393, № 4. С. 473–477.
3. *Александров В. М., Мхитарян С. М.* Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. М.: Наука, 1983. 487 с.
4. *Уланов В. И.* Динамика Земной коры Средней Азии и прогноз землетрясений. Ташкент, ФАН, 1974. 216 с.
5. *Вайнберг М. М.,Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. Наука, 1969. 528 с.
6. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
7. *Ворович И. И., Бабешко В. А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 320 с.
8. *Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 456 с.
9. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* О методе факторизации в краевых задачах для сплошных сред // ДАН. 2004. Т. 399, № 3. С. 315–318.
10. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Исследование краевых задач двойной факторизацией // ДАН. 2005. Т. 403. № 1. С. 20–24.
11. *Бабешко В. А., Бабешко О. М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399. № 1. С. 26–28.

Статья поступила 23 июня 2005 г.
Кубанский государственный университет