Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-1-42-48

К ИССЛЕДОВАНИЮ СОСТОЯНИЯ СИСТЕМЫ МНОЖЕСТВЕННЫХ ШТОЛЕН ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНЫХ И СДВИГОВЫХ НАГРУЗОК

Телятников И. С.

TO THE STUDY OF THE STATE OF THE SYSTEM OF MULTIPLE GALLERIES UNDER THE EFFECT OF NORMAL AND SHEAR STRESSES

I. S. Telyatnikov

Southern scientific center of Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, Russia
e-mail: ilux_t@list.ru

Abstract. The method for studying the boundary value problems modeling multilayer structures with multiple interlayer bulkheads, developed in the works of scientists of the SSC RAS and KubSU, is generalized in this paper to the vector case of a general spatial problem.A complementary approach is presented, allowing analyzing the result of vertical and shearing effectson partitionsof ore formation. As a substrate and a coating layer, we consider homogeneous elastic layers that possess the same physical and mechanical properties but have different thicknesses.The boundary of the coating layer is considered free of stress. Linear static equations for the Kirchhoff plate system are used to describethe state of the ore formation. The block element method used in the work allowed us to reduce the boundary value problem for two elastic layers separated by a plate with a set of parallel linear holes to a system of integral equations of the Fredholm type solvableby the integral factorization method. The described approach can be applied to the study of different-sized block structures on other scales.

Keywords: multilayer structure, Kirchhoff plates, normal and shear stresses, block element method, system of integral equations, integral factorization method.

Введение

При проектировании разработки месторождений и добыче полезных ископаемых подземным способом всегда стоит задача оценки устойчивости пород в выработках. Огромное многообразие инженерно-геологических особенностей подземных горных выработок стимулирует разработку различных подходов, направленных на поддержание их в устойчивом состоянии в период эксплуатации. Решению данной проблемы посвящены многочисленные инженерные исследования [1–4]. Однако создание теории устойчивости подземных выработок требует многостороннего изучения напряженно-деформированного состояния разрабатываемого массива и новых подходов и методов, позволяющих описывать и анализировать его особенности. Разработка таких методов — чрезвычайно важная задача для мониторинга структур и конструкций подобного вида. Сложность проблемы определяется наличием многих факторов, влияющих на прочностные свойства подземного сооружения, содержащего множество параллельных штолен и перегородок разной ширины, причем свойства материала перегородок могут изменяться. Система подвержена воздействию внутренних статических и динамических нагрузок, связанных с изменением размеров штолен в процессе производственной деятельности. Происходит перераспределение напряжений на перегородках, а также изменяется отвисание кровли штолен. Может иметь место медленное движение литосферных структур коры Земли, а также периодические приливные воздействия Луны, обычно не учитываемые.

Работы [5–7] представляют новый подход к решению проблемы оценки прочностных характеристик сооружений, включающих элементы типа межслойных переборок. Каждая из этих работ посвящена той или иной стороне исследования напряженно-деформированного состояния различных зон сооружения. Однако рассматриваются скалярные задачи, описывающие поведение пла-

Телятников Илья Сергеевич, канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник лаборатории математики и механики Южного научного центра РАН; e-mail: ilux_t@list.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках ГЗ ЮНЦ РАН, проект № 01201354241 и при частичной поддержке РФФИ (проекты 18-05-80008, 18-01-00124).

ста под воздействием вертикальных нагрузок. Следует особо выделить работу [6], которая представляет метод, позволяющий оценивать характеристики и штолен, и перегородок одновременно для произвольного их числа, и является пионерской в данной области.

В настоящей работе кратко излагается дополняющий подход, позволяющий охватить и векторный пространственный случай задачи.

1. Постановка задачи

При постановке задачи в векторном случае кратко дадим обобщение скалярных постановок задач [5–7]. Вскрытый системой протяженных параллельных подземных штолен пласт породы толщиной h моделируется совокупностью пластин Кирхгофа между деформируемыми слоями (толщина верхнего H_1, нижнего — H_2), для которых могут приниматься модели основания Винклера, линейно упругой среды [7] и более сложные модели, учитывающие пространственный характер процессов, происходящих в деформируемом основании. Считается, что $h \ll H_k$ $(k = 1, 2)$.

Пусть координатная плоскость x_1Ox_2 расположена с общей срединной плоскости моделирующих рудный пласт пластин. При этом N протяженных штолен, вскрывающих пласт, располагаются параллельно оси Ox_1. Ось Ox_3 перпендикулярна срединной плоскости пластин.

Для исследования напряженно-деформированного состояния породного массива, вмещающего горные выработки, последний моделируется блочной структурой, состоящей из разноразмерных блоков. В работе [5] представлен способ сведения скалярной краевой задачи для двух деформируемых слоев, разделенных пластиной, включающей совокупность N полосовых полостей, к системе интегральных уравнений (СИУ) типа Фредгольма, решаемой методом факторизации.

В настоящей работе этот подход обобщен на векторный случай общей пространственной задачи. Рассмотрен метод исследования краевых задач для двух упругих слоев, разделенных системой пластин Кирхгофа, образующих перегородки, разделенные протяженными полостями в виде параллельных полос.

2. Соотношения для блочных элементов пласта с переборками

Статические уравнение для системы пластин Кирхгофа, описывающих взаимодействия элементов блочной структуры совокупности опор и штолен, можно представить в следующем виде [5–7]:

$$\mathbf{R}_j\left(\partial x_1, \partial x_2\right)\mathbf{u}_j\left(x_1, x_2\right) - \mathbf{E}_j\mathbf{g}_j\left(x_1, x_2\right) = = -\varepsilon_{j5}\mathbf{t}_j\left(x_1, x_2\right), \quad (2.1)$$

$$x_2 \in \Omega_j, \quad x_1 \in R.$$

Здесь перемещения срединной поверхности j-й опоры описаны вектором

$$\mathbf{u}_j = \{u_{jk}\}, \quad k = \overline{1,3};$$

$$\mathbf{E}_j = \operatorname{diag}\{-\varepsilon_{j5}, -\varepsilon_{j5}, \varepsilon_{j5}\};$$

матричные дифференциальные операторы $\mathbf{R}_j\left(\partial x_1, \partial x_2\right)$ определяются компонентами [5–7]:

$$R_{11}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \varepsilon_{j1}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

$$R_{22}^j = \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \varepsilon_{j1}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2},$$

$$R_{12}^j = R_{21}^j = \varepsilon_{j2}\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$R_{33}^j = \varepsilon_{j3}\left(\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4}\right),$$

$$R_{13}^j = R_{23}^j = R_{31}^j = R_{32}^j = 0,$$

где

$$\varepsilon_{j1} = \frac{1-\nu_j}{2}, \quad \varepsilon_{j2} = \frac{1+\nu_j}{2},$$

$$\varepsilon_{j3} = \frac{h_j^2}{12}, \quad \varepsilon_{j5} = \frac{1-\nu_j^2}{E_j h_j},$$

ν_j — коэффициент Пуассона, E_j — модуль Юнга, ρ_j — плотность, h_j — высота j-й опоры. В (2.1), $\mathbf{g}_j = \{g_{jk}\}$ — вектор контактных напряжений, действующих со стороны j-й опоры на верхний слой; $\mathbf{t}_j = \{t_{jk}\}$ — на основание, $k = \overline{1,3}$.

Если рассматривается N штолен, расположенных в областях $\Sigma_k = \{a_{2k} \leqslant x_2 \leqslant a_{2k+1}\}$, $k = \overline{1,N}$, $x_1 \in R$ [5–7], опор при этом — $N+1$. В соотношении (2.1) $j = \overline{1,N+1}$, $\Omega_j = \{a_{2j-1} \leqslant x_2 \leqslant a_{2j}\}$, $j = \overline{1,N+1}$, считая $a_1 = -\infty$, $a_{2N+2} = +\infty$.

В работах [9,10] приведены различные статические и геометрические краевые условия для пластин Кирхгофа. Граничные условия на краях опор для подготовительных, очистных, капитальных и др. горных выработок определяется используемыми в различных геологических условиях типами крепи. В общем виде эти условия при $-\infty < x_1 < +\infty$ можно представить

$$\mathbf{L}_{j1}\left(\partial x_1, \partial x_2\right) \mathbf{u}\left(x_1, x_2\right)\big|_{x_2=a_{2j-1}} = \mathbf{b}_{j1}\left(x_1\right),$$

$$j = \overline{2, N},$$

$$\mathbf{L}_{j2}\left(\partial x_1, \partial x_2\right) \mathbf{u}\left(x_1, x_2\right)\big|_{x_2=a_{2j}} = \mathbf{b}_{j2}\left(x_1\right),$$

$$j = \overline{1, N+1},$$

используя обозначения $\mathbf{L}_{jl}\left(\partial x_1, \partial x_2\right)$ для дифференциальных операторов, вид которых, как и функций $\mathbf{b}_{jl}\left(x_1\right)$ $(l = 1, 2)$, определяются видом крепления j-й штольни. Условия контакта пласта месторождения с покрытием и подложкой определяются непрерывностью напряжений и перемещений.

Как в [7, 8] качестве подложки и покрывающего слоя будем рассматривать однородные упругие слои, обладающие одинаковыми физико-механическими свойствами, но имеющие различную толщину. Перемещения в областях контакта опор с покрывающим упругим слоем, верхнюю границу которого полагаем свободной от напряжений, определяются в рамках линейной теории упругости [11] следующим образом:

$$\mathbf{u}_{+}\left(x_1, x_2\right) = \\ = (1-\nu) H_1 \mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{k}\left(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2\right) \times \\ \times \left(\mathbf{g}\left(\xi_1, \xi_2\right) - \mathbf{q}_0\right) \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2, \quad (2.2)$$

$$\mathbf{k}\left(x_1, x_2\right) = \\ = \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{K}\left(\alpha_1, \alpha_2, 0\right) \times \\ \times \exp\left(-\mathrm{i}\left(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2\right)\right) \mathrm{d}\alpha_1\, \mathrm{d}\alpha_2.$$

Здесь $\mathbf{K}$ — символ матрицы Грина, μ, ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона, соответственно, верхнего упругого слоя. Считая касательные напряжения, возникающие в результате воздействия упругого слоя, покрывающего рудный пласт, пренебрежимо малыми по сравнению с нормальным, принято $\mathbf{q}_0 = \{0, 0, \rho g H_1\}$, где ρ — плотность верхнего слоя, g — ускорение свободного падения.

Если основание моделируется упругим слоем с теми же механическими свойствами, что и покрытие, то

$$\mathbf{u}_{-}\left(x_1, x_2\right) = \\ = (1-\nu) H_2 \mu^{-1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{k}\left(x_1-\xi_1, x_2-\xi_2\right) \times \\ \times \mathbf{t}\left(\xi_1, \xi_2\right) \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2. \quad (2.3)$$

Из условия идеального сопряжения пласта с покрытием и подложкой после применения преобразования Фурье можно записать интегральные представления напряжений для (2.2) и (2.3) в форме

$$\mathbf{U}_{-}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = (1-\nu) H_2 \mu^{-1} \mathbf{K}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \times \\ \times \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{T}_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right),$$

$$\mathbf{U}_{+}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = (1-\nu) H_1 \mu^{-1} \mathbf{K}\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \times \\ \times \left[\sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{G}_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right) - \mathbf{Q}_0\right],$$

где $\mathbf{U} = V_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \mathbf{u}$, $\mathbf{T}_j = V_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \mathbf{t}_j$, $\mathbf{G}_j = V_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \mathbf{g}_j$, $V_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right)$ — двумерное преобразование Фурье,

$$\mathbf{Q}_0 = \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{V}_2 P_j \mathbf{q}_0,$$

$P_j \equiv P_{[a_{2j-1}, a_{2j}]}$ — проектор на область j-й опоры. Здесь

$$\mathbf{G}_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{a_{2j-1}}^{a_{2j}} \mathbf{g}_j\left(x_1, x_2\right) \times \\ \times \exp\left(\mathrm{i}\left(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2\right)\right) \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1,$$

$$\mathbf{T}_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{a_{2j-1}}^{a_{2j}} \mathbf{t}_j\left(x_1, x_2\right) \times \\ \times \exp\left(\mathrm{i}\left(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2\right)\right) \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1.$$

3. Системы интегральных уравнений, получаемые из условий сопряжение рудного пласта, покрывающего слоя и подложки

Функциональные уравнения для каждой опоры могут быть получены с помощью метода блочного элемента [5, 6]:

$$\mathbf{U}_j = \mathbf{R}_j^{-1}\left(-\mathrm{i}\alpha_1, -\mathrm{i}\alpha_2\right) \times \\ \times \left\{ \int\limits_{\partial\Omega_j} \boldsymbol{\omega}_j + \mathbf{E}\mathbf{G}_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right) - \varepsilon_{j5}\mathbf{T}_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \right\}. \quad (3.1)$$

Здесь интеграл вычисляется по границе

$$\partial\Omega_j = \{x_2 = a_{2j-1}, -\infty < x_1 < +\infty\} \cup \\ \cup \{x_2 = a_{2j}, -\infty < x_1 < +\infty\}$$

против часовой стрелки, при этом использованы обозначения $\mathbf{U}_j = V_2\left(\alpha_1, \alpha_2\right)\mathbf{u}_j$, т. е.

$$\mathbf{U}_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{a_{2j}}^{a_{2j+1}} \mathbf{u}_j\left(x_1, x_2\right) \times \\ \times \exp\left(\mathrm{i}\left(x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2\right)\right) \mathrm{d}x_2\, \mathrm{d}x_1.$$

Вектор внешней формы $\boldsymbol{\omega}_j = \{\omega_{kj}\}$, $k = \overline{1,3}$, представления (3.1) в локальной системе координат запишется в виде

$$\omega_{1j} = \exp\left(\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\right)\right) \times \\ \times \left\{ -\left(\varepsilon_{1j}\frac{\partial u_{1j}}{\partial x_2} + \varepsilon_{2j}\frac{\partial u_{2j}}{\partial x_1} - \mathrm{i}\varepsilon_{1j}\alpha_2 u_{1j}\right)\mathrm{d}x_1 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial u_{1j}}{\partial x_1} - \mathrm{i}\alpha_1 u_{1j} - \mathrm{i}\varepsilon_{2j}\alpha_2 u_{2j}\right)\mathrm{d}x_2 \right\};$$

$$\omega_{2j} = \exp\left(\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\right)\right) \times \\ \times \left\{ -\left(\varepsilon_{2j}\frac{\partial u_{1j}}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{2j}}{\partial x_2} - \mathrm{i}\alpha_2 u_{2j}\right)\mathrm{d}x_1 + \right. \\ \left. + \left(\varepsilon_{1j}\frac{\partial u_{2j}}{\partial x_1} - \mathrm{i}\varepsilon_{1j}\alpha_1 u_{2j} - \mathrm{i}\varepsilon_{2j}\alpha_2 u_{1j}\right)\mathrm{d}x_2 \right\};$$

$$\omega_{3j} = \exp\left(\mathrm{i}\left(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\right)\right) \times \\ \times \left\{ -\left[\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial x_2^3} - \mathrm{i}\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_2^2} - \alpha_2^2\frac{\partial u_{3j}}{\partial x_2} + \mathrm{i}\alpha_2^3 u_{3j} + \right.\right. \\ \left. + 2\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial x_1^2 \partial x_2} - 2\mathrm{i}\alpha_2\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_1^2}\right]\mathrm{d}x_1 + \\ \left. + \left[\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial x_1^3} - \mathrm{i}\alpha_1\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_1^2} - \alpha_1^2\frac{\partial u_{3j}}{\partial x_1} + \mathrm{i}\alpha_1^3 u_{3j}\right]\mathrm{d}x_2 \right\},$$

$$\left(\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{x}\right) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2.$$

Компоненты вектора внешних форм $\boldsymbol{\omega}$ содержат как значения перемещений в области опор на границе $\partial\Omega_j$, так и его нормальных производных (и описываемых граничными условиями, и неизвестных). В работе [5] приведены псевдодифференциальные уравнения для скалярного случая $\mathbf{u}_j = \{0, 0, u_{j3}\}$ вертикальных воздействий при условии равенства нулю изгибающих моментов и перерезывающих сил в плоскости $x_1 O x_2$:

$$\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_2^2} + \nu_j\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial x_1^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial x_2^3} + \left(2 - \nu_j\right)\frac{\partial^3 u_{3j}}{\partial x_1^2 \partial x_2} = 0.$$

По схеме метода блочного элемента, вычислив формы-вычеты Лере, в том числе двукратные в $\alpha_2^{\pm} = \pm i\sqrt{\alpha_1^2}$

$$\lim_{\alpha_2 \to \alpha_2^{\pm}} \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[\mathbf{R}_j^{-1}\left(-\mathrm{i}\alpha_1, -\mathrm{i}\alpha_2\right) \times \right. \\ \left. \times \left\{ \int\limits_{\partial\Omega_j} \boldsymbol{\omega}_j + \mathbf{E}\mathbf{G}_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right) - \varepsilon_{j5}\mathbf{T}_j\left(\alpha_1, \alpha_2\right) \right\}\right] \times \\ \times \left(\alpha_2 - \alpha_2^{\pm}\right)^2,$$

для прямолинейных границ приходим к алгебраическим уравнениям. После внесения их решений во внешние формы представления (3.1) из соотношений (2.2)–(2.3) можно получить систему интегральных уравнений для объединенных векторов напряжений $\mathbf{q}_j = \{\mathbf{g}_j, \mathbf{t}_j\}$, которая имеет вид [5]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{k}_1\left(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2\right) \times \\ \times \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{q}_j\left(\xi_1, \xi_2\right) \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 = \\ = \sum_{j=1}^{N+1} \mathbf{f}_j\left(x_1, x_2\right) + \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_k\left(x_1, x_2\right), \quad (3.2)$$

где $\mathbf{q}_j\left(x_1, x_2\right)$ и $\mathbf{f}_j\left(x_1, x_2\right)$ отличны от нуля в областях $a_{2j-1} \leqslant x_2 \leqslant a_{2j}$, $x_1 \in R$, $n = \overline{1, N+1}$. Здесь $\boldsymbol{\varphi}_j\left(x_1, x_2\right)$ — неизвестные векторы перемещений сводов оснований штолен с носителями в полосах $a_{2j} \leqslant x_2 \leqslant a_{2j+1}$, $x_1 \in R$, $n = \overline{1,N}$.

Эта система может быть решена с помощью метода факторизации, описанного в [11, 12]. Обозначим

$$\mathbf{F}_j(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{a_{2j-1}}^{a_{2j}} \mathbf{f}_j(x_1,x_2)\exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{\alpha},x))\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1,$$

$$\boldsymbol{\Phi}_j(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{a_{2j}}^{a_{2j+1}} \boldsymbol{\varphi}_j(x_1,x_2)\exp(\mathrm{i}(\boldsymbol{\alpha},x))\,\mathrm{d}x_2\,\mathrm{d}x_1,$$

$$j = \overline{1,N},$$

тогда (3.2) после применения двумерного преобразования Фурье можно записать в виде

$$\mathbf{K}_1(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{j=1}^{N+1}\mathbf{Q}_j(\alpha_1,\alpha_2) = \\ = \sum_{j=1}^{N+1}\mathbf{F}_j(\alpha_1,\alpha_2) + \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\Phi}_j(\alpha_1,\alpha_2). \quad (3.3)$$

Для приближенной факторизации матриц-функций предлагаются различные алгоритмы, позволяющие выявлять те или иные свойства решений исследуемых задач [11–13]. Один из методов факторизации мероморфных, в том числе полиномиальных, матриц-функций представлен в [8]. В общем случае факторизация матриц-функций в виде произведения некоммутативна, введем обозначения

$$\mathbf{K}_1(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{K}_+(\alpha_1,\alpha_2)\,\mathbf{K}_-(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mathbf{K}_1(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{M}_-(\alpha_1,\alpha_2)\,\mathbf{M}_+(\alpha_1,\alpha_2).$$

Матрицы-функции $\mathbf{K}_\pm(\alpha_1,\alpha_2)$, полученные в результате правосторонней, а $\mathbf{M}_\pm(\alpha_1,\alpha_2)$ — левосторонней факторизации $\mathbf{K}_1(\alpha_1,\alpha_2)$, регулярны в областях выше (для «+») и ниже (для «−») вещественной оси. Их определители в областях регулярности не имеют нулей.

Нетрудно проверить, что справедливы свойства

$$\mathbf{F}_j^+(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{F}_j(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2 a_{2j-1}),$$

$$\mathbf{F}_j^-(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{F}_j(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2 a_{2j}),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_j^+(\alpha_1,\alpha_2) = \boldsymbol{\Phi}_j(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2 a_{2j}),$$

$$\boldsymbol{\Phi}_j^-(\alpha_1,\alpha_2) = \boldsymbol{\Phi}_j(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2 a_{2j+1}),$$

$$\mathbf{Q}_j^+(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{Q}_j(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2 a_{2j-1}),$$

$$\mathbf{Q}_j^-(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{Q}_j(\alpha_1,\alpha_2)\exp(-\mathrm{i}\alpha_2 a_{2j}).$$

Вводя обозначения

$$\mathbf{X}_j^-(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{K}_-(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=0}^{j-1}\mathbf{G}_n^-(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j}-a_{2n})),$$

$$\mathbf{X}_j^+(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{K}_+(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=j+1}^{N+1}\mathbf{G}_n^+(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j-1}-a_{2n-1})),$$

$$\mathbf{Y}_j^-(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{K}_-^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=1}^{j-1}\Phi_n^-(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j-1}-a_{2n+1})),$$

$$\mathbf{Y}_j^+(\alpha_1,\alpha_2) = \mathbf{K}_+^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=j}^{N}\Phi_n^+(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j}-a_{2n})),$$

$$\mathbf{K}_+^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=0}^{j}\mathbf{F}_n^-(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\exp(-i\alpha_2(a_{2j}-a_{2n})) + \\ + \mathbf{K}_+^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=j+1}^{N}\mathbf{F}_\mathbf{n}^+(\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2})\times \\ \times\exp(-i\alpha_2(a_{2j}-a_{2n-1})) = \\ = \Psi_1(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mathbf{K}_-^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=0}^{j-1}\mathbf{F}_n^-(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\exp(-i\alpha_2(a_{2j-1}-a_{2n})) + \\ + \mathbf{K}_-^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\sum_{n=p}^{N+1}\mathbf{F}_n^+(\alpha_1,\alpha_2)\times \\ \times\exp(-i\alpha_2(a_{2j-1}-a_{2n-1})) = \\ = \Psi_2(\alpha_1,\alpha_2),$$

приходим к системе аналогично [5]

$$\mathbf{X}_j^+(\alpha_1,\alpha_2)+\Big\{\mathbf{R}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{X}_{j-1}^-\times \\ \times\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j-1}-a_{2j-2}))\Big\}^+- \\ -\Big\{\mathbf{R}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{Y}_j^+\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j-1}-a_{2j}))\Big\}^+= \\ =\{\Psi_2(\alpha_1,\alpha_2)\}^+;$$

$$\mathbf{Y}_j^-(\alpha_1,\alpha_2)-\Big\{\mathbf{R}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{X}_{j-1}^-\times \\ \times\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j-1}-a_{2j-2}))\Big\}^-+ \\ +\Big\{\mathbf{R}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{Y}_j^+\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j-1}-a_{2j}))\Big\}^-= \\ =-\{\Psi_2(\alpha_1,\alpha_2)\}^-; \quad (3.4)$$

$$\mathbf{X}_j^-(\alpha_1,\alpha_2)+\Big\{\mathbf{R}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{X}_{j+1}^-\times \\ \times\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j}-a_{2j+1}))\Big\}^-- \\ -\Big\{\mathbf{R}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{Y}_j^+\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j}-a_{2j-1}))\Big\}^-= \\ =\{\Psi_1(\alpha_1,\alpha_2)\}^-;$$

$$\mathbf{Y}_j^+(\alpha_1,\alpha_2)+\Big\{\mathbf{R}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{X}_{j+1}^+\times \\ \times\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j}-a_{2j+1}))\Big\}^+- \\ +\Big\{\mathbf{R}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{Y}_j^-\exp(-\mathrm{i}\alpha_2(a_{2j}-a_{2j-1}))\Big\}^+= \\ =-\{\Psi_1(\alpha_1,\alpha_2)\}^+,$$

$$j=\overline{1,N}.$$

где

$$\mathbf{Y}_1^-(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{X}_0^-(\alpha_1,\alpha_2)= \\ =\mathbf{X}_{N+1}^+(\alpha_1,\alpha_2)=0.$$

Здесь

$$\mathbf{R}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{K}_+(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{K}_-^{-1}(\alpha_1,\alpha_2),$$

$$\mathbf{R}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)=\mathbf{M}_-(\alpha_1,\alpha_2)\mathbf{M}_+^{-1}(\alpha_1,\alpha_2).$$

Кроме того, введены обозначения для результата факторизации матрицы-функции по параметру α_2 в виде суммы [11, 12]

$$\Psi(\alpha_1,\alpha_2)=\{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^++\{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^-,$$

$$\{\Psi(\alpha_1,\alpha_2)\}^\pm=\pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Psi(\alpha_1,\eta)}{\eta-\alpha_2}\,\mathrm{d}\eta,$$

$$\pm\operatorname{Re}\alpha_2>0.$$

Используя теорию вычетов, интегральные уравнения системы (3.4) могут быть сведены к системе линейных алгебраических уравнений с экспоненциально убывающими коэффициентами. Найдя значения $\mathbf{Y}_j^-(\alpha_1,\alpha_2)$, $\mathbf{X}_j^-(\alpha_1,\alpha_2)$, можно определить напряжения $\mathbf{g}_j$, $\mathbf{t}_j$, создаваемые опорами, и отвисания кровли $\boldsymbol{\varphi}_j(x_1,x_2)$ аналогично рассмотренному в [5] скалярному случаю.

Заключение

Развиваемый в работах ученых Южного научного центра Российской академии наук и Кубанского университета метод исследования краевых задач, моделирующих многослойные сооружения с множественными межслойными переборками, в настоящей работе обобщен на векторный случай общей пространственной задачи. Использованный в работе метод блочного элемента обеспечил сведение краевой задачи для двух упругих слоев, разделенных пластиной с совокупностью параллельных полосовых отверстий, к системе интегральных уравнений типа Фредгольма, решаемой с помощью интегрального метода факторизации.

Описанный подход может быть применен к исследованию разноразмерных блочных структур других масштабов.

Литература

1. *Насонов Л.Н.* Механика горных пород и крепление горных выработок. М.: Недра, 1969. 328 с.
2. *Баренблатт Г.И., Христианович С.А.* Об обрушении кровли при горных выработках // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1955. № 11. С. 73–82.
3. *Булычев Н.С.* Механика подземных сооружений. М.: Недра, 1982. 337 с.
4. *Половов Б.Д.* Геомеханический анализ протяженных горных выработок. Екатеринбург: УГГУ, 2005. 169 с.
5. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К теории влияния глобального фактора на прочность совокупности параллельных соединений // Вычислительная механика сплошных сред. 2016. Т. 9, № 4. С. 412–419.
6. *Babeshko V.A., Evdokimova O.V., Babeshko O.M., Pavlova A.B., Telatnikov I.S., Fedorenko A.G.* The theory of block structures in problems on the strength of galleries and constructions

with multiple connections // Doklady Physics. 2019. Vol. 64. No. 1. C. 4–8.

7. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* К проблеме мониторинга напряженности зон параллельных штолен // МТТ. 2016. № 5. С. 6–14.
8. *Телятников И.С.* Об одном обобщенном подходе в проблеме оценки прочности подземных сооружений, параллельных штолен // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019. № 4. С. 6–12.
9. *Вольмир А.С.* Гибкие пластинки и оболочки. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. 422 с.
10. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
11. *Ворович И.И., Бабешко В.А.* Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей. М.: Наука, 1979. 319 с.
12. *Бабешко В.А.* Обобщенный метод факторизации в пространственных динамических смешанных задачах теории упругости. М.: Наука, 1984. 265 с.
13. *Бабешко В.А., Бабешко О.М.* Формулы факторизации некоторых мероморфных матриц-функций // ДАН. 2004. Т. 399, № 1. С. 163–167.

References

1. Nasonov, L.N. *Mekhanika gornykh porod i kreplenie gornykh vyrabotok* [Rock mechanics and mine fastening]. Nedra, Moscow, 1969. (In Russian)
2. Barenblatt, G.I., Khristianovich, S.A. Ob obrushenii krovli pri gornykh vyrabotkakh [On the collapse of the roof during mining]. *Izvestiya AN SSSR. Otdelenie tekhnicheskikh nauk* [Proceedings of the USSR Academy of Sciences. Department of Technical Sciences], 1955, no. 11, pp. 73–82. (In Russian)
3. Bulychev, N.S. *Mekhanika podzemnykh sooruzheniy* [The mechanics of underground structures]. Nedra, Moscow, 1982. (In Russian)
4. Polovov, B.D. *Geomekhanicheskiy analiz protyazhennykh gornykh vyrabotok* [Geomechanical analysis of long mine workings]. UGGU, Ekaterinburg, 2005. (In Russian)
5. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. K teorii vliyaniya global'nogo faktora na prochnost' sovokupnosti parallel'nykh soedineniy [On the theory of the influence of the global factor on the strength of a set of parallel compounds]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational mechanics of continuous media], 2016, vol. 9, no. 4, pp. 412–419. (In Russian)
6. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Pavlova, A.B., Telatnikov, I.S., Fedorenko, A.G. The theory of block structures in problems on the strength of galleries and constructions with multiple connections. *Doklady Physics*, 2019, vol. 64, no. 1, pp. 4–8.
7. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. K probleme monitoringa napryazhennosti zon parallel'nykh shtolen [On the problem of monitoring the tension of zones of parallel tunnels]. *Mekhanika tverdogo tela* [Solid Mechanics], 2016, no. 5, pp. 6–14. (In Russian)
8. Telyatnikov, I.S. Ob odnom obobshchennom podkhode v probleme otsenki prochnosti podzemnykh sooruzheniy, parallel'nykh shtolen [About one generalized approach to the problem of assessing the strength of underground structures parallel to adits]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2019, no. 4, pp. 6–12. (In Russian)
9. Vol'mir, A.S. *Gibkie plastinki i obolochki* [Flexible plates and shells]. Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, Moscow, 1956. (In Russian)
10. Gol'denveyzer, A.L. *Teoriya uprugikh tonkikh obolochek* [Theory of elastic thin shells]. Nauka, Moscow, 1976. (In Russian)
11. Vorovich, I.I., Babeshko, V.A. *Dinamicheskie smeshannye zadachi teorii uprugosti dlya neklassicheskikh oblastey* [Dynamic mixed problems of elasticity theory for non-classical domains]. Nauka, Moscow, 1979. (In Russian)
12. Babeshko, V.A. *Obobshchennyy metod faktorizatsii v prostranstvennykh dinamicheskikh smeshannykh zadachakh teorii uprugosti* Generalized factorization method in spatial dynamic mixed problems of elasticity theory. Nauka, Moscow, 1984. (In Russian)
13. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M. Formuly faktorizatsii nekotorykh meromorfnykh matrits-funktsiy [Factorization formulas for some meromorphic matrix functions]. *Doklady Akademii nauk* [Reports of the Academy of Sciences], 2004, vol. 399, no 1, pp. 163–167. (In Russian)

Статья поступила 18 марта 2020 г.