

## Ф И З И К А

УДК 519.63

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-1-62-66

ВАРИАЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ МОЩНОСТИ  
ИМПУЛЬСНОГО ИСТОЧНИКА ЗАГРЯЗНЕНИЯ В МОДЕЛИ  
ПЕРЕНОСА ПРИМЕСИ

Кочергин В. С., Кочергин С. В.

VARIATIONAL ALGORITHMS FOR IDENTIFYING THE POWER SOURCE  
OF A PULSED POLLUTION IN THE IMPURITY TRANSFER MODEL

V. S. Kochergin, S. V. Kochergin

Marine Hydrophysical Institute, Sevastopol, 299011, Russia  
e-mail: vskochoer@gmail.com

*Abstract.* To solve the problems of monitoring the environmental situation it is necessary to create computer systems that allow assessing the state of the environment. Such systems should allow for rapid assessment of the effects of pollution in the areas under investigation, especially in the areas of traditional shipping lanes and intensive construction of various communications. To solve such problems, it is necessary to have mathematical models and methods for solving inverse problems, when the input parameters of the model are determined using the measurement data due to their rapid assimilation. Variational algorithms for assimilation of incoming information are based on iterative minimization of the quadratic prediction quality function that characterizes deviations of the solution obtained from the used model from the measurement data. In this case, the mathematical model is a constraint on the variation of input parameters while minimizing the forecast quality functional. In this paper we propose the use of such procedures for the assimilation of data distributed in space and time.

Based on the passive impurity transfer model, various approaches are considered to solve the problem of identifying the power of a point instantaneous source of pollution from time and space distributed measurement data. In this paper, we consider a variational method for identifying the power of a point instantaneous source of pollution based on solving adjoint problems and the problem in variations. The proposed algorithm is obtained for the case when the measurement data is received at different times. In addition, the method of estimation and the variational method of filtering linear systems of equations are considered for searching for the required values. The initial values of the power of the pollution source are determined in the result of solving the redefined system of equations. The result obtained is consistent with all available information about the impurity concentration. The considered algorithms for identifying the power of the pollution source in relation to the passive impurity transfer model can be used to solve various environmental problems when studying the impact of anthropogenic pollution sources.

*Keywords:* variational algorithm, identification of input parameters, passive admixture, transport model, transport and diffusion of pollutions, assimilation of data measurements.

Для решения задач мониторинга экологической обстановки в Азово-Черноморском регионе необходимо создание компьютерных систем для оценки состояния окружающей среды. Такие системы должны позволять оперативно оценивать последствия загрязнений в исследуемых районах, особенно в областях традиционных судоходных путей и интенсивного строительства различных коммуника-

ций. Для решения таких задач необходимо наличие математических моделей [1] и методов решения обратных задач [2–4], когда по данным измерений за счет их оперативного усвоения происходит определение входных параметров модели. В последнее время вариационные методы ассимиляции и метод сопряженных уравнений активно развиваются и используются для решения подобных

---

Кочергин Владимир Сергеевич, младший научный сотрудник отдела теории волн Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskochoer@gmail.com.

Кочергин Сергей Владимирович, старший научный сотрудник отдела вычислительной техники и математического моделирования Морского гидрофизического института РАН; e-mail: vskochoer@gmail.com.

Работа выполнена в рамках государственного задания по теме 0827-2018-0004 «Комплексные междисциплинарные исследования океанологических процессов, определяющих функционирование и эволюцию экосистем прибрежных зон Черного и Азовского морей» (шифр «Прибрежные исследования»).

задач [5–7]. В основе вариационных алгоритмов ассимиляции поступающей информации лежит итерационная минимизация квадратичного функционала качества прогноза, характеризующего отклонения решения полученного по используемой модели от данных измерений. При этом математическая модель является ограничениями на вариации входных параметров при минимизации функционала качества прогноза. В работе [8] рассмотрен вариационный алгоритм идентификации мощности источника по поступающим данным на конечный момент времени. В работе [9] применен метод сопряженных уравнений [10], который позволил осуществить поиск параметров источника загрязнения по значениям концентрации примеси для конечного момента времени. В данной работе предлагается использование подобных процедур для ассимиляции данных распределенных в пространстве и времени.

### 1. Метод сопряженных уравнений

Рассмотрим модель переноса пассивной примеси в  $\sigma$ -координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \\ + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial \sigma} \frac{\partial C}{\partial \sigma} \end{aligned} \quad (1.1)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial C}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (1.2)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = Q, \\ Q = Q_S \delta(t - 0) \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \\ \sigma = -1 : \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \quad (1.3)$$

и начальными данными

$$C(x, y, \sigma, 0) = 0, \quad (1.4)$$

где  $t$  — время;  $x_0, y_0$  — координаты точечного источника;  $D$  — динамическая глубина;  $C$  — концентрация примеси;  $Q$  — мощность мгновенного точечного источника ( $Q = \text{const}$ );  $U, V, W$  — компоненты поля скорости;  $A_H$  и  $K$  — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии соответственно;  $n$  — нормаль к боковой границе.

Умножая (1.1)–(1.4) на  $C^*$  и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в  $\sigma$ -координатах

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial DU}{\partial x} + \frac{\partial DV}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial \sigma} = 0, \quad (1.5)$$

и выбирая  $C^*$  как решение следующей сопряженной задачи

$$\begin{aligned} - \frac{\partial DC^*}{\partial t} - \frac{\partial DUC^*}{\partial x} - \frac{\partial DVC^*}{\partial y} - \\ - \frac{\partial WC^*}{\partial \sigma} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - \\ - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} - \frac{\partial K}{\partial \sigma} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \end{aligned} \quad (1.6)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = g, \quad (1.7)$$

$$\sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0,$$

$$t = T : C^* = 0, \quad (1.8)$$

получим

$$\int_S QC^* dS = \int_S Cg dS, \quad (1.9)$$

где  $S$  — поверхность моря,

$$g = \delta(t - t_m) \delta(x - x_n) \delta(y - y_n),$$

$$n = \overline{1, N},$$

$N$  — общее количество точек измерений. Учитывая представления для  $Q$  и  $g$ , из формулы (1.9) имеем

$$\begin{aligned} Q_S C_n^{m*}(0, x_0, y_0, 0) = C(t_m, x_n, y_n, 0), \\ n = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Формула (1.9) аналогична формуле, полученной в [11], для оценки значений поля концентрации по различным начальным данным. Это выражение является двойственным представлением [10] концентрации примеси через мощность источника и решение соответствующей сопряженной задачи.

В случае необходимости определения координат точки выброса, следует решать  $N$  сопряженных задач (1.6)–(1.8). Таким образом, можно определить область  $\Omega = \cap L_n$ ,  $n = \overline{1, N}$ , где  $L_n$  — области существенных значений  $C_n^*$ . Априорная информация о местоположении пятна загрязнения и его граница может быть использована при определении местонахождения такой области. Расположение точек  $(x_i, y_i)$  на границе пятна загрязнения позволяет определить область  $\Omega$ , а

измерения в областях максимальной концентрации приводит к лучшей обусловленности решаемой задачи определения  $Q_S$ . Таким образом, имея  $N$  измерений (для различных моментов времени  $t_m$ ) можно построить систему из  $N$  уравнений. Значения  $Q_S$  находятся из системы (1.10) на основе метода фильтрации [11], который успешно применяется при решении аналогичных задач [12]. В случае переопределенной системы (1.10) и ошибок при измерении  $C_n$  необходима фильтрация с учетом всей информации имеющейся в  $N$  уравнениях. В результате работы такой процедуры уравнения новой системы сортируются по рангу. В итоге в первой строке системы оказывается уравнение с наилучшей информативностью, из которого находится величина  $Q_S$ .

## 2. Вариационный алгоритм идентификации

Пусть данные измерений имеются в моменты времени  $t_m \in [0, T]$ , тогда задача усвоения данных измерений  $C_{t_m}^{\text{изм}}$  состоит в минимизации квадратичного функционала

$$I_0 = \frac{1}{2} (P (RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}), P (RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}))_{M_t}, \quad (2.1)$$

где  $M$  — область интегрирования модели на интервале времени  $[0, T]$ ,  $P$  — оператор расширения нулями функций невязок, заданных на множестве точек измерений, а скалярное произведение определяется стандартным способом. Минимизация (2.1) с ограничениями модели (1.1)–(1.3) эквивалентна поиску экстремума следующего функционала

$$I = I_0 + \left[ \frac{\partial DC}{\partial t} + \frac{\partial DUC}{\partial x} + \frac{\partial DVC}{\partial y} + \frac{\partial WC}{\partial \sigma} - \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial DC}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial DC}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C}{\partial \sigma}, C^* \right]_{M_t} + \left( \frac{\partial C}{\partial n}, C^* \right)_{\Gamma_t} + (C - C_0, C^*)_M + \left( \frac{\partial C}{\partial \sigma} - Q_S \delta(t-0) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0), C^* \right)_{\sigma^0}, \quad (2.2)$$

где  $M_t = M \times [0, T]$ .

Записывая вариацию функционала (2.2) и интегрируя по частям с учетом краевых условий и аналога уравнения неразрывности в  $\sigma$ -координатах (1.5), получим

$$\delta I = (\delta Q_S \delta(t-0) \delta(x-x_0) \delta(y-y_0), C^*)_{\sigma^0}, \quad (2.3)$$

где  $C^*$  — множители Лагранжа, которые выбираются из решения следующей сопряженной задачи:

$$-\frac{\partial DC^*}{\partial t} - D \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial C^*}{\partial x} - D \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial C^*}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K_H}{D} \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = -P (RC_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}), \quad (2.4)$$

$$\Gamma : \frac{\partial C^*}{\partial n} = 0, \quad \sigma = 0 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0, \quad (2.5)$$

$$\sigma = -1 : \frac{\partial C^*}{\partial \sigma} = 0,$$

$$t = T : C^* = 0. \quad (2.6)$$

Из стационарности функционала и определения его градиента имеем

$$\nabla_{Q_S} I = C^*(0, x_0, y_0, 0). \quad (2.7)$$

Значение мощности источника ищется итерационно

$$Q_S^{n+1} = Q_S^n + \tau \nabla_{Q_S} I, \quad (2.8)$$

где  $\tau$  — итерационный параметр, который может выбираться следующим образом

$$\tau = \frac{(P(C_{t_m} - C_{t_m}^{\text{изм}}), P\delta C_{t_m})_{M_t}}{(P\delta C_{t_m}, P\delta C_{t_m})_{M_t}}, \quad (2.9)$$

где  $\delta C$  — решение задачи в вариациях

$$\frac{\partial D\delta C}{\partial t} + \frac{\partial DU\delta C}{\partial x} + \frac{\partial DV\delta C}{\partial y} + \frac{\partial W\delta C}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial x} A_H \frac{\partial D\delta C}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} A_H \frac{\partial D\delta C}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{K}{D} \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} \quad (2.10)$$

с условиями на боковых границах

$$\Gamma : \frac{\partial \delta C}{\partial n} = 0, \quad (2.11)$$

краевыми условиями на поверхности и на дне

$$\begin{aligned} \sigma = 0 : \quad \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} &= C^*(0, x_0, y_0, 0) \\ \sigma = -1 : \quad \frac{\partial \delta C}{\partial \sigma} &= 0, \end{aligned} \quad (2.12)$$

и начальными данными

$$\delta C(0, x, y, \sigma) = 0. \quad (2.13)$$

В целом алгоритм идентификации состоит в следующем:

- в процессе интегрирования модели (1.1)–(1.4) запоминаются невязки прогноза для моментов времени  $t_m \in [0, T]$ ;
- решается сопряженная задача (2.4)–(2.6) и строится градиент функционала (2.7);
- интегрируется задача в вариациях (2.10)–(2.13) и определяется величина  $\delta C(t_m, x, y, 0)$ ;
- находится итерационный параметр  $\tau$  по формуле (2.9);
- осуществляется итерационный спуск (2.8) в пространстве параметров для минимизации функционала (2.1).

### Заключение

На основе применения метода оценки построен алгоритм для идентификации мощности импульсного источника загрязнения. Процедура реализована для модели переноса пассивной примеси по данным измерений распределенных по времени и пространству. В основе алгоритма лежит решение соответствующих сопряженных задач и применение специальных вариационных процедур фильтрации переопределенных линейных систем, в результате которых происходит идентификация мощности источника загрязнения с учетом всей поступающей информации. Кроме этого построен алгоритм, реализующий задачу поиска оптимального значения мощности источника загрязнения за счет ассимиляции распределенных по пространству и времени данных измерений концентрации примеси. Задача решается за счет минимизации квадратичного функционала качества прогноза, а модель выступает в роли пространственно-временного интерполянта. Для построения градиента функционала используется решение соответствующей сопряженной задачи. В целом построенные алгоритмы идентификации мощности источника в модели переноса по распределенным данным измерений могут быть использованы для решения различных

задач экологической направленности при изучении воздействия источников загрязнения антропогенного характера.

### Литература

1. Иванов В.А., Фомин В.В. Математическое моделирование динамических процессов в зоне море – суша. Севастополь: ЭКОСИ-гидрофизика, 2008. 363 с.
2. Marchuk G.I., Penenko V.V. Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment // Modelling and Optimization of Complex Systems / Ed. G.I. Marchuk. Proc. of the IFIP-TC7 Working conf. New York: Springer, 1978. P. 240–252.
3. Кочергин В.С., Кочергин С.В. Использование вариационных принципов и решения сопряженной задачи при идентификации входных параметров модели переноса пассивной примеси // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование ресурсов шельфа. 2010. Вып. 22. С. 240–244.
4. Пененко В.В. Методы численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 350 с.
5. Агошков В.И., Пармузин Е.И., Шутяев В.П. Ассимиляция данных наблюдений в задаче циркуляции Черного моря и анализ чувствительности её решения // Изв. РАН, Физика атмосферы и океана. 2013. Т. 49. № 6. С. 643–654.
6. Шутяев В.П., Ле Диме Ф., Агошков В.И., Пармузин Е.И. Чувствительность функционалов задач вариационного усвоения данных наблюдений // Изв. РАН, Физика атмосферы и океана. 2015. Т. 51. № 3. С. 392–400.
7. Shutyayev V. P., Le Dimet F.-X., Parmuzin E. Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation // Nonlinear processes in Geophysics. 2018. Vol. 25. Iss. 2. P. 429–439.
8. Kochergin V.S., Kochergin S.V. Identification of a pollution source power in the Kazantip bay applying the variation algorithm // Physical Oceanography. 2015. No. 2. P. 69–76.
9. Кочергин В.С., Кочергин С.В. Вариационные алгоритмы идентификации мощности точечного импульсного источника загрязнения // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2017. № 3. С. 62–72.
10. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.: Наука. 1982. 320 с.
11. Кочергин В.С. Определение поля концентрации пассивной примеси по начальным данным на основе решения сопряженных задач // Экологическая безопасность прибрежной и шельфовой зон и комплексное использование

ресурсов шельфа, 2011. Вып. 25. Т. 2. С. 270–376.

12. Страхов В.Н. Метод фильтрации систем линейных алгебраических уравнений – основа для решения линейных задач гравиметрии и магнитометрии // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. №3. С. 595–599.
13. Еремеев В.Н., Кочергин В.П., Кочергин С.В., Скляр С.Н. Математическое моделирование гидродинамики глубоководных бассейнов. Севастополь: НПЦ «ЭКОСИ – Гидрофизика», 2002. 238 с.

### References

1. Ivanov, V.A., Fomin, V.V. Matematicheskoye modelirovaniye dinamicheskikh protsessov v zone more – susha [Mathematical modeling of dynamic processes in the sea–land zone]. EKOSI-gidrofizika, Sevastopol, 2008. (In Russian)
2. Marchuk, G.I., Penenko, V.V. Application of optimization methods to the problem of mathematical simulation of atmospheric processes and environment. In: Marchuk G.I. (ed.) *Modelling and Optimization of Complex Systems. Proc. of the IFIP-TC7 Working conf.*. Springer, New York, 1978, pp. 240–252.
3. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Ispol'zovanie variacionnykh principov i resheniya sopryazhennoj zadachi pri identifikacii vhodnykh parametrov modeli perenosa passivnoj primesi [Using variational principles and solving a conjugate problem in identifying the input parameters of a passive admixture transport model]. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoj i shel'fovoj zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa*, Ecological safety of coastal and shelf zones and integrated use of shelf resources], 2010, no. 22, pp. 240–244. (In Russian)
4. Penenko, V.V. *Metody chislennogo modelirovaniya atmosferykh protsessov* [Methods of numerical modeling of atmospheric processes]. Gidrometeoizdat, Leningrad, 1981. (In Russian)
5. Agoshkov, V.I., Parmuzin, E.I., Shutyaev, V.P. Assimilyaciya dannyh nablyudenij v zadache cirkulyacii Chernogo morya i analiz chuvstvitel'nosti eyo resheniya [Assimilation of observational data in the Black Sea circulation problem and analysis of the sensitivity of its solution]. *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics of the atmosphere and the ocean], 2013, vol. 49, no. 6, pp. 643–654. (In Russian)
6. Shutyaev, V.P., Le Dime, F., Agoshkov, V.I., Parmuzin, E.I. Chuvstvitel'nost' funkcionalov zadach' variacionnogo usvoeniya dannyh nablyudeni [Sensitivity of functionals task of variational assimilation of observational data]. *Izvestiya RAN. Fizika atmosfery i okeana* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics of the atmosphere and the ocean], 2015, vol. 51, no. 3, pp. 392–400. (In Russian)
7. Shutyaev, V.P., Le Dimet, F.-X., Parmuzin, E. Sensitivity analysis with respect to observations in variational data assimilation for parameter estimation. *Nonlinear processes in Geophysics*, 2018, vol. 25, iss. 2, pp. 429–439.
8. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Identifikatsiya a pollution source power in the Kazantip bay applying the variation algorithm. *Physical Oceanography*, 2015, no. 2, pp. 69–76.
9. Kochergin, V.S., Kochergin, S.V. Variacionnyye algoritmy identifikacii moshchnosti tochechnogo impul'snogo istochnika zagryazneniya [Variational algorithms for identifying the power of a point pulse source of pollution]. *Ekologicheskij vestnik nauchnykh centrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2017, no. 3, pp. 62–72. (In Russian)
10. Marchuk, G.I. *Matematicheskoye modelirovaniye v probleme okruzhayushchey sredy* [Mathematical modeling in the environmental problem]. Nauka, Moscow, 1982. (In Russian)
11. Kochergin, V.S. Opredelenie polya koncentracii passivnoj primesi po nachal'nykh dannym na osnove resheniya sopryazhennykh zadach [Determination of the concentration field of the passive admixture from the initial data on the basis of solving related problems]. *Ekologicheskaya bezopasnost' pribrezhnoj i shel'fovoj zon i kompleksnoe ispol'zovanie resursov shel'fa* [Ecological safety of the coastal and shelf zones and the integrated use of shelf resources], 2011, no. 25, vol. 2, pp. 270–376. (In Russian)
12. Strahov, V.N. Metod fil'tracii sistem linejnykh algebraicheskikh uravnenij – osnova dlya resheniya linejnykh zadach gravimetrii i magnetometrii [The method of filtering systems of linear algebraic equations – the basis for solving linear problems of gravimetry and magnetometry]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1991, vol. 320, no. 3, pp. 595–599. (In Russian)
13. Eremeyev, V.N., Kochergin, V.P., Kochergin, S.V., Sklyar, S.N. Matematicheskoye modelirovaniye gidrodinamiki glubokovodnykh basseynov [Mathematical modeling of hydrodynamics of deep-water basins]. EKOSI-Gidrofizika, Sevastopol, 2002. (In Russian)