Механика

УДК 519.6

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-2-27-30

ЗАДАЧА ОБ УДАРЕ ПЛАСТИНЫ О СЛОЙ ВОДЫ И МЕТОД ТОЧЕЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Ветошкин П. В., Дроботенко М. И.

THE PROBLEM OF PLATES HIT WITH A WATER LAYER AND THE METHOD OF POINT POTENTIALS

P. V. Vetoshkin[1], M. I. Drobotenko[2]

[1] Yunis-Yug Ltd., Krasnodar, 350040, Russia
[2] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: mdrobotenko@mail.ru

Abstract. The problem of the impact of an absolutely solid plate on the surface of an ideal fluid layer is considered. The problem is formulated for the velocity potential as a boundary value problem for the Laplace equation in a layer and half-space (M.V. Keldysh – two-dimensional case, I.I. Vorovich, V.I. Yudovich – round disk case in $\mathbf{R}^3$). In the works of the mentioned authors, a flat plate and a flat bottom were considered. This made it possible to apply the Fourier transform, obtain an integral equation for the potential, and, using the expansion of the solution in special functions, calculate some basic hydrodynamic values.

To solve this problem, an algorithm is proposed in which the most difficult step is to solve a mixed boundary-value problem for the Laplace equation with a given boundary value on the plate surface.

For the numerical solution of this problem, the method of point potentials is used, which is also convenient for curvilinear boundaries. An approximate solution is represented as a linear combination of point potentials. To determine its coefficients, a variational problem is constructed, the solution of which reduces to a system of linear algebraic equations.

For a flat plate and a flat bottom, the results obtained are compared with the known ones. The results of solving the problem with a convex plate and a curved bottom are presented.

Keywords: point potentials method, Laplace equation, numerical methods.

Введение

Рассматривается задача об ударе абсолютно твердой пластины о поверхность слоя идеальной жидкости. Задача формулируется для потенциала скорости как краевая задача для уравнения Лапласа в слое и полупространстве (Келдыш М.В. — двумерный случай [1], Ворович И.И., Юдович В.И. — случай круглого диска в $\mathbf{R}^3$ [2]). В работах упомянутых авторов рассматривалась плоская пластина и плоское дно. Это позволило применить преобразование Фурье, получить для потенциала интегральное уравнение и, используя разложение решения по специальным функциям, вычислить некоторые основные гидродинамические значения.

В данной работе предложен алгоритм, в котором для приближённого решения краевой задачи для уравнения Лапласа применяется метод точечных потенциалов [3–8], который удобен, в частности, в случае криволинейных границ. Приближенное решение представляется в аналитическом виде, что также удобно для дальнейших приложений.

Для плоской пластины и плоского дна результаты сравниваются с результатами работы [1]. Приведены результаты решения задачи с выпуклой пластиной и криволинейным дном.

1. Постановка задачи

На поверхность воды глубиной h со скоростью V_0 падает пластина шириной $2l$, форма которой описывается функцией $y_0(x)$. Требуется определить скорость V движения пластины в момент, непосредственно следующий за ударом и распределение скоростей течения жидкости. Жидкость считается несжи-

Ветошкин Пётр Владимирович, ведущий инженер ООО «Юнис-Юг»; e-mail: petr.pervy.71@gmail.com.

Дроботенко Михаил Иванович, канд. физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Научно-исследовательской части Кубанского государственного университета; e-mail: mdrobotenko@mail.ru.

маемой, её плотность равняется ρ, плотность пластины — m.

Пусть

$$\Omega = \{(x,y) : |x| > l, -h < y < 0\} \cup \\ \cup \{(x,y) : |x| \leqslant l, -h < y < y_0(x)\},$$

$\varphi(x,y)$ – потенциал скоростей течения жидкости, образующегося в момент, непосредственно следующий за ударом. Потенциал φ является решением следующей краевой задачи [1]:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \text{ при } y = -h, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -V \text{ при } |x| \leqslant l, \quad y = y_0(x), \tag{1.3}$$

$$\varphi = 0 \text{ при } |x| > l, \quad y = 0, \tag{1.4}$$

удовлетворяющим условию

$$\varphi, \ \frac{\partial\varphi}{\partial x} \to 0 \text{ при } |x| \to +\infty.$$

Значение V должно удовлетворять равенству

$$\int\limits_{-l}^{+l} J(x)\,\mathrm{d}x = m(V - V_0), \tag{1.5}$$

где $J(x) = -\rho\varphi(x, y_0(x))$ — импульс сил давления вдоль пластины.

2. Алгоритм решения

Обозначим решение краевой задачи (1.1)–(1.4) с заданным значением V через $\varphi_V(x,y)$, через $J_V = -\rho\varphi_V(x, y_0(x))$ — соответствующий импульс сил,

$$I_V = \int\limits_{-l}^{+l} J_V(x)\,\mathrm{d}x.$$

Возьмем $V = 1$, тогда справедливо равенство

$$I_1 = m - (m - I_1).$$

Умножим последнее равенство на $V = mV_0/(m - I_1)$, получим

$$VI_1 = m(V - V_0). \tag{2.1}$$

Так как $V\varphi_1 = \varphi_V$, то $VI_1 = I_V$, поэтому из (2.1) следует $I_V = m(V - V_0)$, то есть выполняется равенство (1.5).

Итак, рассматриваемая задача свелась к следующему:

1. Найти φ_1,
2. Вычислить J_1, I_1,
3. Вычислить $V = mV_0/(m - I_1)$ и $\varphi_V = V\varphi_1$.

Для эффективного отыскания функции φ_1 предлагается применить метод точечных потенциалов.

3. Метод точечных потенциалов

Пусть

$$\Omega_b = \{(x,y) : \ l < |x| < b, \ -h < y < 0\} \cup \\ \cup \{(x,y) : \ |x| \leqslant l, \ -h < y < y_0(x)\},$$

$b > l$. Рассмотрим функцию φ^b, удовлетворяющую в области Ω_b уравнению (1.1), граничным условиям (1.2)–(1.4) и граничному условию

$$\frac{\partial\varphi^b}{\partial x} = 0 \text{ при } |x| = b. \tag{3.1}$$

Значение b выбираем так, чтобы при $|x| = b$ выполнялось приближённое равенство $\varphi^b \approx 0$. Такой выбор параметра b обеспечивает близость функций φ^b и φ.

Для отыскания функции φ^b применим метод точечных потенциалов [3–5]. Приближённое решение $\varphi_n^b(x,y)$ будем искать в виде

$$\varphi_n^b(x,y) = \sum_{k=1}^{n} c_k\alpha_k(x,y),$$

где $\alpha_k(x,y) = \ln\big((x_k - x)^2 + (y_k - y)^2\big)$, а точки (x_k, y_k) принадлежат внешней области $\Omega^+ = \mathbf{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$.

Чтобы найти коэффициенты c_k, используем граничные условия (1.2)–(1.4) и (3.1). Для этого определим функционал $\Phi(\varphi_n^b)$ [7]:

$$\Phi(\varphi_n^b) = \int\limits_{-l}^{l} \left(V + \frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^{n} c_k\alpha_k(x, y_0(x))\right)^2 \mathrm{d}x + \\ + \left(\int\limits_{-b}^{-l} + \int\limits_{l}^{b}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\alpha_k(x,0)\right)^2 \mathrm{d}x +$$

Таблица 1

h/l	1	3	5
V/V_0	0,73017	0,75824	0,76233

$$+\int_{-b}^{b}\left(\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^{n}c_k\alpha_k(x,-h)\right)^2 \mathrm{d}x+$$
$$+\int_{-h}^{0}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{n}c_k\alpha_k(-b,y)\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{n}c_k\alpha_k(b,y)\right)^2\right)\mathrm{d}y.$$

Функционал $\Phi(\varphi_n^b)$ можно интерпретировать, как функцию $F(c)$ переменных $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Рассмотрим следующую задачу. Необходимо найти

$$\mu = \min_c F(c)$$

и минимизирующие коэффициенты $c^0 = (c_1^0, c_2^0, \ldots, c_n^0)$.

Необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial F}{\partial c_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{3.2}$$

приводят к линейной алгебраической системе относительно коэффициентов c_k.

Можно доказать, что функция $F(c)$ строго выпуклая, поэтому матрица системы (3.2) невырождена.

4. Результаты численных расчётов

Были проведены численные расчёты, показавшие хорошее совпадение с результатами, приведёнными в статье [1].

В табл. 1 приведены результаты расчётов изменения отношения V/V_0 в зависимости от отношения h/l для неровного дна. Как видно из таблицы, влияние глубины на отношение V/V_0 убывает с её возрастанием.

Метод точечных потенциалов может быть реализован для областей достаточно общего вида, поэтому предложенный алгоритм может быть распространён на случай неровного дна, криволинейной пластины и на трёхмерный случай.

Литература

1. *Келдыш М.В.* Удар пластины о воду, имеющую конечную глубину: Избранные труды. Механика. М.: Наука, 1985. 568 с.
2. *Ворович И.И., Юдович В.И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины // ПММ. 1957. Т. XXI. С. 525–532.
3. *Лежнев В.Г., Данилов Е.А.* Задачи плоской гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2000. 92 с.
4. *Лежнев А.В., Лежнев В.Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 111 с.
5. *Лежнев М.В.* Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений. Краснодар: КубГУ, 2009. 134 с.
6. *Свидлов А.А., Бирюк А.Э., Дроботенко М.И.* Негладкое решение уравнения Россби // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2013. № 1. С. 89–94.
7. *Дроботенко М.И., Игнатьев Д.В.* Метод точечных потенциалов для уравнений Лапласа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2007. № 1. С. 5–9.
8. *Sakakibara K.* Method of fundamental solutions for biharmonic equations based on Almansi-type decomposition // Applications of Mathematics. 2017. Vol. 62. Iss. 4. P. 297–317.

References

1. Keldysh M.V. *Udar plastiny o vodu, imeyushchuyu konechnuyu glubinu: Izbrannye trudy. Mekhanika* [Impact of a plate on water of finite depth: Selected Works. Mechanics]. Nauka, Moscow, 1985. (In Russian)
2. Vorovich I.I., Yudovich V.I. Udar kruglogo diska o zhidkost' konechnoy glubiny [The impact of a circular disk on a fluid of finite depth]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1957, vol. XXI, pp. 525–532.
3. Lezhnev V.G., Danilov E.A. *Zadachi ploskoj gidrodinamiki* [Problems of flat hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2000. (In Russian)
4. Lezhnev A.V., Lezhnev V.G. *Metod bazisnyh potencialov v zadachah matematicheskoj fiziki i gidrodinamiki* [The method of basic potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)

5. Lezhnev M.V. *Zadachi i algoritmy ploskoparallel'nykh techeniy* [Tasks and algorithms of plane-parallel flows]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
6. Svidlov A.A., Biryuk A.E., Drobotenko M.I. Negladkoe reshenie uravneniya Rossbi [A nonsmooth solution of the Rossby equation]. *Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Scientific Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2013, no. 1, pp. 89–94. (In Russian)
7. Drobotenko M.I., Ignat'ev D.V. Metod tochechnykh potentsialov dlya uravneniy Laplasa [The method of point potentials for the Laplace equations] Ekologicheskiy vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva [Ecological bulletin of scientific centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2007, no. 1, pp. 5–9. (In Russian)
8. Sakakibara K. Method of fundamental solutions for biharmonic equations based on Almansi-type decomposition. *Applications of Mathematics*, 2017, vol. 62, iss. 4, pp. 297–317.

Статья поступила 24 января 2020 г.