УДК 512.516.3

ЗАДАЧА ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОТЕНЦИАЛАМИ[1]

В. В. Лежнёв[2], ***М. В. Лежнёв***[3], ***В. И. Рябченко***[4]

PROBLEM OF PLANE-PARALLEL PROFILE FLOW AND FUNCTIONS REPRESENTATION IN TERMS OF POTENTIALS

Lezhnev V. G., Lezhnev M. V., Ryabchenko V. I.

The work proves the theorem on the representation of a stream function for the flow problem of a bounded domain in terms of a logarithmic potential in this domain. The desired potential density (density of bound vortices) is a harmonic function. The theorem proved deals with the exhaustive set in the subspace of harmonic functions. The work describes algorithms and stream patterns of a semi-circle flow with different circulation and variations with incidence.

Рассматривается задача обтекания цилиндрического тела потенциальным потоком несжимаемой жидкости. Доказываются теоремы о представлении функций на границе области интегралами типа потенциалов, приводятся алгоритмы. Дано доказательство леммы Новикова о разложении пространства $L_2(D)$.

1. Обозначим внешность ограниченной односвязной области Q с границей S через $Q^+ = R^2 \backslash \bar{Q}$. В области Q^+ требуется построить векторное поле $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \{u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})\}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, удовлетворяющее условиям:

a) $\operatorname{div} \mathbf{w}(\mathbf{x}) = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{w}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in Q^+$;

b) $\mathbf{w}(\infty) = \{u_0, v_0\}$ — заданная скорость;

c) S — линия тока поля $\mathbf{w}(\mathbf{x})$.

Векторное поле $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \{u(\mathbf{x}), v(\mathbf{x})\}$ можно трактовать как поле скоростей плоскопараллельного потока идеальной жидкости, обтекающей профиль S. Из условия a) следует существование функции тока $\psi(\mathbf{x})$,

$$\mathbf{w} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, -\frac{\partial}{\partial x_2} \right\} \psi(\mathbf{x}) := \nabla_c \psi(\mathbf{x}).$$

Условие c) переписывается в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = \text{const} = b, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Обозначим через $(\ ,\ )$ и $\|\|$ скалярное произведение и норму в пространстве $L_2(S)$, через $E(\mathbf{x})$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в R^2. Будем обозначать $G(Q)$ подпространство в $L_2(Q)$ гармонических функций

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q).$$

В работе доказывается следующая основная теорема.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (03-01-96587).

[2]Лежнёв Всеволод Викторович, канд. физ.-мат. наук, преподаватель кафедры теоретической физики и компьютерных технологий Кубанского государственного университета.

[3]Лежнёв Михаил Викторович, старший преподаватель кафедры гидравлики Кубанского государственного технологического университета.

[4]Рябченко Владимир Ильич, д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой гидравлики Кубанского государственного технологического университета.

Теорема 1. Функция тока $\psi(\mathbf{x})$ задачи обтекания a)–c) представляется в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \int\limits_Q g(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in Q^+; \tag{1}$$

это представление единственно в подпространстве $G(Q)$, $g(\mathbf{y}) \in G(Q)$, если потенциал Робена в Q не равен нулю.

Потенциал Робена $R(\mathbf{x})$ имеет вид [1]

$$R(\mathbf{x}) = \int\limits_S \varphi^*(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, ds_{\mathbf{y}},$$

где $\varphi^*(\mathbf{x})$ — плотность потенциала Робена (пусть $\|\varphi^*\| = 1$) и по определению $R(\mathbf{x}) \equiv R_0 = \text{const}$, $\mathbf{x} \in Q$.

При этом $(\varphi^*, 1) \neq 0$ [1], т.е.

$$R(\mathbf{x}) = (\varphi^*, 1) \ln|\mathbf{x}| + O(1), \quad |\mathbf{x}| \to \infty,$$

и векторное поле

$$\mathbf{w}_R = \nabla_c R(\mathbf{x}) = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1} \right\} R(\mathbf{x})$$

является касательным к S. Потенциал Робена определяет чисто циркуляционное обтекание, если $R(\mathbf{x})$ принять за функцию тока. Циркуляция Γ такого поля на S и на окружности S_r большого радиуса r равна [2]

$$\Gamma = (\varphi^*, 1) = \int\limits_S \varphi^*(\mathbf{x})\, ds.$$

Если $R_0 = 0$, то единственности представления (1) нет.

Будем пользоваться далее разложениями $L_2(S)$ в прямую сумму —

$$L_2(S) = \{\varphi^*\} \oplus L_2^{\varphi}(S) = \{1\} \oplus L_2^{C}(S),$$

где $\{\varphi^*\}$ и $\{1\}$ — одномерные подпространства.

2. Предварительно рассмотрим разложение пространства $L_2(Q)$.

Определение. Ограниченная последовательность точек $\mathbf{x}^m$, $m = 1, 2, \ldots$, называется множеством, удовлетворяющим условию единственности гармонических функций в R^2, если функции $u_1(\mathbf{x})$ и $u_2(\mathbf{x})$, гармонические в некоторой области Q, содержащей точки $\mathbf{x}^m$, и равные в этих точках, равны тождественно $u_1(\mathbf{x}) \equiv u_2(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in Q$.

Далее предполагается, что последовательность точек $\mathbf{z}^m \in Q^+$, $m = 1, 2, \ldots$, удовлетворяет условию единственности гармонических функций и отделена от границы S (будем называть ее *базисной*).

Теорема 2. Система функций

$$\gamma_m(\mathbf{x}) = E(\mathbf{z}^m - \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, \quad m = 1, 2, \ldots$$

линейно независима и замкнута в $G(Q)$.

Доказательство. Пусть $g(\mathbf{x})$ — произвольная из $G(Q)$, рассмотрим функцию $v(\mathbf{x})$

$$v(\mathbf{x}) = \int\limits_Q g(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Предположим, что $g(\mathbf{x})$ ортогональна всем $\gamma_m(\mathbf{x})$, тогда $v(\mathbf{z}^m) = 0$, $m = 1, 2, \ldots$. Отсюда следует, что гармоническая в Q^+ функция $v(\mathbf{x})$ тождественно равна нулю в Q^+. Если $g(\mathbf{y}) \in L_2(Q)$, то $v(\mathbf{x}) \in C^1(R^2)$, т. е.

$$v|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_S = 0. \tag{2}$$

Функция $v(\mathbf{x})$ в области Q удовлетворяет бигармоническому уравнению

$$\Delta^2 v(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q^-,$$

и граничным условиям (2). Следовательно, $v(\mathbf{x}) \equiv 0$ в Q^-, т.е. $g(\mathbf{x}) = \Delta v(\mathbf{x}) = 0$. Замкнутость доказана.

Для доказательства линейной независимости предположим противное. Пусть некоторая конечная линейная комбинация функций $\gamma_k(\mathbf{x})$ тождественно равна нулю на S, обозначим ее $F(\mathbf{x})$,

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{c_{k_n}} \gamma_{k_n}(\mathbf{x}) \equiv 0, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Отсюда следует тождественное равенство нулю $F(\mathbf{x})$ в Q^-, а также в любой области D, содержащей Q и не содержащей базисных точек $\mathbf{z}^m$. Пусть $c_{k_1} \neq 0$, возьмем D, для которой $\mathbf{z}^{k_1}$ принадлежит границе. Тогда при $\mathbf{x} \to \mathbf{x}^{k_1}$ слагаемое $\gamma_{k_1}(\mathbf{x})$ стремится к бесконечности, а сумма остальных слагаемых остается ограниченной, т. е. равенство $F(\mathbf{x}) \equiv 0$ не может выполняться. Теорема доказана.

Следующее утверждение, формулировка которого была дана в работе [3] для трехмерного случая, будем называть леммой Новикова.

Лемма Новикова. Если Q — ограниченная область в R^2 с границей Ляпунова ∂Q и ее потенциал Робена не равен нулю в Q, $R_0 \neq 0$, то пространство $L_2(Q)$ имеет следующее разложение в прямую сумму

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q),$$

где $G(Q)$ — подпространство гармонических в Q функций, а функция $p(\mathbf{x})$ принадлежит $N(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_Q p(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{x} \in S. \tag{3}$$

Доказательство. a) Рассмотрим в $L_2(Q)$ множество функций $p(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (3). Покажем, что это множество образует подпространство в $L_2(Q)$. Очевидно, оно является линейным многообразием. Обозначим его $N(Q)$, докажем его замкнутость.

Пусть $p_n(\mathbf{x}) \in N(Q)$, $n = 1, 2, \ldots$ и последовательность $p_n(\mathbf{x})$ фундаментальна в $L_2(Q)$. Обозначим предельную функцию $p_0(\mathbf{x})$ и рассмотрим функцию

$$f(\mathbf{x}) = \int\limits_Q p_0(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

В граничной точке $\mathbf{x}^1 \in S$ при $n \to \infty$ имеем

$$\left| f(\mathbf{x}^1) - \int\limits_Q p_n(\mathbf{y})E(\mathbf{x}^1-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \right| = \\ = \left|\left(p_0(\mathbf{y}) - p_n(\mathbf{y}), E(\mathbf{x}^1-\mathbf{y})\right)\right| \leqslant \\ \leqslant \|p_0 - p_n\| \left\|E(\mathbf{x}^1-\mathbf{y})\right\| \to 0.$$

Следовательно, $f(\mathbf{x}^1) = 0$, $p_0(\mathbf{x}) \in N(Q)$, и $N(Q)$ является подпространством.

b) Обозначим через $G(Q)$ ортогональное дополнение к $N(Q)$ в $L_2(Q)$,

$$L_2(Q) = G(Q) \oplus N(Q).$$

Покажем, что подпространство $G(Q)$ образовано замыканием гармонических в Q функций. Возьмем в области Q бесконечно дифференцируемые функции $h(\mathbf{x})$,

$$h(\mathbf{x}) \in C^\infty(Q), \quad \sup h(\mathbf{x}) \Subset Q;$$

такие функции образуют в $L_2(Q)$ плотное подмножество. Пусть $p(\mathbf{x}) = \Delta h(\mathbf{x})$, тогда

$$h(\mathbf{x}) = \int\limits_Q p(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in Q,$$

следовательно, $p(\mathbf{x}) \in N(Q)$.

Возьмем функцию $g(\mathbf{x})$, принадлежащую $G(Q) \cup C^2(\overline{Q})$, множество таких функций плотно в $G(Q)$. По построению $g(\mathbf{x}) \perp p(\mathbf{x})$, поэтому

$$0 = \int\limits_Q g(\mathbf{x})p(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \\ = \int\limits_Q g(\mathbf{x})\Delta h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int\limits_Q \Delta g(\mathbf{x})h(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}.$$

Из плотности в $L_2(Q)$ множества функций $h(\mathbf{x})$ следует, что $\Delta g(\mathbf{x}) = 0$, функция $g(\mathbf{x})$ является гармонической, то есть $G(Q)$ — замыкание множества гармонических функций.

c) Покажем теперь, что гармоническая функция не может принадлежать подпространству $N(Q)$, если $R_0 \neq 0$.

Для доказательства предположим противное, что $g(\mathbf{y}) \in G(Q)$ и

$$\int\limits_Q g(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Рассмотрим решение $w(\mathbf{x})$ следующей краевой задачи:

$$\Delta w(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q, \quad w|_S = 0.$$

Из интегрального представления

$$w(\mathbf{x}) = \int\limits_Q g(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} + \\ + \int\limits_S \left[w(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})} - \frac{\partial w}{\partial n}E \right] ds_{\mathbf{y}}, \\ \mathbf{x} \in Q,$$

получаем

$$0 = \int\limits_S g(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} - \int\limits_S \frac{\partial w}{\partial n}E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}},$$

где $\mathbf{x} \in S$, откуда следует, что последний интеграл равен нулю на S, т. е. потенциал Робена для Q равен нулю. Получаем противоречие. Лемма доказана.

Можно доказать [4], что все функции из $G(Q)$ являются гармоническими.

Замечание 1. Отметим, что если потенциал Робена равен нулю, то существует отличная от нуля гармоническая функция $g(\mathbf{y})$ такая, что

$$\int\limits_Q g(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}=0,\quad \mathbf{x}\in S. \tag{4}$$

Для доказательства рассмотрим решение $u(\mathbf{x})$ краевой задачи:

$$\Delta^2 u(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in Q;$$

$$u|_S=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=\varphi^*(\mathbf{x}).$$

Из интегрального равенства при $\mathbf{x}\in Q$

$$u(\mathbf{x})=\int\limits_Q \Delta u(\mathbf{x})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}+ \\ +\int\limits_S\left[u\frac{\partial E(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})}-\frac{\partial u}{\partial n}E\right]ds_{\mathbf{y}},$$

получаем следующее равенство на границе

$$0=\int\limits_Q \Delta u(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}- \\ -\int\limits_S \varphi^*(\mathbf{y})E\,ds_{\mathbf{y}},\quad \mathbf{x}\in S.$$

Последний интеграл равен нулю по условию. Следовательно, равенство (4) выполняется при $g(\mathbf{y})=\Delta u(\mathbf{y})$.

3. Рассмотрим задачу представления функции $f(\mathbf{x})\in L_2(S)$ логарифмическим потенциалом (см. также [5, 6]).

Теорема 3. Любая функция $f(\mathbf{x})$ из подпространства $L_2^{\varphi}(S)$ может быть представлена в виде

$$f(x)=\int\limits_Q g_0(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}, \tag{5}$$

где $g(\mathbf{x})\in G(Q)$; это представление единственно в подпространстве гармонических функций $G(Q)$, если потенциал Робена R_0 для области Q не равен нулю.

Доказательство. Обозначим через K_2 интегральный оператор потенциала двойного слоя на S

$$K_2h=\int\limits_S h(\mathbf{y})\frac{\partial}{\partial n(\mathbf{y})}E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}}. \tag{6}$$

Число $\lambda=\frac{1}{2}$ — простое собственное число оператора K_2 с собственной функцией $c(\mathbf{x})=1$ [1]. Потенциал Робена $\varphi^*(\mathbf{x})$ является собственной функцией сопряженного оператора K_2^* при $\lambda=\frac{1}{2}$.

Пусть $f(\mathbf{x})\perp\varphi^*(\mathbf{x})$, возьмем решение $u_0(\mathbf{x})$ интегрального уравнения

$$f=\frac{1}{2}u_0-\int\limits_S u_0(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})}\,ds_{\mathbf{y}}\equiv \\ \equiv\left(\frac{1}{2}-K_2\right)u_0,\quad \mathbf{x}\in S,$$

с интегральным оператором K_2 потенциала двойного слоя. По теореме Фредгольма решение интегрального уравнения существует.

Рассмотрим краевую задачу для бигармонического уравнения

$$\Delta^2 u(\mathbf{x})=0,\quad \mathbf{x}\in Q, \tag{7}$$

$$u|_S=u_0(\mathbf{x}),\quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S=0. \tag{8}$$

Решение задачи существует, единственно и представимо в виде [4]

$$u(\mathbf{x})=\int\limits_Q \Delta u(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}+ \\ +\int\limits_S\left[u(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})}-\frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{y})}E\right]ds_{\mathbf{y}},\quad \mathbf{x}\in Q. \tag{9}$$

Переходя на границу при $\mathbf{x}\to\mathbf{x}'\in S$, получим [1]

$$\frac{1}{2}u_0(\mathbf{x}')=\int\limits_Q \Delta u(\mathbf{y})E(\mathbf{x}'-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}+ \\ +\int\limits_S u_0(\mathbf{y})\frac{\partial E(\mathbf{x}'-\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{y})}\,ds_{\mathbf{y}},$$

то есть

$$f(\mathbf{x})=\int\limits_Q g(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y},\quad \mathbf{x}\in S,$$

где $g(\mathbf{y}) = \Delta u(\mathbf{y})$. Утверждение для $f(\mathbf{x}) \in L_2^{\varphi}(S)$ доказано.

Единственность следует из леммы Новикова. Теорема доказана.

Замечание 2. Утверждение теоремы 1 работы [8] о представлении внешних потенциалов, эквивалентное тому, что любая функция $f(\mathbf{x}) \in L_2(\partial Q)$ может быть представлена логарифмическим потенциалом по области Q, $Q \subset R^2$, в двумерном случае ошибочно.

Действительно, функция

$$V(\mathbf{x}) = \int\limits_S \varphi^*(\mathbf{y}) \frac{\partial E(\mathbf{x}-\mathbf{y})}{\partial n(\mathbf{x})}\, ds_{\mathbf{y}},$$

представляет собой внешний потенциал при $\mathbf{x} \in Q^+$ и непрерывна в $\overline{Q}^+$, если $S \in C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$. При $\mathbf{x} \to \mathbf{x}' \in S$ выполняется равенство [1]

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}'} V(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\varphi^*(\mathbf{x}') + V(\mathbf{x}') = \varphi^*(\mathbf{x}').$$

Но не существует плотности $g(\mathbf{y}) \in L_2(Q)$ логарифмического потенциала такой, чтобы функция $\varphi^*(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in S$, представлялась интегралом

$$\int\limits_Q g(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, ds_{\mathbf{y}}, \tag{10}$$

если потенциал Робена для области Q равен нулю.

Невозможность такого равенства достаточно доказать для гармонических плотностей (вследствие леммы Новикова). Плотности $g(\mathbf{x})$ из (10) соответствует некоторое решение $u(\mathbf{x})$ уравнения Пуассона

$$\Delta u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in Q,$$

которое является бигармонической функцией и может быть определено своими граничными значениями как решение краевой задачи

$$\Delta^2 u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in Q,$$

$$u = h_0(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = h_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S.$$

Из интегрального представления

$$u(\mathbf{x}) = \int\limits_Q g(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int\limits_S \left[u \frac{\partial E}{\partial n(\mathbf{y})} - \frac{\partial u}{\partial n(\mathbf{y})} E \right] ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in Q$$

следует равенство на границе

$$\frac{1}{2}u(\mathbf{x}) = \int\limits_Q g(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y} + \int\limits_S \left[u \frac{\partial E}{\partial n(\mathbf{y})} - h_1 E \right] ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Предположим, что первое слагаемое справа равно $\varphi^*(\mathbf{x})$, тогда последнее уравнение переписывается в виде

$$\left(\frac{1}{2} - K_2\right) u = \varphi^*(\mathbf{x}) - \int\limits_S h_1(\mathbf{y}) E\, ds_{\mathbf{y}}. \tag{11}$$

По теореме Фредгольма разрешимость этого уравнения (и выполнение предполагаемого равенства) возможна тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна плотности $\varphi^*(\mathbf{x})$ потенциала Робена [1]. Это условие не выполняется, так как

$$(\varphi^*, \varphi^*) - \int\limits_S \varphi^*(\mathbf{x}) \int\limits_S h_1(\mathbf{y}) E\, ds_{\mathbf{y}}\, ds_{\mathbf{x}} = (\varphi^*, \varphi^*) - \int\limits_S h_1(\mathbf{x}) \int\limits_S \varphi^*(\mathbf{y}) E\, ds_{\mathbf{x}}\, ds_{\mathbf{y}} = (\varphi^*, \varphi^*) - R_0 \int\limits_S h_1\, ds_{\mathbf{y}} = (\varphi^*, \varphi^*) \neq 0.$$

Следовательно, не существует гармонической функции $g(\mathbf{y})$, удовлетворяющей равенству (5) при условии $R_0 = 0$ и $f(\mathbf{x}) = \varphi^*(\mathbf{x})$.

Для примера рассмотрим круг $Q_1 = \{|\mathbf{x}| < 1\}$ с границей S_1 и функцию

$$w(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 - 1).$$

Выполняются равенства

$$\Delta w(\mathbf{x}) = 2, \quad w|_S = 0, \quad \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_S = 1. \tag{12}$$

Из интегрального представления имеем

$$w = 2\int\limits_Q E\, d\mathbf{y} + \int\limits_S \left[w \frac{\partial E}{\partial n(\mathbf{y})} - \frac{\partial w}{\partial n(\mathbf{y})} E \right] ds_{\mathbf{y}} = 2\int\limits_Q E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, d\mathbf{y} - \int\limits_S E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\, ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x} \in Q_1.$$

При переходе на границу получаем

$$0 = 2\int\limits_{Q_1} E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} - \int\limits_{S_1} E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}},$$

при $\mathbf{x} \in S_1$. Известно [7], что второй интеграл здесь равен нулю (это эквивалентно тому, что для единичного круга плотность потенциала Робена постоянна и $R_0 = 0$), следовательно,

$$\int\limits_{|\mathbf{y}|<1} E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y} \equiv 0, \quad \mathbf{x} \in S_1.$$

Отсюда также следуют равенства: во внешности единичного круга при $|\mathbf{x}| \geqslant 1$ —

$$\int\limits_{|\mathbf{y}|<1} \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\,d\mathbf{y} = \pi \ln|\mathbf{x}|,$$

в единичном круге при $|\mathbf{x}| \leqslant 1$ —

$$\int\limits_{|\mathbf{y}|<1} \ln|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\,d\mathbf{y} = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_1^2 - 1)$$

(так как последний интеграл — бигармоническая функция с граничными условиями (12)).

Отметим, что все результаты прямо переносятся на трехмерный случай. Так как потенциал Робена для трехмерных областей строго больше нуля [1], то исключающее условие в теореме 3, а также в лемме Новикова, отсутствует.

Замечание 3. Если потенциал Робена не равен нулю, $R_0 \neq 0$, то функция $\varphi^*(\mathbf{x})$ может быть представлена интегралом вида (10).

4. Обратимся к доказательству теоремы 1. Для задачи обтекания области Q с границей S возьмем функцию тока в виде

$$\psi(\mathbf{x}) = u_0 x_2 - v_0 x_1 + \int\limits_D g(\mathbf{y}) E(\mathbf{x}-\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in Q^+, \tag{13}$$

где $\{u_0, v_0\}$ — вектор, определяющий скорость на бесконечности, а искомая функция $g(\mathbf{y})$ является плотностью распределения вихрей в области Q [5, 6].

Функция $\psi(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S$ тождественно равна постоянной b. Постоянную b можно выбрать так, что функция $b-(u_0x_2-v_0x_1)$ будет ортогональна $\varphi^*(\mathbf{x})$. По теореме 3 существует гармоническая функция $g(\mathbf{y})$ такая, что выполняется представление (13) для функции тока.

Если $R_0 \neq 0$ для Q, то при любой b существует единственная гармоническая $g(\mathbf{y})$, для которой равенство (13) справедливо, что следует из леммы Новикова. Теорема 1 доказана.

Функция тока $\psi(\mathbf{x})$ потенциального течения несжимаемой жидкости имеет на бесконечности в общем случае следующее представление [9]

$$\psi(\mathbf{x}) = C \ln|\mathbf{x}| + O(1), \quad \mathbf{x} \to \infty. \tag{14}$$

Если две функции тока имеют в разложении (14) одинаковый коэффициент C, то их разность равна тождественной постоянной в области течения Q^+, и они определяют одно и то же обтекающее течение.

Рассмотрим циркуляцию Γ векторного поля $\mathbf{w}(\mathbf{x}) = \nabla_c \psi(\mathbf{x})$, покажем, что

$$\Gamma = \int\limits_Q g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

По определению

$$\Gamma = \int\limits_S (\overline{w}, \overline{\tau}(\mathbf{x}))\,ds = \int\limits_S (\nabla\psi(\mathbf{x}), \overline{n}(\mathbf{x}))\,ds = \int\limits_S \frac{\partial\psi(\mathbf{x})}{\partial n(\mathbf{x})}\,ds. \tag{15}$$

Здесь $\overline{\tau}(\mathbf{x})$ и $\overline{n}(\mathbf{x})$ — единичная касательная в положительном направлении обхода и единичная внешняя нормаль к S, $\mathbf{x} \in S$.

Подставим в (15) представление (13). Интеграл по S от первого слагаемого $(u_0x_2 - v_0x_1)$ равен нулю, так как является гармонической функцией в Q.

Используя известное равенство для потенциала двойного слоя с постоянной плотностью, получаем

$$\Gamma = \int\limits_S \int\limits_Q g(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial n(\mathbf{x})} E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,d\mathbf{y}\,ds_{\mathbf{x}} = \int\limits_Q g(\mathbf{y}) \int\limits_S \frac{\partial E}{\partial n(\mathbf{x})}\,ds_{\mathbf{x}} d\mathbf{y} = \int\limits_Q g(\mathbf{y})\,d\mathbf{y}.$$

Замена порядка интегрирования возможна, так как все входящие функции абсолютно интегрируемы, если $S \in C^{1+\alpha}$, $\alpha > 0$ [1].

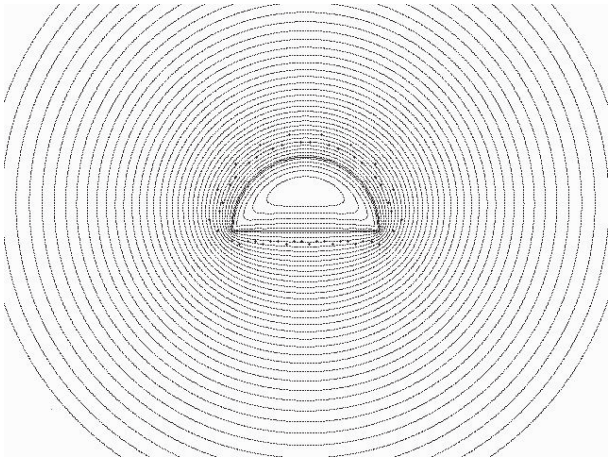


Рис. 1.
$\gamma = 1$, $\mathbf{w}(\infty) = \{0, 0\}$

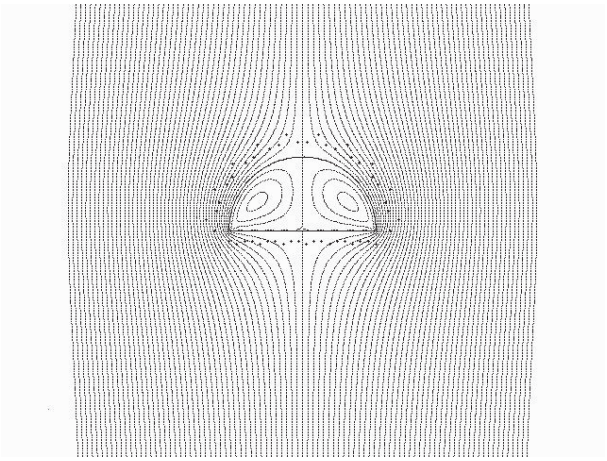


Рис. 2.
$\gamma = 0$, $\mathbf{w}(\infty) = \{0, 1\}$

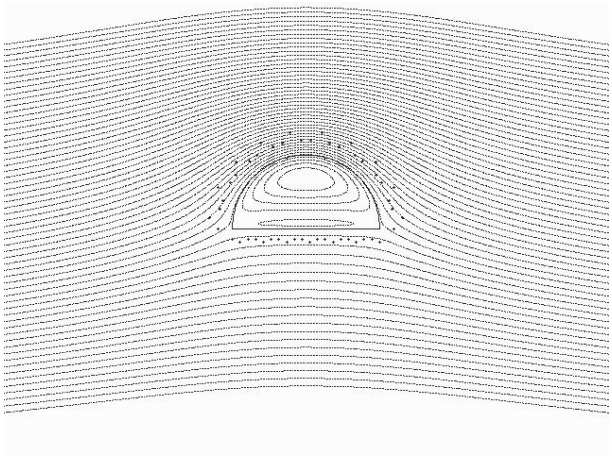


Рис. 3.
$\gamma = 0,2$, $\mathbf{w}(\infty) = \{1, 0\}$

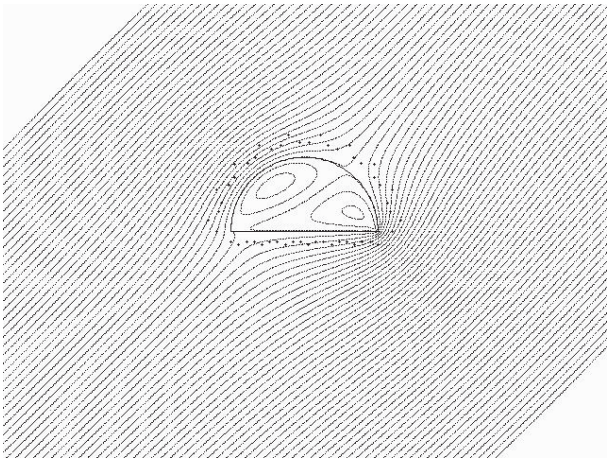


Рис. 4.
$\gamma = 0,3$, $\mathbf{w}(\infty) = \{1, 1\}$

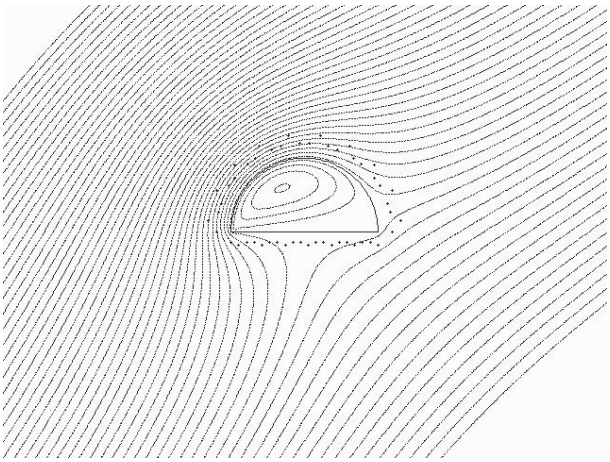


Рис. 5.
$\gamma = 0,1$, $\mathbf{w}(\infty) = \{1, 1\}$

В асимптотическом разложении (14) для $R(\mathbf{x})$ постоянная C не равна нулю [1]

$$C = \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \varphi^*(\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}} = \frac{1}{2\pi}(\varphi^*, 1) \neq 0.$$

Для функции тока удобно рассматривать следующее однопараметрическое представление:

$$\psi = (u_0x_2 - v_0x_1) + \int\limits_Q g_0(\mathbf{y})E\,d\mathbf{y} + \\ + \gamma\int\limits_S g^*(\mathbf{y})E(\mathbf{x}-\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{x}\in Q^+, \quad (16)$$

которое определяет (с точностью до аддитивной константы) функцию тока любого обтекающего течения. Здесь $g_0(\mathbf{y}) = \Delta u(\mathbf{y})$, $u(\mathbf{y})$ — решение краевой задачи (7)–(8) при

$$f(\mathbf{x}) = b - (u_0x_2 - v_0x_1), \quad \mathbf{x}\in S,$$

с фиксированной постоянной $b = b_0$. Циркуляция Γ на профиле S определяется равенством

$$\Gamma = \int\limits_Q g_0(\mathbf{y})\,d\mathbf{y} + \gamma\int\limits_S g^*(\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}}$$

и может быть выбрана любой благодаря параметру γ.

Выбором γ можно получить любую постоянную C в асимптотике (14), следовательно, (16) дает общее представление функции тока.

5. На рис. 1–5 представлены линии тока обтекающих полукруг течений при разных углах атаки α и разных γ (т. е. разных циркуляциях), а также внутренние вихри, непрерывно продолжающие внешнее течение (присоединенные вихри), для всех $b = 1$. Точками на рисунках отмечено расположение базисных точек. На рис. 1 показано чисто циркуляционное обтекание.

Функция тока определялась через представление (16). Алгоритм состоит в аппроксимации искомой плотности $g(\mathbf{y})$ конечными суммами по теореме 2 и в минимизации квадрата нормы разности в $L_2(S)$ для граничного условия.

Литература

1. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
2. *Лежнев В. Г., Данилов Е. А.* Задачи плоской гидродинамики. Краснодар, КубГУ. 2000. 92 с.
3. *Новиков П. С.* Об единственности решения обратной задачи потенциала // ДАН СССР. 1938. Т. XVIII. № 3. С. 165–168.
4. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1983. 521 с.
5. *Лежнев В. Г.* Функция тока задачи плоского обтекания, потенциал Робена и внешняя задача Дирихле // ДАН. 2004. Т. 394. № 5. С. 1075–1079.
6. *Ефремов И. И., Лежнев В. В.,* Метод обратной задачи потенциала в проблеме обтекания // Современные проблемы механики сплошной среды: Труды VII Международной конф. памяти акад. Воровича И. И. Ростов-на-Дону: Ростовский государственный университет, 2001. С. 112–115.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971. 1108 с.
8. *Чередниченко В. Г.* К вопросу об определении плотности тела по заданному потенциалу // ДАН СССР. 1978. Т. 240. № 5. С. 1032–1035.
9. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.: Дрофа, 2003. 840 с.

Статья поступила 7 июня 2005 г.
Кубанский государственный университет
Кубанский государственный технологический университет
© Лежнёв В. В., Лежнёв М. В., Рябченко В. И., 2005