ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2020. Т. 17. №1. Ч. 2. С. 16–19

Математика

УДК 519.6

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-2-16-19

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА I-ГО РОДА

Дроботенко М. И., Ветошкин П. В.

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE FEDGOLM EQUATION OF THE 1ST KIND

M. I. Drobotenko[1], P. V. Vetoshkin[2]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Yunis-Yug Ltd., Krasnodar, Russia
e-mail: mdrobotenko@mail.ru

Abstract. In solving various applied problems of mathematical physics, integral equations are increasingly used. This arouses interest in methods for solving such equations.

This article discusses an approximate method for solving the Fredholm integral equation of the first kind with a Fredholm kernel. The method is based on the approximation of the solution of an integral equation by a system of point potentials.

The method of point potentials is successfully used to solve a number of problems in mathematical physics. This is due to its algorithmicity and ease of use for a wide class of areas. These advantages remain for the method proposed in the article.

An approximate solution to the integral equation is sought in the form of a linear combination of point potentials. To determine the coefficients of this linear combination, a variational problem is constructed.

The convergence of the method is proved. For the numerical implementation, a stable algorithm based on the regularization of the initial variational problem is proposed. The problem of finding an approximate solution is reduced to a system of linear algebraic equations.

Using the proposed method, the problem of flowing around an infinitely thin plate with a potential flow of an ideal fluid, which reduces to the Fredholm integral equation of the first kind with a logarithmic kernel, is solved. The results of numerical calculations are presented.

Keywords: potentials method, integral equations, approximate methods.

Введение

При решении различных прикладных задач всё большее применение находят интегральные уравнения [1, 2]. Этим вызван интерес к методам решения таких уравнений [1–3].

В настоящей работе рассматривается приближённый метод решения интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода с фредгольмовым ядром. Метод основан на аппроксимации решения системой точечных потенциалов [4–7]. Выбор точечных потенциалов в качестве аппроксимирующих функций позволяет применять предложенный метод для решения задач в областях с криволинейными границами.

В статье описан метод приближённого решения, доказана его сходимость и предложен устойчивый алгоритм для его реализации.

С помощью предложенного метода решена задача обтекания бесконечно тонкой пластины, приведены результаты численных расчётов.

1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей S, $\Omega^+ = \Omega \setminus \overline{\Omega}$, $L_2 = L_2(S)$,

$$L_2^c = \left\{ u \in L_2 : \int\limits_S u(x)\,\mathrm{d}S_x = 0 \right\}.$$

Пусть $f \in L_2$,

$$\int\limits_S \int\limits_S \varphi^2(x, y)\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y < \infty.$$

Дроботенко Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательской части Кубанского государственного университета; e-mail: mdrobotenko@mail.ru.

Ветошкин Пётр Владимирович, ведущий инженер ООО «Юнис-Юг»; e-mail: petr.pervy.71@gmail.com.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода

$$\int\limits_S g(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}S_x = f(y), \quad y \in S \qquad (1.1)$$

и следующие задачи:

Задача 1. Найти функцию $g \in L_2$, удовлетворяющую (1.1).

Задача 2. Найти функцию $g \in L_2^c$, удовлетворяющую (1.1).

При решении задач понадобится следующая лемма [2, 5].

Лемма 1. Пусть

$$\beta_0(x) = 1, \quad \beta_i(x) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}} \ln \frac{1}{|x_i - x|},$$

$$x_i \in \Omega^+, \quad i = \overline{1, \infty},$$

где множество $X = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию единственности для гармонических функций, $\boldsymbol{\nu}$ — внешняя нормаль к Ω, тогда система $\{\beta_i\}_{i=0}^{\infty}$ полна в L_2, а система $\{\beta_i\}_{i=1}^{\infty}$ — в L_2^c.

2. Приближённое решение задачи 1

Предполагая, что задача 1 имеет решение $g \in L_2$, будем искать приближённое решение в виде

$$g_n(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \beta_i(x).$$

Рассмотрим задачи

$$\inf_{c_i} \left\| \sum_{i=0}^{n} c_i \beta_i - g \right\|_{L_2}^2$$

и

$$\inf_{c_i} \left\| \sum_{i=0}^{n} c_i \xi_i - f \right\|_{L_2}^2, \qquad (2.1)$$

где

$$\xi_i(y) = \int\limits_S \beta_i(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}S_x.$$

Их решения обозначим $\{c_i^1\}_{i=0}^n$ и $\{c_i^2\}_{i=0}^n$ соответственно. Обозначим

$$g_n^k(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i^k \beta_i(x), \;\; f_n^k(y) = \sum_{i=0}^{n} c_i^k \xi_i(y),$$

$$k = 1, 2.$$

Если для отыскания приближённого решения использовать (2.1), то удаётся найти лишь g_n^2, при этом, вообще говоря, $g_n^2 \not\to g$ при $n \to \infty$ [8, 9].

Из леммы 1 следует, что $\|g_n^1 - g\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому из неравенств

$$\|f_n^2 - f\|_{L_2}^2 \leqslant \|f_n^1 - f\|_{L_2}^2 =$$
$$\int\limits_S \left(\int\limits_S \Big(g_n^1(x) - g(x)\Big)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}S_x \right)^2 dS_y \leqslant$$
$$\leqslant \|g_n^1 - g\|_{L_2}^2 \int\limits_S \int\limits_S \varphi(x,y)\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y,$$

получаем $\|f_n^2 - f\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$. Этот факт позволяет построить устойчивый алгоритм отыскания g_n^1.

Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$. Будем искать $g_n^\alpha(x)$ в виде

$$g_n^\alpha(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i^\alpha \beta_i(x),$$

где коэффициенты c_i^α определяются «регуляризованной» задачей

$$\inf_{c_i} \left(\left\| \sum_{i=0}^{n} c_i \xi_i - f \right\|_{L_2}^2 + \alpha \left\| \sum_{i=0}^{n} c_i \beta_i \right\|_{L_2}^2 \right),$$

которая приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ij} c_i + \alpha \sum_{i=0}^{n} (\beta_i, \beta_j) c_i = b_j,$$

$$j = \overline{0, n}.$$

Здесь

$$a_{ij} = \int\limits_S \int\limits_S \beta_i(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}S_x \times$$
$$\times \int\limits_S \beta_j(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y,$$

$$b_j = \int\limits_S f(y) \int\limits_S \beta_i(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}S_x\,\mathrm{d}S_y,$$

$$(\beta_i, \beta_j) = \int\limits_S \beta_i(x)\beta_j(x)\,\mathrm{d}S_x.$$

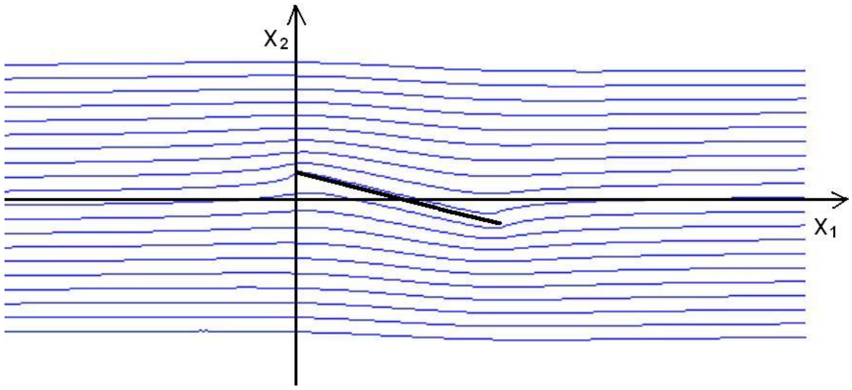

Рис. 1

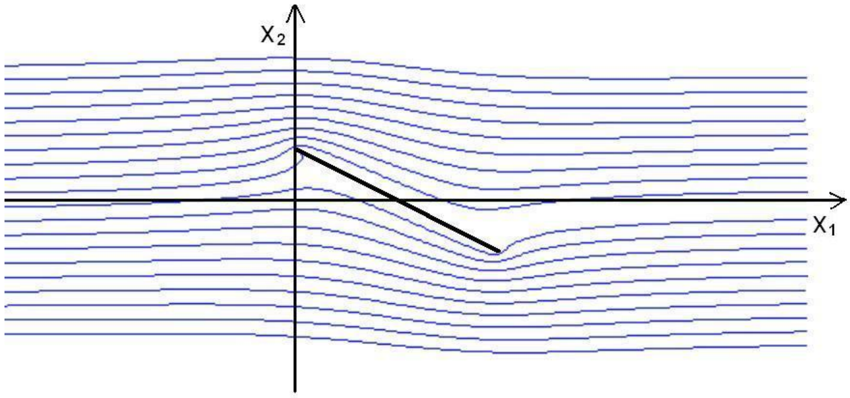

Рис. 2

В этом случае $\|g_n^\alpha - g_n^1\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty, \alpha \to 0$ [9], из чего в силу неравенства

$$\|g_n^\alpha - g\|_{L_2} \leqslant \|g_n^\alpha - g_n^1\|_{L_2} + \|g_n^1 - g\|_{L_2}$$

следует, что $\|g_n^\alpha - g\|_{L_2} \to 0$ при $n \to \infty$, $\alpha \to \to 0$.

Замечание 1. Результаты справедливы, если контур S не является замкнутым.

Замечание 2. Задача 2 решается аналогично.

3. Применение метода к решению задачи обтекания

Рассматривается задача обтекания бесконечно тонкой пластины потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости, направленным вдоль оси x_1 и имеющем скорость на бесконечности $V_\infty = 1$. Функция тока задачи обтекания представляется в виде [4]

$$\psi(y) = -V_\infty x_2 + \int\limits_S g(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}S_x + q_0,$$

где $g(x)$ — неизвестная функция,

$$\varphi(x,y) = \ln\frac{1}{|x-y|},$$

кривая S задает профиль пластины, q_0 — некоторая константа.

Так как S является частью траектории потока, то необходимо выполнение следующего условия

$$\psi(y) = \mathrm{const}, \quad y \in S,$$

которое приводит к интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода

$$\int\limits_S g(x)\varphi(x,y)\,\mathrm{d}S_x = V_\infty x_2 - q_0.$$

Полученное уравнение решалось с помощью предложенного метода. На рис. 1 и 2 изображены линии тока $\psi(y) = \mathrm{const}$ решения задачи обтекания пластины с различными углами атаки при $n = 20$, $\alpha = 0{,}01$.

Литература

1. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус, 1995. 520 с.
2. *Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
3. *Бойков И.В.* Приближенные методы решения сингулярных интегральных уравнений. Пенза: Пензенский ГУ, 2004. 298 с.
4. *Лежнев В.Г., Данилов Е.А.* Задачи плоской гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2000. 92 с.
5. *Лежнев А.В., Лежнев В.Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 111 с.
6. *Дроботенко М.И., Игнатьев Д.В.* Метод точечных потенциалов для уравнений Лапласа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 1. С. 5–9.
7. *Sakakibara K.* Method of fundamental solutions for biharmonic equations based on Almansi-type decomposition // Applications of Mathematics. 2017. Vol. 62. Iss. 4. P. 297–317.
8. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 286 с.
9. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Наука, 1987. 240 с.

References

1. Lifanov, I.K. *Metod singuljarnyh integral'nyh uravnenij i chislennyj jeksperiment* [The method of singular integral equations and numerical experiment]. Janus, Moscow, 1995. (In Russian)
2. Brebbija, K., Teles, Zh., Vroubel, L. *Metody granichnyh jelementov* [Boundary Methods]. Mir, Moscow, 1987. (In Russian)
3. Bojkov, I.V. *Priblizhennye metody reshenija singuljarnyh integral'nyh uravnenij* [Approximate methods for solving singular integral equations]. Penza State University, Penza, 2004. (In Russian)
4. Lezhnev, V.G., Danilov, E.A. *Zadachi ploskoj gidrodinamiki* [Problems of flat hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2000. (In Russian)
5. Lezhnev, A.V., Lezhnev, V.G. *Metod bazisnyh potencialov v zadachah matematicheskoj fiziki i gidrodinamiki* [The method of basic potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
6. Drobotenko, M.I., Ignat'ev, D.V. Metod tochechnykh potentsialov dlya uravneniy Laplasa [The method of point potentials for the Laplace equations]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2007, no. 1, pp. 5–9. (In Russian)
7. Sakakibara, K. Method of fundamental solutions for biharmonic equations based on Almansi-type decomposition. *Applications of Mathematics*, 2017, vol. 62, iss. 4, pp. 297–317.
8. Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving incorrect tasks]. Nauka, Moscow, 1979. (In Russian)
9. Morozov, V.A. *Regulyarnye metody resheniya nekorrektno postavlennykh zadach* [Regular methods for solving incorrectly posed tasks]. Nauka, Moscow, 1987. (In Russian)

Статья поступила 24 января 2020 г.