

## МАТЕМАТИКА

УДК 004.932.2

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-2-8-15

## ГАРМОНИЧЕСКОЕ СГЛАЖИВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Василенко В. В., Сафронов А. П., Смыслов А. А., Цепляев Д. П.,  
Марковский А. Н.

## HARMONIC SMOOTHING OF DIGITAL IMAGES

V. V. Vasilenko<sup>1</sup>, A. P. Safronov<sup>2</sup>, A. A. Smyslov<sup>2</sup>, D. P. Tseplayev<sup>2</sup>, A. N. Markovsky<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Serov's Krasnodar Higher Military Aviation School for Pilots, Krasnodar, 350090, Russia

<sup>2</sup> Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

e-mail: mrkvsk@yandex.ru

*Abstract.* The problem of smoothing monochromic digital images is considered. The proposed approach can be attributed to the diffusion smoothing method. Digital images are modeled using functions from the space  $L_2(Q)$ ,  $Q$  is the field of vision. The diffusion transformation is introduced as a solution of the heat conductivity equation and the problem of stabilization of the solution is considered with an unlimited increase in time. We study the extension of the classical Laplace operator with the allocation of a subspace of its one-to-one action and then the construction the inverse operator – the harmonic smoothing operator. Such an operator is the convolution of the original (sharp) image and the fundamental solution of the Laplace equation minus the projection of this convolution to the harmonic subspace. A method for the approximate calculation of the convolution integral is given. The decomposition of the space  $L_2(Q)$  into the orthogonal sum of a harmonic and Novikov subspace is analyzed. The algorithm of the method of basic potentials of the allocation of the harmonic component of a digital image is presented; the method is based on the completeness of systems of basis potentials. A discrete case and a one-parameter family of smoothing transformations for which the parameter acts as a measure of blur is considered. The results of computational experiments for different values of the spectral parameter is presented.

*Keywords:* Laplace operator, smoothing of images, diffusion equation.

## Введение

1. В работе рассматривается один подход к задаче сглаживания цифровых монохроматических полутоновых изображений. Под гладкостью понимается размытость или нечеткость элементов изображения, приводящая к уменьшению резкости.

Степень гладкости как числовая характеристика цифрового изображения необходима, например, для оценки качества изображения и настройки параметров в алгоритмах компьютерного зрения. Существуют разные алгоритмы сглаживания и разные подходы к оценке размытости. Так, в работе [1] предложен вероятностный метод оценки степени

размытия для случаев, когда изображение размыто по Гауссу и равномерно, в [2] проводится классификация методов оценки фокуса изображения для определения размытости, полученной линейным искажением, в работе [3] путём анализа градиентного поля вводится мера размытости, основанная на использовании параметра формы распределения.

Процедура сглаживания также применяется при подавлении шумов в некоторых методах выделения контуров, так называемых дифференциальных методах с согласованием [4–6]. Поскольку сглаженное изображение в сравнении с исходным имеет меньшую ам-

Василенко Вера Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доцент 103 кафедры математики (и информатики) Краснодарского высшего военного авиационного училища летчиков имени Героя Советского Союза А. К. Серова; e-mail: t9288487681@gmail.com.

Сафронов Алексей Павлович, студент факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета; e-mail: mf.cellan@gmail.com.

Смыслов Александр Андреевич, студент факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета; e-mail: sarhanishe@yandex.ru.

Цепляев Даниил Павлович, студент факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета; e-mail: xximikk1696@gmail.com.

Марковский Алексей Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета; e-mail: mrkvsk@yandex.ru.

плитуду перепадов яркости (меньшую резкость), то сглаженное изображение лучше сжимается.

Хорошо, если оператор сглаживания обратим, тогда размытое изображение восстанавливается действием обратного оператора. И операция сглаживания и обратная операция концентрирования осуществляется прямым и обратным действием одного оператора.

В настоящей работе рассматривается расширение классического оператора Лапласа с выделением подпространства его взаимно однозначного действия и строится обратный к нему — гармонический оператор сглаживания (свертка исходного (четкого) изображения и фундаментального решения уравнения Лапласа). Рассматривается дискретный случай и однопараметрическое семейство сглаживающих преобразований, для которых параметр выступает мерой размытости.

**2.** Под изображением, заданным на поле зрения  $Q$  (например,  $Q = [0, 1] \times [0, \beta]$ ) будем понимать кусочно-постоянную функцию  $f(x)$ , равную  $a_{ij} \in [0, 1]$  при непрерывном  $x = (x_1, x_2) \in \Omega_{ij}$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и  $j = \overline{1, m}$ , при равномерном разбиении (дискретизации)  $Q$  на растры  $\Omega_{ij}$  — квадраты, где  $(a_{ij})$  — заданная матрица яркостной интенсивности пикселей;  $m, n$  — количество пикселей по горизонтали и вертикали, соответственно,  $\beta = n/m$ . Таким образом, изображение  $f(x)$  можно считать элементом из  $L_2(Q)$  — пространства функций, суммируемых с квадратом по области  $Q$ . Обратное соответствие функции  $f(x)$  матрице яркостной интенсивности осуществляется посредством процедуры квантования по уровню [4, 5]. Также под изображением будем понимать дискретную функцию  $f = f(i, j)$ , заданную матрицей яркостной интенсивности  $(a_{ij})$ ,  $i = \overline{1, n}$ , и  $j = \overline{1, m}$ .

### 1. Преобразование диффузии

Пусть  $Q$  — область на плоскости и  $S$  — её кусочно-гладкая граница. Рассмотрим вторую начально-краевую задачу для уравнения диффузии с однородным граничным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u(x, t) + f(x), \quad x \in Q, \quad t > 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad (1.2)$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x). \quad (1.3)$$

Предполагается, что  $\varphi$  и  $f$  из  $L_2(Q)$ . Решение  $u(x, t)$  характеризует концентрацию (плотность) вещества в точке  $x$  в момент времени  $t$ ,  $f(x)$  — источники вещества в  $Q$ , условие (1.2) обозначает изоляцию процесса на границе  $S$ ,  $\varphi(x)$  — начальное распределение концентрации вещества.

Пусть  $v(x)$  — решение следующей задачи для уравнения Пуассона:

$$\Delta v(x) = f(x), \quad x \in Q, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S = 0. \quad (1.5)$$

Обозначим  $w(x, t) = u(x, t) - v(x)$ , тогда функция  $w(x, t)$  является решением задачи

$$w_t = \Delta w(x, t), \quad x \in Q, \quad t > 0, \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad (1.7)$$

$$w|_{t=0} = y(x) \equiv \varphi(x) - v(x). \quad (1.8)$$

Обозначим  $\vartheta_k(x)$  и  $\mu_k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , собственные функции и числа второй спектральной задачи для уравнения Лапласа

$$\Delta \vartheta_k(x)|_Q = \mu_k \vartheta_k(x), \quad \frac{\partial \vartheta_k(x)}{\partial n} \Big|_S = 0.$$

Тогда решение задачи (1.6)–(1.8) представляется в виде

$$w(x, t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k \exp(\mu_k t) \vartheta_k(x), \quad (1.9)$$

где  $y_k = (y, \vartheta_k)$  — коэффициенты Фурье функции  $y(x)$ , разложенной по полной в  $L_2(Q)$  системе собственных функций  $\vartheta_k(x)$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , второй спектральной задачи [7].

Для решения  $w(x, t)$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|w(x, t) - c_0\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} (y_k \exp(\mu_k t))^2 \leq \\ &\leq \exp(\mu_1 t) \|y(x)\|^2, \end{aligned}$$

откуда разность  $w(x, t) - c_0$  стремится к нулю экспоненциально при  $t \rightarrow \infty$ .

Следовательно, для  $u(x, t) - v(x) = w(x, t)$  получаем

$$\|u(x, t) - v(x) - c_0\| \leq \exp\left(\frac{1}{2}\mu_1 t\right) \|y(x)\|.$$

Таким образом, решение  $v(x)$  задачи (1.4)–(1.5) для уравнения Пуассона представляет

собой (с точностью до аддитивной постоянной) предельное при  $t \rightarrow \infty$  распределение концентрации (плотности) вещества в результате диффузии.

В применении к монохромным изображениям, вещество в диффузии есть черный цвет в изображении. Таким образом решение уравнения диффузии определяет концентрацию (или плотность) черного цвета в изображении в момент времени  $t$ .

Так, если  $f(x)$  — заданное изображение, то  $v(x)$  — его размытый (в результате диффузии) образ. При этом можно говорить, что задан сглаживающий оператор  $\Delta^{-1}$ , такой что  $\Delta^{-1}f(x) = v(x)$ . Действие оператора  $\Delta^{-1}$  на изображение будем называть *гармоническим сглаживанием*.

Алгоритмы обработки изображений, основанные на решении смешанных начально-краевых задач для уравнения диффузии, имеют широкую область применения. В частности, в работе [8] исследуется существование и единственность прямой и обратной начально-краевой задачи для анизотропной диффузии. В настоящее время на основе анизотропной диффузии достаточно успешно разрабатываются специальные методы фильтрации изображений [9–11].

## 2. Обратный оператор Лапласа

**2.1.** Пусть  $Q$  область на плоскости — поле зрения,  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Обозначим  $E(x) = 1/(2\pi) \ln |x|$  — фундаментальное решение уравнения Лапласа и рассмотрим множество сдвигов аргумента

$$e(Q) = \{E(x - y) \mid x \in Q, y \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}\}.$$

Обозначим  $G_1(Q)$  замыкание  $e(Q)$  в норме  $L_2(Q)$  и  $G_1^1(Q)$  замыкание  $e(Q)$  в стандартной норме пространства Соболева  $W_2^1(Q)$ . Полученные  $G_1(Q)$  и  $G_1^1(Q)$  — подпространства гармонических функций в  $L_2(Q)$  и  $W_2^1(Q)$  соответственно.

Обозначим  $N_1(Q)$  — ортогональное дополнение к  $G_1(Q)$  в  $L_2(Q)$  и  $N_1^1(Q)$  — ортогональное дополнение к  $G_1^1(Q)$  в  $W_2^1(Q)$ . Рассмотрим разложения

$$L_2(Q) = G_1(Q) \oplus N_1(Q),$$

$$W_2^1(Q) = G_1^1(Q) \oplus N_1^1(Q)$$

и последовательность  $u^n = \tilde{g}^n + \tilde{h}^n$ , сходящаяся в  $W_2^1(Q)$  к  $u = \tilde{g} + \tilde{h}$ , где  $\tilde{g}^n, \tilde{g} \in G_1^1(Q)$  и  $\tilde{h}^n, \tilde{h} \in N_1^1(Q)$ .

Уравнение Пуассона

$$\Delta \tilde{h}^n(x) = f^n(x), \quad x \in Q, \quad (2.1)$$

разрешимо в  $N_1^1(Q)$  единственным образом для любой функции  $f^n$  из  $L_2(Q)$ . Следовательно, может быть определен линейный оператор  $\Delta^{-1}$ , действующий из  $L_2(Q)$  в  $N_1^1(Q)$ . Оператор

$$\Delta^{-1} : L_2(Q) \rightarrow N_1^1(Q)$$

— обратный к оператору Лапласа, поскольку  $\Delta \tilde{h}^n = \Delta(\Delta^{-1}f^n) = f^n$ .

Покажем, что область значений  $N_1^1(Q)$  оператора  $\Delta^{-1}$  может быть расширена до  $N_1(Q)$  и  $\Delta^{-1}$  может рассматриваться как инъективный оператор, действующий из  $L_2(Q)$  в  $L_2(Q)$ .

Действительно, выражение (2.1) можно записать в виде

$$\tilde{h}^n = \Delta^{-1}f^n. \quad (2.2)$$

Последовательность  $\tilde{h}^n$  фундаментальна в  $L_2(Q)$ , поскольку справедливо

$$\|\tilde{h}^n - \tilde{h}^m\|_{L_2(Q)} \leq \|\tilde{h}^n - \tilde{h}^m\|_{W_2^1(Q)} \rightarrow 0,$$

$$n, m \rightarrow \infty,$$

следовательно, для правой и левой части (2.2) существует предел в  $L_2(Q)$ , то есть  $\tilde{h}^n \rightarrow h$  и  $f^n \rightarrow f$ , при  $n \rightarrow \infty$ , где  $h$  и  $f$  из  $L_2(Q)$ . Поскольку  $N_1^1(Q)$  вложено в  $N_1(Q)$ , то  $h \in N_1(Q)$  и, следовательно, можно считать, что для любого  $h$  из  $N_1(Q)$  существует  $f$  из  $L_2(Q)$ , такой что  $\Delta^{-1}f = h$ . Таким образом, определен взаимно однозначный оператор

$$\Delta^{-1} : L_2(Q) \rightarrow N_1(Q).$$

**2.2.** Оператор Лапласа является инвариантным относительно поворота, это свойство применительно к изображениям позволяет выделять сложные границы типа излома и эффективно сегментировать изображения, например, медико-биологических микрообъектов [12]. Известны и другие эффективные применения лапласиана в задачах анализа изображений, например, при обработке рентгенограмм лапласиан был использован как один из эвристических признаков идентификации патологии [13]. В работе [14] рассматриваются наиболее распространенные дифференциальные методы — операторы Робертса,

Прюитт, Собела, Шарра и Лапласа, а также предлагается альтернативный метод, который сравнивается со стандартными методами.

Обратный оператор Лапласа сглаживает (размывает) изображение, он выражается сверткой исходного (четкого) изображения с фундаментальным решением уравнения Лапласа — функцией размытия точки, за минусом проекции свертки  $P_G$  на гармоническое подпространство  $G$

$$\Delta^{-1} f(x) := (I - P_G)(f * E)(x). \quad (2.3)$$

В общем случае *обратная* задача восстановления изображения  $f$ , подвергнувшегося аддитивным пространственно-инвариантным искажениям  $\tilde{f}$  с функцией размытия точки  $U(x)$ , сводится к решению интегрального уравнения типа свертки (уравнение Фредгольма 1-го рода)

$$\tilde{f}(x) = \iint_Q f(x)U(x - y)dy.$$

В работе [15] решение таких интегральных уравнений проводится с применением алгоритмов регуляризации некорректно поставленных задач. Как правило, такие задачи требуют большой вычислительной емкости, так в работе [16] задача восстановления изображения искусственного спутника Земли решалась на суперкомпьютере.

В рассматриваемом нами случае *гармонического* размытия обратная задача восстановления исходного (четкого) изображения  $f$  по размытому образу  $\tilde{f}$  решается простым применением прямого оператора Лапласа  $\Delta \tilde{f} = f$ , при этом восстанавливается только та часть изображения, которая принадлежит подпространству  $N_1(Q)$ .

### 3. Вычисление интеграла свертки

В данном разделе рассмотрим вычисление интеграла свертки

$$I(x) = (f * E)(x) = \iint_Q f(y)E(x - y) dy,$$

необходимого для определения образа обратного оператора Лапласа (2.3) от заданного изображения  $f$ .

Согласно принятой модели, изображение  $f(x)$  принадлежит  $L_2(Q)$  и принимает постоянные значения на растрах  $\Omega_{ij}$ , объединение

которых при  $i = \overline{1, n}$ , и  $j = \overline{1, m}$ , составляет всю область  $Q$ , тогда

$$\begin{aligned} I(x) &= \iint_Q f(y)E(x - y) dy = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \iint_{\Omega_{ij}} E(x - y) dy. \end{aligned}$$

Для получения результата свертки  $I(x)$  как матрицы яркостной интенсивности  $(b_{pq})$  на каждом растре  $\Omega_{pq}$  ( $p = \overline{1, m}$ , и  $q = \overline{1, n}$ ) достаточно вычислять  $I(x)$  только в одной точке  $x^{(pq)}$

$$b_{pq} = I(x^{(pq)}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \iint_{\Omega_{ij}} E(x^{(pq)} - y) dy.$$

Таким образом, вычисление свертки сводится к вычислению четырехмерного массива

$$\begin{aligned} M_{i,j,p,q} &= \iint_{\Omega_{ij}} E(x^{(pq)} - y) dy = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_{ij}} \ln[(x_1^{(pq)} - y_1)^2 + (x_2^{(pq)} - y_2)^2] dy_1 dy_2. \end{aligned}$$

Вычисление двойного интеграла — сложная вычислительная процедура, требующая достаточно много машинного времени. Для оптимизации вычислений на каждом растре

$$\Omega_{ij} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{aligned} &\frac{j-1}{m} \leq x_1 \leq \frac{j}{m}, \\ &\frac{(i-1)\beta}{n} \leq x_2 \leq \frac{i\beta}{n} \end{aligned} \right\}$$

подынтегральную функцию можно аппроксимировать двумя плоскостями  $L_1$  и  $L_2$ , построенными следующим образом. Обозначим  $z_k$  — координаты углов растра  $\Omega_{ij}$ ,  $\xi_k = E(x^{(pq)} - z_k)$  — значения подынтегральной функции в углах растра и  $P_k = (z_k, \xi_k)$  — соответствующие точки трехмерного пространства,  $k = 1, \dots, 4$ . Пусть  $\xi_k$  упорядочены следующим образом:  $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \xi_3 \leq \xi_4$ . Такого порядка всегда можно добиться перенумеровкой координат углов соответствующим образом. Тогда плоскость  $L_1$  проводим через три точки  $P_1, P_2, P_3$ , а плоскость  $L_2$  через точки —  $P_2, P_3, P_4$ . В результате приближенный интеграл вычисляется как объем шести пирамид с известными координатами вершин. Такой подход дает точность, визуально достаточную для обработки изображений.

#### 4. Вычисление гармонической проекции

Рассмотрим задачу приближенного вычисления гармонической проекции для функции  $I(x) = (f * E)(x)$  из  $L_2(Q)$ , необходимой для определения обратного оператора Лапласа (2.3) от заданного изображения  $f$ .

Согласно рассмотренному выше ортогональному разложению, пространство  $L_2(Q)$  раскладывается на гармоническое  $G_1(Q)$  и ортогональное  $N_1(Q)$  подпространство, любая функция  $I(x)$  из  $L_2(Q)$  представляется единственным образом в виде суммы двух слагаемых

$$I(x) = g(x) + h(x), \quad g \in G_1(Q), \quad h \in N_1(Q).$$

Рассмотрим систему сдвигов фундаментального решения уравнения Лапласа

$$\gamma_m(x) = E(x^{(m)} - x), \quad x \in Q, \quad m = 1, 2, \dots,$$

порожденную последовательностью точек  $x^{(m)}$  из  $Q^+ = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}$  — дополнения области  $Q$ . Справедливо утверждение [17].

**Лемма (В.Г. Лежнев).** Система функций  $\gamma_m(x)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , полна и линейно независима в пространстве  $G_1(Q)$ , если последовательность  $x^{(m)}$  — является *базисной* в  $Q^+$ .

Обозначим

$$g^N(x) = \sum_{m=1}^N c_m \gamma_m(x),$$

проекцию функции  $g$  на конечномерное подпространство, натянутое на первые  $N$  векторов системы  $\gamma_m$ . Тогда

$$I(x) = g^N(x) + \rho_N(x) + h(x), \quad (4.1)$$

где  $\rho_N(x) \perp \gamma_m$ ,  $m = \overline{1, N}$ , и  $\rho_N(x) \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ .

Умножим скалярно в  $L_2(Q)$  выражение (4.1) на  $\gamma_k$ ,  $k = \overline{1, N}$ , получим систему линейных уравнений с матрицей Грама для линейно независимой системы функций

$$\sum_{m=1}^N c_m (\gamma_m, \gamma_k) = (I, \gamma_k), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

решая которую определяем  $c_m$  — коэффициенты линейной комбинации  $g^N$ . Полученная аппроксимация  $g^N$ , в силу полноты системы  $\gamma_m$ , сходится в норме  $L_2(Q)$  при  $N \rightarrow \infty$  к искомой гармонической проекции  $g$  заданной функции  $I$ . Задача выделения гармонической составляющей, применительно к изображениям, рассматривалась в работе [18].

#### 5. Прямой и обратный дискретный оператор Лапласа

Известно, что конечно-разностный аналог оператора Лапласа от достаточно гладкой функции  $u(x) = u(x_1, x_2)$  с приращениями первого и второго аргумента,  $\delta x_1$  и  $\delta x_2$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta u(x) = & (\delta x_1)^{-2} (u(x_1 - \delta x_1, x_2) - 2u(x_1, x_2) + \\ & + u(x_1 + \delta x_1, x_2)) + (\delta x_2)^{-2} (u(x_1, x_2 - \delta x_2) - \\ & - 2u(x_1, x_2) + u(x_1, x_2 + \delta x_2)). \end{aligned}$$

Для дискретной (сеточной) функции  $u(i, j) = u_{i,j}$  при  $\delta x_1 = \delta x_2 = 1$  будем иметь схему «крест»

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta} u_{i,j} = & u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + \\ & + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Если дискретную функцию  $u(i, j) = u_{i,j}$  записать построчно в вектор-столбец:  $u_{i,j} \mapsto \bar{u}_{(i-1)m+j}$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , и доопределить ее нулями: нулевой и  $m+1$  столбец, нулевую и  $n+1$  строку, — то матрица  $\tilde{\Delta}$  дискретного оператора Лапласа, действующего на вектор-функцию  $\bar{u}$ , будет пятидиагональной. При этом вектора диагоналей будут очень простой структуры, главная диагональ  $(-4, -4, \dots, -4)$ , над и под главной диагональю вектор, в котором первые  $m-1$  элементов единицы, потом нуль, снова  $m-1$  единиц, потом нуль, и так далее  $(1, 1, \dots, 1, 0, 1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 1)$ , следующие две диагонали состоят только из единиц и начинаются с  $m+1$  элемента первой строки, и с  $m+1$  элемента первого столбца; матрица  $\tilde{\Delta}$  имеет размер  $(nm \times nm)$ .

Ниже в качестве примера приведем матрицу оператора Лапласа для вектор-функции, полученную из дискретной функции размера  $3 \times 3$  доопределенной нулями. Обозначим эту матрицу  $\tilde{\Delta}_{3,3}$ :

$$\left\| \begin{array}{cccccccc} -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right\|.$$

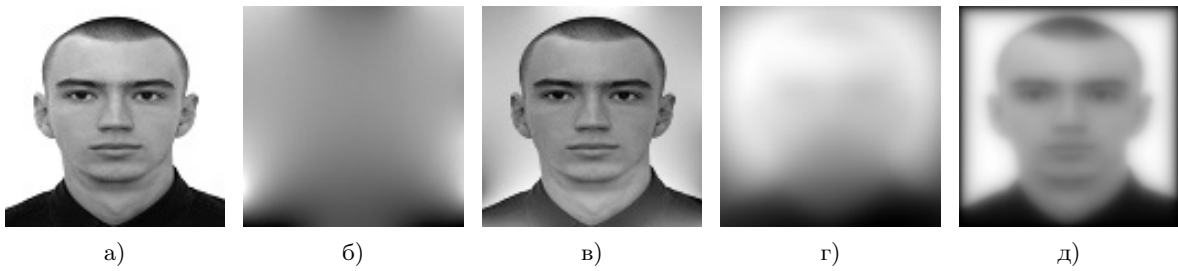


Рис. 1



Рис. 2

Аналогично, можно построить другой оператор Лапласа, доопределяя нулевой и  $m + 1$  столбец, нулевую и  $n + 1$  строку значениями первого и  $m$ -го столбца, первой и  $n$ -ой строки соответственно; такой оператор будем обозначать:  $\dot{\Delta}_{n,m}$ .

Обратная матрица  $\bar{\Delta}_{n,m}^{-1}$  определяет обратный дискретный оператор Лапласа, действующий на вектор-функции. Обратное преобразование из вектор-функции  $\bar{u}_k$  в дискретную функцию  $u_{i,j}$  имеет индексы  $i = \text{div}(k - 1, m) + 1$ ,  $j = \text{mod}(k - 1, m) + 1$ , при  $k = 1, 2, \dots, n \times m$ . Тем самым, определен обратный оператор Лапласа на множестве дискретных функций размера  $n \times m$ .

Обозначим

$$\bar{\Delta}_{n,m,\lambda}^{-1} = (\bar{\Delta}_{n,m} - \lambda I)^{-1},$$

однопараметрическое семейство обратных операторов; аналогично можно рассматривать семейство операторов:  $\dot{\Delta}_{n,m,\lambda}^{-1} = (\dot{\Delta}_{n,m} - \lambda I)^{-1}$ . Спектральный параметр  $\lambda$  будем понимать как меру гармонического сглаживания изображения. Если  $f = f_{i,j}$  — дискретная функция, задающая изображение, то  $\tilde{f} = \bar{\Delta}_{n,m,\lambda}^{-1} f$  — гармонически сглаженное изображение с мерой  $\lambda$ .

### 6. Результаты вычислительного эксперимента

На рис. 1–4 представлены результаты вычислительного эксперимента монохромной

фотографии ( $100 \times 100$  пикселей) Смылова А.А. — одного из авторов статьи. Рис. 1а представляет исходное изображение  $f$  ( $n = 100, m = 100$ ); рис. 1б — гармоническую составляющую изображения  $g$ ; рис. 1в — ортогональную гармоническую составляющую  $h$ ; рис. 1г — свертку исходного изображения с фундаментальным решением уравнения Лапласа  $f * E$ ; рис. 1д — образ обратного дискретного оператора Лапласа  $\bar{\Delta}_{n,m,\lambda}^{-1} f$  при  $\lambda = 0,1$ . Из последнего рис. 1д видно, что особенностью гармонического сглаживания оператором  $\bar{\Delta}_{n,m,\lambda}^{-1}$  является наличие черной каймы, появляющейся вследствие доопределения исходного изображения нулями. Как видно из рис. 2–4 оператор  $\dot{\Delta}_{n,m,\lambda}^{-1}$  лишен данного недостатка.

На рис. 2а–4д приведены образы обратного оператора Лапласа  $\dot{\Delta}_{n,m,\lambda}^{-1} f$  при различных значениях спектрального параметра  $\lambda$ . Приведем последовательно значения параметра  $\lambda$  для рисунков слева направо сверху вниз: 1,0, 1,0012, 1,00245, 1,0037, 1,00495, 1,007, 1,0145, 1,027, 1,0395, 1,05, 1,07, 1,12, 1,245, 1,37, 1,495. Поскольку  $\lambda = 1,0$  является собственным значением оператора  $\dot{\Delta}_{n,m,\lambda}^{-1}$ , то оператор становится вырожденным и рис. 2а не восстанавливается в исходное изображение. При увеличении регулярных значений спектрального параметра  $\lambda$ , гармоническое сглаживание изображения  $f$  более походит на ортогональную компоненту  $h$  рис. 1в.

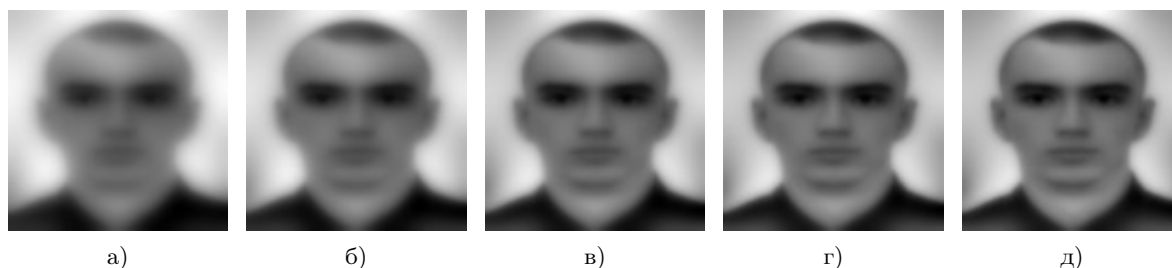


Рис. 3

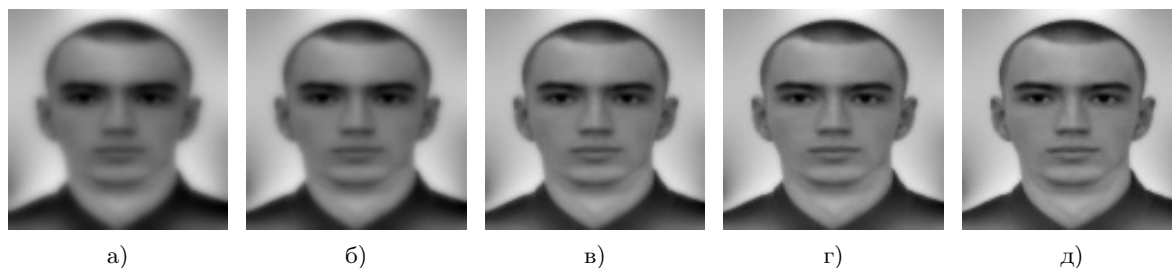


Рис. 4

### Литература

1. Кольцов П. П. Оценка размытия изображения // Компьютерная оптика. 2011. Т. 31. № 1. С. 95–102.
2. Ронжин Ан. Л., Ватаманюк И. В., Ронжин Ал. Л., Железны М. Математические методы оценки размытости изображения и распознавания лиц в системе автоматической регистрации участников совещаний // Автоматика и телемеханика. 2015. Вып. 11. С. 132–144.
3. Асатрян Д. Г. Оценивание степени размытости изображения путём анализа градиентного поля // Компьютерная оптика. 2017. Т. 41. № 6. С. 957–962.
4. Методы компьютерной обработки изображений / Под ред В.А. Сойфера. М.: Физматлит, 2003. 784 с.
5. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2012. 1104 с.
6. Сизиков В. С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab. М.: Лань, 2017. 412 с.
7. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1987. 391 с.
8. Лежнев В. Г., Марковский А. Н. Прямая и обратная краевые задачи уравнения распространения неизотропной диффузии // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2005. № 3. С. 28–33.
9. Борисенко Г. В., Денисов А. М. Нелинейный источник в диффузионных методах фильтрации изображений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 10. С. 1701–1705.
10. Россовский Л. Е. К фильтрации изображений с использованием анизотропной диффузии // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2017. Т. 57. № 3. С. 396–403.
11. Шонин И. С. Применение анизотропного фильтра Перона–Малика в задаче распознавания посадочной площадки // Вестник Концерна ВКО «Алмаз-Антей». 2017. Т. 1. № 20. С. 82–87.
12. Попова Г. М., Степанов В. Н. Анализ и обработка изображений медикобиологических микрообъектов // Автомат. и телемех. 2004. № 1. С. 131–142.
13. Гайдель А. В., Крашенинников В. Р. Отбор признаков для задачи диагностики остеопороза по рентгеновским изображениям шейки бедра // Компьютерная оптика. 2016. Т. 40. № 6. С. 939–946.
14. Хрящёв Д. А. Об одном методе выделения контуров на цифровых изображениях // Вестн. Астрахан. гос. техн. ун-та. Сер. управление, вычисл. техн. информ. 2010. Т. 2. С. 181–187.
15. Ягола А. Г., Кошев Н. А. Восстановление смазанных и дефокусированных цветных изображений // Выч. мет. и программирование. 2008. Т. 9. № 3. С. 207–212.
16. Серезникова Т. И. Устойчивые методы восстановления зашумленных изображений // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Матем. моделирование и программирование. 2011. № 25. С. 32–42.
17. Лежнев А. В., Лежнев В. Г. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 111 с.
18. Василенко В. В. Математические алгоритмы

анализа цифровых изображений. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ставрополь, 2006. 94 с.

### References

1. Kol'tsov, P. P. Otsenka razmytiya izobrazheniya [Assessment of image blur]. *Komp'yuternaya optika* [Computer optics], 2011, vol. 31, no. 1, pp. 95–102. (In Russian)
2. Ronzhin, A.L., Vatamanyuk, I.V., Ronzhin, A.L. et al. Mathematical methods to estimate image blur and recognize faces in the system of automatic conference participant registration. *Automation and Remote Control*, 2015, vol. 76, pp. 2011–2020.
3. Asatryan, D. G. Otsenivanie stepeni razmytosti izobrazheniya putem analiza gradientnogo polya [Estimating the degree of image blur by analyzing a gradient field]. *Komp'yuternaya optika* [Computer Optics], 2017, vol. 41, no. 6, pp. 957–962. (In Russian)
4. Soyfer, V.A. (ed.) *Metody komp'yuternoy obrabotki izobrazheniy* [Computer image processing methods]. Fizmatlit, Moscow, 2003. (In Russian)
5. Gonsales, R., Vuds, R. *Tsifrovaya obrabotka izobrazheniy* [Digital image processing]. Tekhnosfera, Moscow, 2012. (In Russian)
6. Sizikov, V.S. *Pryamye i obratnye zadachi vosstanovleniya izobrazheniy, spektroskopii i tomografii s MatLab* [Direct and inverse problems of image restoration, spectroscopy and tomography with MatLab]. Lan', Moscow, 2017. (In Russian)
7. Mikhaylov, V. P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations]. Nauka, Moscow, 1987. (In Russian)
8. Lezhnev, V. G., Markovskiy, A. N. Pryamaya i obratnaya kraevye zadachi uravneniya rasprostraneniya neizotropnoy diffuzii [Direct and inverse boundary value problems of the distribution equation of non-isotropic diffusion]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of the Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2005, no. 3, pp. 28–33. (In Russian)
9. Borisenko, G.V., Denisov, A.M. Nonlinear source in diffusion filtering methods for image processing. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2007, vol. 47, pp. 1631–1635.
10. Rossovskii, L.E. Image filtering with the use of anisotropic diffusion. *Comput. Math. and Math. Phys.*, 2017, vol. 57, pp. 401–408.
11. Shonin, I.S. Primenenie anizotropnogo fil'tra Perona–Malika v zadache raspoznavaniya posadochnoy ploshchadki [The use of the Peron-Malika anisotropic filter in the recognition of the landing site]. *Vestnik Kontserna VKO "Almaz-Antey"* [Bulletin of the Concern "Almaz-Antey"], 2017, vol. 1, no. 20, pp. 82–87. (In Russian)
12. Popova, G.M., Stepanov, V.N. Examination and Processing of the Images of Biomedical Microobjects. *Automation and Remote Control*, 2004, vol. 65, pp. 116–126.
13. Gaydel', A. V., Krasheninnikov, V. R. Otkor priznakov dlya zadachi diagnostiki osteoporoza po rentgenovskim izobrazheniyam sheyki bedra [Selection of signs for the diagnosis of osteoporosis using x-ray images of the femoral neck]. *Komp'yuternaya optika* [Computer optics], 2016, vol. 40, no. 6, pp. 939–946. (In Russian)
14. Khryashchev, D. A. Ob odnom metode vydeleniya konturov na tsifrovyykh izobrazheniyakh [About one method of selecting contours in digital images]. *Vestnik Astrakhanskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya "Upravlenie. Vychislitel'naya tekhnika. Informatika"* [Bulletin of the Astrakhan State Technical University. Series "Management. Computer engineering. Informatics"], 2010, vol. 2, pp. 181–187. (In Russian)
15. Yagola, A. G., Koshev, N. A. Vosstanovlenie smazannykh i defokusirovannykh tsvetnykh izobrazheniy [Recovery of blurry and defocused color images]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Computational methods and programming], 2008, vol. 9, no. 3, pp. 207–212. (In Russian)
16. Serezhnikova, T.I. Ustoychivye metody vosstanovleniya zashumlennykh izobrazheniy [Sustainable methods for restoring noisy images]. *Vestnik YuUrGU. Seriya Matematicheskoe modelirovaniye i programmirovaniye* [Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modeling and Programming"], 2011, no. 25, pp. 32–42. (In Russian)
17. Lezhnev, A. V., Lezhnev, V. G. *Metod bazisnykh potentsialov v zadachakh matematicheskoy fiziki i gidrodinamiki* [The method of basic potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
18. Vasilenko, V. V. *Matematicheskie algoritmy analiza tsifrovyykh izobrazheniy* [Mathematical algorithms for the analysis of digital images]. Abstract. of dis. ... cand. Phys.-Math. of sciences. Stavropol, 2006. (In Russian)