Математика

УДК 517.518.32+517.956.224+519.635.1 DOI: 10.31429/vestnik-17-1-2-20-26

ЗАМКНУТОСТЬ БИГАРМОНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ БАЗИСНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Марковский А. Н.

CLOSEDNESS OF THE BIHARMONIC SYSTEM OF BASIC POTENTIALS

A. N. Markovsky
Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: mrkvsk@yandex.ru

Abstract. The shift systems of the fundamental solution of biharmonic equation are considered. The shift sequence belongs to the complement of the bounded single-bond domain Q, so that all system functions satisfy the biharmonic equation in Q. The space of biharmonic functions $G_2(Q)$ is introduced as a closure in the $L_2(Q)$ norm of the linear shell of all kinds of shifts of the fundamental solution of biharmonic equation. The following problem is considered: what conditions the countable sequence of shifts must have so that the linear shell closure matches the entire $G_2(Q)$ space, or, in other words, when is the considered system complete in $G_2(Q)$? The problem for the harmonic case was considered by V.G. Lezhnev, he introduced a sufficient basis condition and proved the completeness and linear independence of shift systems of the fundamental solution of Laplace's equation.The work generalizes the basis condition to the biharmonic case and proves the closedness and linear independence of biharmonic system. The basis condition is related to the singularity condition of biharmonic functions. The proof relies on the property of continuity of potentials with a biharmonic nucleus and on the Rikier's boundary value problem solution.

Keywords: harmonic functions, biharmonic functions, complete potential systems, method of basic potentials (MBP), method of fundamental solutions (MFS), projection methods.

Введение

Системы сдвигов фундаментальных решений различных уравнений математической физики рассматривались в связи с построением проекционного метода решения соответствующих краевых задач [1,2]. Такой подход в дальнейшем назывался методом разложения по неортогональным функциям [3], методом базисных потенциалов [4] и, в зарубежной литературе, методом фундаментальных решений [5].

Всякая такая система порождается сдвигами аргументов одной функции — фундаментального решения дифференциального оператора или некоторой его модификации. Сходимость алгоритмов метода обеспечивается полнотой рассматриваемых систем; получение достаточных условий полноты — условий на множество сдвигов, является одной из основных задач теоретического обоснования использования тех или иных фундаментальных решений. Различают два типа систем: определенные на границе области и внутри области. При решении краевых задач системы первого типа используют для аппроксимации граничных данных, а системы второго типа — для приближения решения внутри заданной области используя структурные свойства решения.

В первых и последующих работах авторов метода [1, 2] для первого типа систем сдвигов фундаментального решения уравнения Лапласа было доказано, что для полноты достаточно располагать сдвиги всюду плотно на гладкой поверхности, охватывающей область, в которой рассматривается решение. Фактически, аналогичное условие было получено в работе [6] для второго типа систем сдвигов фундаментального решения бигармонического уравнения. Однако на практике, при расположении точек на поверхности, близко расположенной к границе области, в некоторых случаях возникали численные парадоксы [6, 7], и их природа оставалась невыясненной.

По-видимому, впервые, в других терминах, достаточное условие полноты (условие

Марковский Алексей Николаевич, канд. физ.–мат. наук, доцент кафедры математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета; e-mail: mrkvsk@yandex.ru.

базисности) для первого типа систем сдвигов фундаментального решения уравнения Лапласа, сформулировал проф. В. Г. Лежнев в работе [8] и указал на то, что сдвиги можно выбирать локализованно, он же обратил внимание на эквипотенциали Робена — континуальные множества неединственности [9]. Нарушение условия базисности, например, выбор точек на эквипотенциали Робена, может приводить к ошибочным результатам и объяснить возникающие парадоксы. Также, в связи с решением задачи выделения гармонической составляющей функции, проф. В. Г. Лежнев рассмотрел системы второго типа в гармоническом подпространстве (гармонические системы базисных потенциалов) и доказал их полноту [10]. Цель настоящей работы: обобщение гармонических систем базисных потенциалов на бигармонический случай.

Бигармонические системы рассматривались и другими, в том числе и зарубежными, авторами, в их работах в основном обсуждаются важные алгоритмические вопросы [11–13]. Другим подходом к решению бигармонического уравнения является использование разложения Альманси и сведение задачи к определению гармонических компонент [14], но такой подход ограничен геометрией области.

Следует отметить, что совершенствование различных проекционных численных методов для бигармонического уравнения в областях сложной геометрии продолжает развиваться, о чем можно судить по последним работам [15–17].

Важность бигармонического уравнения обусловлена, в первую очередь, практическими задачами теории упругости и гидродинамики. Так, в [18] для стационарного неоднородного уравнения Ламе используется определенное расщепление пространства вектор-функций, и решение сводится к бигармоническому уравнению. В другой работе [19] строятся регулярные вихревые течения, для которых условие минимума среднеквадратической завихренности приводит к бигармоническому уравнению для функции тока. В [20] решение бигармонического уравнения строится на основе интегрального представления функции в виде логарифмического потенциала с неизвестной гармонической плотностью, задача фактически сводится к решению обратной задачи теории потенциала, что влечет определенные трудности, связанные со спецификой решения обратных задач. В работах [18–20] для решения бигармонического уравнения использовались гармонические системы базисных потенциалов [4].

В настоящей работе рассматриваются второго типа системы сдвигов фундаментального решения бигармонического уравнения, обобщающие гармонические системы и условие базисности, введеные проф. В. Г. Лежневым в [10]. Последовательность сдвигов принадлежит дополнению ограниченной односвязной области. Рассматривается пространство функций, бигармонических в ограниченной области, и доказывается замкнутость системы бигармонических потенциалов в этом пространстве.

1. Гармоническое и бигармоническое пространства

1.1. Рассмотрим однородное бигармоническое уравнение

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad \Delta^2 = \Delta(\Delta), \tag{1.1}$$

в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с границей Ляпунова $S = \partial Q$, $S \in C^{1+\alpha}$,$(\alpha > 0)$ [21], где Δ — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющим собой декартовы координаты точек $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ евклидова n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, $(n \geqslant 2)$. Дополнение в $\mathbb{R}^n$ области Q без границы S обозначим $Q^+ := \mathbb{R}^n \backslash \overline{Q}$.

Регулярные (имеющие непрерывные частные производные четвертого порядка) решения $u(x)$ уравнения (1.1) называются бигармоническими функциями.

Известно [22], что простейшие фундаментальные решения уравнения (1.1) имеют вид: а) в случае $n = 3$ и $n > 4$,

$$E_{2,n}(x) = \varkappa_{2,n} \, |x|^{4-n}\,, \qquad \varkappa_{2,n} = \frac{\Gamma(n/2-2)}{16\pi^{n/2}}; \tag{1.2}$$

б) в случае $n = 2{,}4$,

$$E_{2,n}(x) = \varkappa_{2,n} \, |x|^{4-n} \ln |x|\,, \qquad \varkappa_{2,n} = \frac{(-1)^{n/2-1}}{8\pi^{n/2}}. \tag{1.3}$$

В дальнейшем в случае а) будем говорить об алгебраическом, в случае б) — о логарифмическом случаях.

Для фундаментальных решений (1.2) и (1.3) справедливы соотношения [22]:

– в случае а)

$$\Delta E_{2,n}(x) = E_{1,n}(x), \tag{1.4}$$

– в случае б)

$$\Delta E_{2,n}(x) = E_{1,n}(x) + \nu_{1,n}(x). \tag{1.5}$$

Здесь

$$\nu_{1,n}(x) = (6-n)\varkappa_{2,n}\,|x|^{2-n}\,, \tag{1.6}$$

— многочлен удовлетворяет уравнению $\Delta\nu_{1,n}(x) = 0$, а $E_{1,n}(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа, имеющее следующий вид:

$$E_{1,2}(x) = \frac{1}{2\pi}\ln|x|\,,$$

$$E_{1,n}(x) = -\frac{1}{(n-2)\omega_n}\,|x|^{2-n}\,, \quad n > 3,$$

где ω_n — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

1.2. Отметим одно простое свойство непрерывности потенциалов с гармоническим и бигармоническим ядром.

Лемма 1. Если $g \in L_2(Q)$, то потенциалы

$$u(x) = \iint_Q g(y)E_{2,n}(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

$$\Delta u(x) = \iint_Q g(y)\Delta E_{2,n}(x-y)\,\mathrm{d}y,$$

непрерывны в Q^+ вплоть до границы.

Доказательство. Рассмотрим первый потенциал, второй рассматривается аналогично. Пусть $x^{(0)} \in S$ и $x \in Q^+$. Рассмотрим модуль разности

$$\left|u(x^{(0)}) - u(x)\right| =$$
$$= \left|\iint_Q g(y)\left[E_{2,n}(x^{(0)}-y) - E_{2,n}(x-y)\right]\mathrm{d}y\right| =$$
$$= \left|\left(g, E_{2,n}(x^{(0)}-\cdot) - E_{2,n}(x-\cdot)\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|g\|\left\|E_{2,n}(x^{(0)}-\cdot) - E_{2,n}(x-\cdot)\right\|,$$

где норма $\|\cdot\|$ — есть $L_2(Q)$-норма. Непрерывность следует из непрерывности нормы и непрерывности фундаментального решения $E_{2,n}$, таким образом, $\left|u(x^{(0)}) - u(x)\right| \to 0$ при $Q^+ \ni x \to x^{(0)} \in S$. $\Box$

1.3. Рассмотрим

$$e_m(Q) = \{f:\ f(y) = E_{m,n}(x-y),\ y \in Q,\ x \in Q^+\}$$

— множество (функций, определенных на Q), порожденное всевозможными сдвигами фундаментального решения $E_{m,n}$, при $m = 1, 2$. Обозначим $G_m(Q)$ — замыкание линейной оболочки множества $e_m(Q)$ в норме $L_2(Q)$, $m = 1, 2$. Полученное $G_1(Q)$ и $G_2(Q)$ будем называть подпространством гармонических и бигармонических функций в $L_2(Q)$. Всякая функция из $G_1(Q)$ и $G_2(Q)$ является регулярной гармонической и бигармонической в Q функцией [22].

2. Полнота гармонических систем

Приведем определение *базисной* последовательности, данное в [4], обобщенное на бигармонический случай.

Определение. Последовательность точек

$$x^{(k)} \in Q^+, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

называется *2-базисной*, если она отделена от границы S и удовлетворяет условию единственности бигармонических в Q^+ функций, то есть из равенств двух бигармонических функций $u(x)$ и $v(x)$ в точках последовательности $u(x^{(k)}) = v(x^{(k)})$, $k = 1, 2, \ldots$, следует их тождественное равенство $u(x) \equiv v(x)$ при $x \in Q^+$.

Введенная в [4] *базисная* последовательность в точности соответствует *1*-базисной последовательности в терминах данного выше определения. Сформулируем простое свойство связи *2*-базисной и *1*-базисной последовательности.

Лемма 2. 2-базисная последовательность является *1*-базисной и обратное не верно.

Доказательство. Поскольку всякая открытая окрестность, содержащая хотя бы одну точку, является множеством единственности бигармонических (и даже вещественно аналитических) функций, не ограничивая общности, можно считать, что точки базисной последовательности располагаются локально. В работе [23] показано, что множеством единственности бигармонических функций является множество, состоящее из двух не совпадающих друг с другом сфер, лежащих в области бигармоничности вместе с шарами, которые они ограничивают, тогда как одна сфера является множеством единственности гармонических функций, если она лежит в области гармоничности вместе с ограничиваемым ею шаром. Для доказательства леммы достаточно рассмотреть на сферах счетное всюду плотное множество. □

Пусть $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ — некоторая последовательность точек в $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\gamma_{1,k}(x) = E_{1,n}(x^{(k)} - x),$$
$$x \in Q, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Справедливо следующее утверждение [4].

Теорема (В. Г. Лежнев). Система функций $\gamma_{1,k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, линейно независима и замкнута в подпространстве $G_1(Q)$, если последовательность $x^{(k)}$ является *1*-базисной в Q^+.

Замечание 1. В силу леммы 2 теорема В. Г. Лежнева также справедлива, если последовательность $x^{(k)}$ является *2*-базисной.

Целью настоящей работы является обобщение теоремы В. Г. Лежнева на бигармонический случай.

3. Задача Рикье для бигармонического уравнения

Рассмотрим задачу Рикье [24] для бигармонического уравнения в следующей постановке: требуется найти функцию $u(x) \in G_2(Q)$ такую, что $\Delta^k u(x) \in C(\overline{Q})$, $k = 0, 1$ и

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in Q, \tag{3.1}$$

$$u(x)|_S = f_0(x), \quad \Delta u(x)|_S = f_1(x). \tag{3.2}$$

Лемма 3. Если $f_1 = f_0 = 0$, то $u(x) \equiv 0$, $x \in Q$.

Доказательство. Рассмотрим интегральное представление [24], справедливое для всех регулярных и ограниченных функций из $G_2(Q)$

$$u(x) = \iint_Q \Delta u(y) E_{1,n}(x - y)\, \mathrm{d}y + \\ + \int_S u(x) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} E_{1,n}(x - y)\, \mathrm{d}S_y - \\ - \int_S \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} u(x) E_{1,n}(x - y)\, \mathrm{d}S_y, \quad x \in Q.$$

Обозначим $g(x) = \Delta u(x)$, тогда $\Delta^2 u(x) = \Delta g(x) = 0$, следовательно, $g \in G_1(Q)$. В силу второго граничного условия (3.2) получаем, что $g(x)|_S = 0$. Тогда по принципу максимума $g(x) \equiv 0$, $x \in Q$, следовательно, $u(x) \in G_1(Q)$. Но, если $u(x) \in G_1(Q)$ и выполняется первое граничное условие (3.2), то $u(x) \equiv 0$, $x \in Q$. □

4. Замкнутость бигармонической системы

Пусть $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$ — некоторая последовательность точек в $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$\gamma_{2,k}(x) = E_{2,n}(x^{(k)} - x),$$
$$x \in Q, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Считаем, что размерность n пространства $\mathbb{R}^n$ зафиксирована, и в зависимости от четности n фундаментальное решение $E_{2,n}$ определяется согласно алгебраическому (1.2) или логарифмическому (1.3) случаям.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. Система функций $\gamma_{2,k}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, линейно независима и замкнута в подпространстве $G_2(Q)$, если последовательность $x^{(k)}$ является *2*-базисной в Q^+.

Доказательство. Зафиксируем некоторую *2*-базисную в Q^+ последовательность точек $x^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, и рассмотрим соответствующую этой последовательности систему функций $\gamma_{2,k}(x)$. Пусть $g \in G_2(Q)$, тогда для доказательства замкнутости системы $\gamma_{2,k}(x)$ достаточно показать, что из предположения

$$(g, \gamma_{2,k}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{4.1}$$

следует равенство $g(x) \equiv 0$, $x \in Q$. Рассмотрим бигармонический в Q^+ потенциал

$$u(x) = \iint_Q g(y) E_{2,n}(x - y)\, \mathrm{d}y$$

в точках $x = x^{(k)}$. С учетом предположения (4.1), имеем

$$u(x^{(k)}) = (g, \gamma_{2,k}) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Поскольку последовательность точек $x = x^{(k)}$ является *2*-базисной, то она удовлетворяет условию единственности бигармонических в Q^+ функций, тогда $u(x) \equiv 0$, $x \in Q^+$. В силу леммы 1, функция $u(x)$ непрерывна в Q^+ вплоть до границы. Тогда $u(x)|_S = 0$.

Обозначим $v(x) = \Delta u(x)$, тогда функция $v(x)$ — гармоническая в Q^+. Рассмотрим $v(x)$ в точках $x = x^{(k)}$. С учетом предположения (4.1) имеем $v(x^{(k)}) = 0$ при $k = 1, 2, \ldots$ Согласно лемме 2 множество единственности бигармонических в Q^+ функций является множеством единственности гармонических функций, следовательно, $v(x) \equiv 0$, $x \in Q^+$. Согласно лемме 1 функция $v(x)$ непрерывна в Q^+ вплоть до границы, следовательно, имеем $v(x)|_S = 0$ или $\Delta u(x)|_S = 0$.

Таким образом, для бигармонической функции $u(x) \in G_2(Q)$ получаем задачу Рикье с однородными граничными данными $u(x)|_S = 0$, $\Delta u(x)|_S = 0$, откуда согласно лемме 3 получаем, что $u(x) \equiv 0$, $x \in Q$, следовательно, $g(x) \equiv 0$, $x \in Q$. Замкнутость доказана.

Докажем линейную независимость. Предположим противное. Не ограничивая общности, пусть первые N элементов рассматриваемой системы линейно зависимы, тогда

$$F(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_{2,k}(x) \equiv 0, \quad x \in Q.$$

Рассмотрим $H(x) = \Delta F(x)$, $x \in Q^+$. В алгебраическом случае имеем

$$H(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \gamma_{1,k}(x) \equiv 0. \tag{4.2}$$

В силу замечания 1 система $\gamma_{1,k}$ линейно независима, что противоречит последнему равенству.

Рассмотрим логарифмический случай. Используя равенство (1.5), для $H(x)$ имеем

$$H(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k \Big[E_{1,n}(x^{(k)} - x) + \\ + \nu_{1,n}(x^{(k)} - x) \Big] \equiv 0, \quad x \in Q. \tag{4.3}$$

Линейная комбинация $H(x)$ гармонически продолжается нулем в любую область D, содержащую Q и не содержащую точек $x^{(k)}$, $k = \overline{1, N}$. Пусть $c_1 \neq 0$, возьмем область D, для которой $x^{(1)}$ лежит на границе ∂D. Тогда при $x \to x^{(1)}$ первое слагаемое $H(x)$ стремится к бесконечности, а сумма остальных слагаемых, в силу их непрерывности в точке $x^{(1)}$, остается ограниченной, и, следовательно, равенство (4.3) не может выполняться. Линейная независимость, а в месте с ней и теорема, доказаны. □

Замечание 2. Несложно показать, что первого типа система сдвигов фундаментального решения бигармонического уравнения

$$\gamma_{2,k}(x) = E_{2,n}(x^{(k)} - x), \quad x \in S, \quad k = 1, 2, \ldots$$

замкнута в пространстве $L_2(S)$, если последовательность $x^{(k)}$ является *2*-базисной в Q^+.

Автор с низким поклоном благодарит своего дорогого учителя — профессора Виктора Григорьевича Лежнева — за пример бескорыстного служения делу науки, безупречного отношения к студентам и коллегам, за образец высокой культуры слога и речи.

Литература

1. *Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А.* Метод функциональных уравнений для приближенного решения некоторых граничных задач // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1964. Т. 4. № 4. С. 683–715.
2. *Купрадзе В. Д.* О приближенном решении задач математической физики // Успехи математических наук. 1967. Т. 22. № 2. С. 59–107.
3. *Алексидзе М. А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. М.: Наука, 1978. 352 с.
4. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 111 с.
5. Fairweather G., Johnston R.L. The method of fundamental solutions for problems in potential theory. In: Baker C.T.H., Miller G.F. (eds.) Treatment of Integral Equations by Numerical Methods, Academic Press, New York, 1982.
6. *Bogomolny A.* Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems // J. Num. Anal. 1985. Vol. 22. Iss. 4. P. 644–669.
7. *Алексидзе М. А.* Фундаментальные функции в приближенных решениях граничных задач. М.: Наука, 1991. 352 с.
8. *Лежнев В. Г.* Аппроксимация обратных задач ньютонова потенциала / В сб. Численне методы анализа. М.: МГУ, 1997. С. 52–67.
9. *Лежнев В. Г.* Функция тока задачи плоского обтекания, потенциал Робена и внешняя задача Дирихле // Докл. РАН. 2004. Т. 394. № 5. С. 615–617.
10. *Лежнев В. Г.* Выделение гармонической составляющей / В сб. Численный анализ: теория, приложения, программы: Сборник научных трудов. М.: МГУ, 1999. С. 90–95.
11. *Karageorghis A., Fairweather G.* The Method of Fundamental Solutions for the Numerical

Solution of the Biharmonic Equation // J. of Computational Physics. 1987. Vol. 69. P. 434–459.

12. *Alves C. J. S., Chen C. S.* A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems // Advances in Computational Mathematics. 2005. Vol. 23. P. 125–142.
13. *Dou Fangfang, Li Zi-Cai, Chen C. S., Zhaolu Tian.* Analysis on the MFS for biharmonic equations // Appl. Math. Comput. 2018. Vol. 339. P. 346–366.
14. *Sakakibara K.* Method of fundamental solutions for biharmonic equation based on Almansi-type decomposition // Applications of Mathematics. 2017. Vol. 62. Iss. 4. P. 297–317.
15. *Bialecki B., Karageorghis A.* A Legendre Spectral Galerkin Method For The Biharmonic Dirichlet Problem // SIAM J. Sci. Comput. 2000. Vol. 22. Iss. 5. P. 1549–1569.
16. *Chen J. T., Wu C. S., Lee Y. T., Chen K. H.* On the equivalence of the Trefftz method and MFS for Laplace and biharmonic equations // Computers and Mathematics with Applications. 2007. Vol. 53. Iss. 6. P. 851–879.
17. *Шапеев В. П., Беляев В. А.* Решение краевых задач для уравнений с частными производными в треугольных областях // Выч. мет. и програм. 2018. Т. 19. С. 96–111.
18. *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* Проекционный алгоритм краевой задачи неоднородного уравнения Ламе // Вестник Самарского гос. тех. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2011. Т. 1. № 22. С. 236–240.
19. *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* Проекционные алгоритмы вихревых 2D течений в сложных областях // Таврический Вестник информатики и математики. 2015. Т. 1. № 26. С. 42–49.
20. *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* Метод базисных потенциалов для неоднородного бигармонического уравнения // Вестник Самарского госуниверситета. Естественно научная серия. 2008. Т. 8. № 1. С. 127–139.
21. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988. 512 с.
22. *Соболев С. Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974. 810 с.
23. *Бицадзе А. В.* О полигармонических функциях // Докл. АН СССР. 1987. Т. 294. № 3. С. 521–525.
24. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 391 с.

References

1. Kupradze, V.D., Aleksidze M.A. The method of functional equations for the approximate solution of certain boundary value problems. *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, 1964, vol. 4. iss. 4, pp. 82–126.
2. Kupradze, V.D. On the approximate solution of problems in mathematical physics. *Russian Math. Surveys*, 1967, vol. 22, iss. 2, pp. 58–108.
3. Aleksidze, M. A. *Reshenie granichnykh zadach metodom razlozheniya po neortogonal'nym funktsiyam* [The solution of boundary problems by the method of expansion in non-orthogonal functions]. Nauka, Moscow, 1978. (In Russian)
4. Lezhnev, A. V., Lezhnev, V. G. *Metod bazisnykh potentsialov v zadachakh matematicheskoy fiziki i gidrodinamiki* [The method of basic potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics]. KubGU, Krasnodar, 2009. (In Russian)
5. Fairweather, G., Johnston, R.L. The method of fundamental solutions for problems in potential theory. In: Baker C.T.H., Miller G.F. (eds.) *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods.* Academic Press, New York, 1982.
6. Bogomolny, A. Fundamental solutions method for elliptic boundary value problems. *J. Num. Anal.*, 1985, vol. 22, iss. 4, pp. 644–669.
7. Aleksidze, M. A. *Fundamental'nye funktsii v priblizhennykh resheniyakh granichnykh zadach* [Fundamental functions in approximate solutions of boundary value problems]. Nauka, Moscow, 1991. (In Russian)
8. Lezhnev, V. G. Approksimatsiya obratnykh zadach n'yutonova potentsiala [Approximation of the inverse problems of the Newtonian potential]. In: *Chislenne metody analiza* [Numerical analysis methods]. MGU, Moscow, 1997, pp. 52–67. (In Russian)
9. Lezhnev V. G. Stream function of the two-dimensional flow problem, Robin potential, and the exterior Dirichlet problem. *Doklady Physics*, 2004, vol. 49, no. 2, pp. 116–118.
10. Lezhnev, V. G. Vydelenie garmonicheskoy sostavlyayushchey [Isolation of the harmonic component]. In: *Chislennyy analiz: teoriya, prilozheniya, programmy: Sbornik nauchnykh trudov* [Numerical analysis: theory, applications, programs: Collection of scientific papers]. MGU, Moscow, 1999, pp. 90–95. (In Russian)
11. Karageorghis, A., Fairweather, G. The Method of Fundamental Solutions for the Numerical Solution of the Biharmonic Equation. *J. of Computational Physics*, 1987, vol. 69, pp. 434–459.
12. Alves, C. J. S., Chen, C. S. A new method of fundamental solutions applied to nonhomogeneous elliptic problems. *Adv. in Computational Math.*, 2005, vol. 23, pp. 125–142.
13. Dou Fangfang, Li Zi-Cai, Chen, C. S., Zhaolu, Tian. Analysis on the MFS for biharmonic equations. *Appl. Math. Comput.*, 2018, vol. 339, pp. 346–366.
14. Sakakibara, K. Method of fundamental solutions for biharmonic equation based on Almansi-

type decomposition. *Applications of Mathematics*, 2017, vol. 62, iss. 4, pp. 297–317.
15. Bialecki, B., Karageorghis, A. A Legendre Spectral Galerkin Method For The Biharmonic Dirichlet Problem. *SIAM J. Sci. Comput.*, 2000, vol. 22, iss. 5, pp. 1549–1569.
16. Chen, J. T., Wu, C. S., Lee, Y. T., Chen, K. H. On the equivalence of the Trefftz method and MFS for Laplace and biharmonic equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 2007, vol. 53, iss. 6, pp. 851–879.
17. Shapeev, V. P., Belyaev, V. A. Reshenie kraevykh zadach dlya uravneniy s chastnymi proizvodnymi v treugol'nykh oblastyakh [Solution of boundary value problems for partial differential equations in triangular domains]. *Vychislitel'nye metody i programirovanie* [Computational methods and programming], 2018, vol. 19, pp. 96–111. (In Russian)
18. Lezhnev, V. G., Markovskiy, A. N. Proektsionnyy algoritm kraevoy zadachi neodnorodnogo uravneniya Lame [The projection algorithm of the boundary value problem of the inhomogeneous Lame equation]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Samara State Technical University. Series Physics and Mathematics], 2011, vol. 1, no. 22, pp. 236–240. (In Russian)
19. Lezhnev, V. G., Markovskiy, A. N. Proektsionnye algoritmy vikhrevykh 2D techeniy v slozhnykh oblastyakh [Projection Algorithms of 2D Vortex Flows in Complex Areas]. *Tavricheskiy Vestnik informatiki i matematiki* [Tavrichesky Vestnik Informatiki i Matematiki], 2015, vol. 1, no. 26, pp. 42–49. (In Russian)
20. Lezhnev, V. G., Markovskiy, A. N. Metod bazisnykh potentsialov dlya neodnorodnogo bigarmonicheskogo uravneniya [The method of basic potentials for an inhomogeneous biharmonic equation]. *Vestnik Samarskogo gosuniversiteta. Estestvenno nauchnaya seriya* [Bulletin of Samara State University. Naturally Scientific Series], 2008, vol. 8, no. 1, pp. 127–139. (In Russian)
21. Vladimirov, V. S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Nauka, Moscow, 1988. (In Russian)
22. Sobolev, S. L. *Vvedenie v teoriyu kubaturnykh formul* [Introduction to the theory of cubature formulas]. Nauka, Moscow, 1974. (In Russian)
23. Bitsadze, A. V. O poligarmonicheskikh funktsiyakh [On polyharmonic functions]. *Doklady AN SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1987, vol. 294, no. 3, pp. 521–525. (In Russian)
24. Mikhaylov, V. P. *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial differential equations]. Nauka, Moscow, 1983. (In Russian)

Статья поступила 8 декабря 2019 г.