

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-2-31-41

## ОСОБЕННОСТИ ПРОХОЖДЕНИЯ ПЛОСКИХ ВОЛН ЧЕРЕЗ СЛОИСТЫЙ ФОНОННЫЙ КРИСТАЛЛ С НЕСКОЛЬКИМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ МАССИВАМИ ТРЕЩИН

Голуб М. В., Фоменко С. И., Дорошенко О. В.

## FEATURES OF THE PLANE WAVE PROPAGATING THROUGH A LAYERED PHONON CRYSTAL WITH MULTIPLE PERIODIC ARRAYS OF CRACKS

M. V. Golub, S. I. Fomenko, O. V. Doroshenko

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia  
e-mail: m.golub@inbox.ru

*Abstract.* Propagation of elastic waves through a periodically arranged elastic structure composed of two-layered unit-cells (so-called phononic crystal) is considered in the present paper. Periodic arrays of interface strip-like cracks are introduced to influence on pass-bands and band-gaps. Features of plane wave propagation through a layered phononic crystal with multiple periodic arrays of cracks are studied employing the boundary integral equation method. The effect of the number of arrays of cracks on the band-gaps occurrence as well as the distribution of energy flow density in the phononic crystal are analyzed for various numbers of arrays of cracks and different frequencies. The effects of the number of arrays of cracks on the peculiarities of transmission/reflection of wave energy in the periodic structure are illustrated using streamlines, which are constructed via the Umov-Poynting vector. The introduction of periodic arrays of cracks into the layered phononic crystal allows to open it for wave propagation in certain frequency ranges. The latter may have a practical application in the development of acoustic filters.

*Keywords:* elastic waves, phononic crystal, crack, periodic array, band gap, resonance, Umov-Poynting vector.

Фотонные кристаллы, позволяющие эффективно управлять потоком света, широко используются в промышленной сфере, например, при создании специальных покрытий линз и зеркал [1], в нелинейных оптических устройствах [2] и других приложениях. Концепция фотонных кристаллов возникла в 1990-х как развитие идей, лежащих в основе применения фотонных кристаллов, а именно, фотонный кристалл является акустическим эквивалентом фотонного кристалла с периодической конфигурацией упругих и/или пьезоэлектрических компонент.

В фотонных кристаллах за счет оптимизации ячеек и внедрения дополнительных элементов можно управлять потоком волновой энергии. Например, упругие акустические волны не могут распространяться в определенных частотных диапазонах, называемых

запрещенными зонами или полосами заграждения [3].

Использование композитных материалов, в том числе и фотонных кристаллов, привносит множество структурных или механических преимуществ, однако способы изготовления и интеграции пьезоэлектрических компонент являются двумя главными факторами, которые могут иметь длительное воздействие на свойства этих материалов. Эти факторы достаточно сложно контролировать, и как результат, композитные структуры могут получить повреждения и дефекты, такие как отслоения или интерфейсные трещины [4]. С тех пор как фотонные кристаллы стали использоваться при создании современных излучателей, сенсоров и других приборов, распространение бегущих волн в фотонных кристаллах стало предметом пристального инте-

Голуб Михаил Владимирович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: m\_golub@inbox.ru.

Фоменко Сергей Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: sfom@yandex.ru.

Дорошенко Ольга Валерьевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры интеллектуальных информационных систем Кубанского государственного университета; e-mail: oldorosh@mail.ru.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 18-501-12069) и Немецкого научно-исследовательского общества DFG (проект ZH 15/29-1).



где компоненты тензора напряжений  $\sigma_{in}$  связаны с перемещениями согласно закону Гука.

Рассматриваются  $M$  массивов периодических полосовых разрезов или трещин с периодом  $s$  (рис. 1) в предположении, что все трещины параллельны границам разделов слоев фононного кристалла. Предполагается, что трещина  $\Omega_{mj}$  длины  $2l_m$  расположена в  $j$ -м массиве в  $D_m$ -м слое  $H_m$ -й ячейки на расстоянии  $d_m$  от интерфейса  $z = a_{2(H_m-1)}$ , центр трещины располагается на расстоянии  $\chi_{mj} = \chi_m + js$ , где  $\chi_m$  — смещение относительно центра,  $s$  — расстояние между трещинами (период), от оси  $x_2 = 0$ . Другими словами,  $m$ -ый массив трещин длины  $2l_m$  принадлежит прямой  $x_2 = z_m = a_{2(H_m-1)} + d_m$  и соответствующая область обозначается как

$$\Omega_{mj} = \{|x_1 - \chi_m - js| < l_m, x_2 = z_m\}.$$

При этом для нумерации трещин используется индекс  $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  в каждом периодическом массиве. Таким образом, анализируются  $M$  массивов трещин  $\Omega_{mj}$  с одинаковым расстоянием  $s$  между соседними трещинами в каждом массиве. На границах трещин  $\Omega_{mj}$  предполагаются граничные условия отсутствия напряжений. Скачки вектора перемещений на трещине обозначаются как

$$\mathbf{v}_{mj}(x_1) = \mathbf{u}(x_1, z_m + 0) - \mathbf{u}(x_1, z_m - 0),$$

$$|x_1 - \chi_m - js| < l_m.$$

Падающее волновое поле  $\mathbf{u}^{\text{in}}$  в периодической структуре без трещин вычисляется при помощи метода матрицы переноса (подробности можно найти в [11]). В нижнем полупространстве  $\mathbf{u}^{\text{in}}$  является суммой входящей и отраженных волн в результате падения плоских продольных и поперечных волн под углом  $\theta$  к оси  $Ox_2$ . Волновое число падающей волны (как продольной, так и поперечной) предполагается равным  $k_0$ , т.е.

$$\mathbf{u}(x_1, x_2; t) = \mathbf{u}(x_1, x_2; t) \exp(ik_0 x_1 \sin \theta - i\omega t).$$

Множитель  $\exp(ik_0 x_1 \sin \theta - i\omega t)$  опускается в формулах, где это возможно. Волновое число  $k_0$  входящей волны совпадает с  $k_{r0} = \omega/c_{r0}$  ( $r = 1$  или  $2$ ), где скорости продольных и поперечных волн  $c_{1n}$  и  $c_{2n}$  определены в терминах упругих постоянных

$$\begin{aligned} c_{1n} &= \sqrt{(\lambda_n + 2\mu_n)/\rho_n}, \\ c_{2n} &= \sqrt{\mu_n/\rho_n}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Коэффициенты прохождения и отражения в полупространствах определяются, исходя из граничных условий, задающих непрерывность смещений и напряжений, с помощью метода матрицы переноса [12]. Условие непрерывности волновых полей нарушается на берегах трещин, которые свободны от напряжений:

$$\boldsymbol{\tau}(x_1, x_2)|_{\Omega_{mj}} = \mathbf{0}. \quad (1.3)$$

Здесь вектор напряжений  $\boldsymbol{\tau} = \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\}$ .

Полное волновое поле в поврежденной слоистой композитной структуре представляет собой суперпозицию падающего волнового поля  $\mathbf{u}^{\text{in}}$  и волнового поля  $\mathbf{u}^{\text{sc}}$ , рассеянного массивами трещин, т.е.,

$$\mathbf{u}(x_1, x_2) = \mathbf{u}^{\text{in}}(x_1, x_2) + \sum_{m=1}^M \sum_{j=1}^M \mathbf{u}_m^{\text{sc}}(x_1, x_2).$$

## 2. Метод граничных интегральных уравнений

В [13] применялся интегральный подход и метод граничных интегральных уравнений для определения волновых полей в задачах распространения волн в упругом слое с множественными трещинами. В данной работе указанные подходы были модифицированы и расширены на случай фононного кристалла с множественными трещинами. Волновое поле, рассеянное на  $m$ -ом массиве, представляется в виде

$$\mathbf{u}_m^{\text{sc}}(x_1, x_2) = \begin{cases} \mathbf{u}_m^-(x_1, x_2), & x_2 < z_m; \\ \mathbf{u}_m^+(x_1, x_2), & x_2 > z_m. \end{cases} \quad (2.1)$$

Неизвестный вектор напряжений  $\mathbf{p}_m(x_1)$  вводится на интерфейсе  $x_2 = z_m$  вследствие наличия на нем трещин. Тогда могут быть получены следующие представления для волновых полей [14]

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_m^\pm(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}_m^\pm(\alpha, x_2) \mathbf{P}_m(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Контур интегрирования  $\Gamma$  проходит вдоль вещественной оси  $\text{Im}\alpha = 0$  в комплексной плоскости параметра интегрального преобразования  $\alpha$ , отклоняясь от вещественной оси в окрестности полюсов и точек ветвления подынтегральной функции в соответствии с принципом предельного поглощения [15]. В формуле (2.2)  $\mathbf{P}_m(\alpha)$  обозначает преобразование Фурье неизвестного вектора напряжений  $\mathbf{p}_m(x)$ , а  $\mathbf{K}_m^\pm(\alpha, x_2)$  — преобразование Фурье

матриц Грина по переменной  $x_1$ . Устойчивый алгоритм построения матриц Грина, предложенный в [16], был успешно применен для периодических структур в [17].

Скачок перемещений на каждой трещине  $\mathbf{v}_m(x_1)$  связан с вектором напряжений  $\mathbf{p}_m(x)$ . Применение преобразования Фурье к интегральному представлению (2.2) дает следующее соотношение между  $\mathbf{P}_m(\alpha)$  и  $\mathbf{V}_m(\alpha)$ :

$$\mathbf{P}_m(\alpha) = [\mathbf{K}_m^-(\alpha, 0) - \mathbf{K}_m^+(\alpha, 0)]^{-1} \mathbf{V}_m(\alpha) = \mathbf{L}_m(\alpha) \mathbf{V}_m(\alpha),$$

где  $\mathbf{V}_m(\alpha)$  — Фурье-преобразование скачка  $\mathbf{v}_m(x_1)$ . Подстановка (2.2) в закон Гука дает интегральные представления тангенциальной и нормальной составляющих тензора напряжений рассеянных полей

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_m^\pm(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_m^\pm(\alpha, x_2) \mathbf{V}_m(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Периодичность трещин (период  $s$ ) в сочетании с законом Снеллиуса приводит к следующему соотношению

$$\mathbf{u}(x_2) = \mathbf{u}(x_1 - js, x_2) e^{ijsk_0 \sin \theta},$$

следующего из теоремы Флоке [18]. Интегральные представления (2.2) и (2.3) для рассеянных полей  $\mathbf{u}_m^{sc}$  также действительны и для периодических массивов. Соответственно, Фурье преобразования скачков перемещений на трещинах

$$\mathbf{V}_m(\alpha) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{V}_{mj}(\alpha)$$

должны для  $m$ -го периодического массива удовлетворять соотношениям

$$\mathbf{V}_{mj}(\alpha) = \mathbf{V}_{m0}(\alpha) e^{ijs(k_0 \sin \theta + s\alpha)}.$$

Таким образом, система интегральных уравнений может быть сформулирована для базисной (опорной) трещины  $\Omega_{m0}$  в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \sum_{m'=1}^M \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{\Gamma} \mathbf{S}(\alpha, z_m) \mathbf{V}_{mj}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha = \\ = -\boldsymbol{\tau}_M^{\text{in}}(x_1, z_m), \quad |x_1 - \chi_m| < l_m. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Слагаемые в левой части интегрального уравнения (2.4) могут быть заменены на бесконечные суммы следующим образом [17]

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{S}_{m'}(\alpha, z_m) \mathbf{V}_{m0}(\alpha) \times \\ \times \sum_{j=-\infty}^{\infty} e^{i(\alpha+k_0)js - i\alpha x_1} d\alpha = \\ = \frac{2\pi}{s} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \mathbf{S}_{m'}(\alpha_j, z_m) \times \\ \times \mathbf{V}_{m0}(\alpha_j) e^{-i\alpha_j x_1} \Big|_{\alpha_j = 2\pi j/s - k_0 \sin \theta}. \end{aligned}$$

Для решения краевой задачи скачки перемещений на эталонной трещине  $\Omega_{m0}$  (в качестве которой в пределах  $m$ -го массива выбирается трещина, ближайшая к оси  $x_1$ ) аппроксимируются с использованием базисных функций  $\phi_n^m$

$$\mathbf{v}_{m0}(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{c}_{mn} \phi_n^m(x_1). \quad (2.5)$$

Интегральное уравнение (2.4) решается методом Галеркина, где в качестве проекционных используются функции  $\phi_n^m$ , что в результате приводит к следующей бесконечной системе алгебраических уравнений с неизвестными коэффициентами  $\mathbf{c}_{mn}$ :

$$\sum_{m'=1}^M \sum_{n'=1}^{\infty} \mathbf{A}_{mm';nn'} \mathbf{c}_{mn} = \mathbf{f}_{mn}, \quad (2.6)$$

$$m = \overline{1, M}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Система (2.6) решается численно с редукцией до конечного числа слагаемых  $N_s$  и конечного числа неизвестных  $n = 1, 2, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{mm';nn'} = \frac{1}{s} \sum_{j=-N_s}^{N_s} \mathbf{S}(\alpha_j, z_m) \Phi_{n'}(\alpha_j l_{m'}) \times \\ \times \Phi_n^*(\alpha_j^* l_m) e^{i\alpha(\chi_m - \chi_{m'})}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{f}_{mn} = \boldsymbol{\tau}_M^{\text{in}}(0, z_m) \Phi(l_m k_0 \sin \theta).$$

Следует отметить, что рассматриваемая периодическая структура с периодической системой трещин имеет резонансные частоты, что можно четко определить из анализа интегрального уравнения. Данное интегральное

уравнение имеет бесконечное число комплекснозначных резонансных полюсов  $\omega_k$ , которые играют существенную роль в исследовании явлений рассеяния волн. Резонансное волновое колебание структуры могут быть предсказаны согласно действительным значениям резонансных частот  $\omega_k$ .

### 3. Численный анализ

Перенос энергии гармоническими волнами может быть визуализирован с помощью линий тока энергии, которые являются траекториями усредненного по времени потока энергии в упругих средах. Линии тока энергии являются касательными к вектору плотности потока энергии  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ , введенному Н.А. Умовым [19]. Компоненты вектора Умова в случае гармонических колебаний могут быть выражены через компоненты вектора перемещений  $\mathbf{u}$  и вектора напряжений и тензора напряжений  $\sigma_{ij}$

$$e_j = \frac{\omega}{2} \operatorname{Im} \left( \sum_{i=1}^2 \sigma_{ij} u_i^* \right).$$

Коэффициент прохождения энергии  $\kappa^+ = E^+/E^0$  определяется как отношение усредненного по времени потока энергии, передаваемого через слоистый материал  $E^+$ , к энергии, передаваемой плоской волной  $E^0$ . Аналогично для отраженного поля вводится коэффициент отражения  $\kappa^- = E^-/E^0$ , соответственно, должен выполняться закон сохранения энергии ( $\kappa^+ + \kappa^- = 1$ ). Таким образом, коэффициенты прохождения и отражения  $\kappa^\pm$  подходят для численного контроля найденного решения.

#### 3.1. Коэффициенты прохождения и отражения

Рассмотрим фононный кристалл, состоящий из 11 ячеек, каждая из которых является двухслойной и состоит из слоев оксида ( $\rho = 1200 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 1,61 \text{ ГПа}$ ,  $\lambda = 6,38 \text{ ГПа}$ ) и алюминия ( $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$ ,  $\mu = 26 \text{ ГПа}$ ,  $\lambda = 51,1 \text{ ГПа}$ ) одинаковой толщины ( $h_1 = h_2$ ). Периодические массивы полосовых трещин одинаковой ширины ( $l_m = H/2$ ) имеют одинаковые горизонтальные координаты у своих центров, расположенных на интерфейсах слоистой структуры ( $\chi_m = 0$ ), т.е. трещины из одного массива расположены под или над трещинами другого. Первый периодический массив трещин с расстоянием  $s = 2H$  между

трещинами расположен на интерфейсе между слоями 6-ой ячейки. Следующие массивы, состоящие из трещин той же длины с расстоянием  $s$  между их центрами, расположены на расстоянии  $\pm H$  в соседних ячейках, прилегающих к шестой, образуя тем самым симметрию в расположении трещин относительно центра фононного кристалла. Рассматриваются случаи нечетного количества массивов (1, 3, 5 и 7).

На рис. 2 изображены коэффициенты отражения  $\kappa^-$  для случая падения продольной волны на фононный кристалл без дефектов и с различным количеством  $M$  периодических массивов интерфейсных трещин в зависимости от частоты. При этом используется нормированная частота  $\omega H/c_0$ , где  $c_0$  — скорость сдвиговых волн в эпоксиде. Влияние периодичности структуры на поведение коэффициента отражения для случая отсутствия внутренних трещин заключается в формировании запрещенных зон (первая запрещенная зона начинается при  $\omega H/c_0 = 5,95$ ).

На рис. 2 отмечены три наиболее интересных с точки зрения возникающих эффектов частоты. На частоте  $\omega H/c_0 = 4$  наблюдается прохождение продольной волны через фононный кристалл ( $\kappa^- \approx 0,3$ ), при отсутствии трещин. Введение одного периодического массива трещин приводит к уменьшению доли энергии, пропускаемой через структуру ( $\kappa^- \approx 0,7$ ), но не перекрывает волновод полностью. Однако при введении трех и более периодических массивов происходит практически полное запыриание фононного кристалла. В частотном диапазоне от  $\omega H/c_0 = 3,2$  до 7 при увеличении количества массивов трещин формируется дополнительная запрещенная зона, разрываемая лишь разрешенной зоной от  $\omega H/c_0 = 5$  до 5,4. В то же время при  $7 \leq \omega H/c_0 \leq 7,5$ , наоборот, происходит частичное «раскрытие» волновода за счет введения массивов трещин, хотя и значение коэффициента прохождения  $\kappa^+ = 1 - \kappa^-$  не превышает 15 %. Стоит также отметить, что коэффициент прохождения  $\kappa^+$  увеличивается при увеличении числа вводимых массивов трещин.

#### 3.2. Линии тока энергии и вектор плотности потока энергии

С помощью вектора Умова можно наглядно представить информацию о волновых полях, которая хотя и не может быть измерена на практике, но является в некотором смысле более общей, нежели только поля пере-

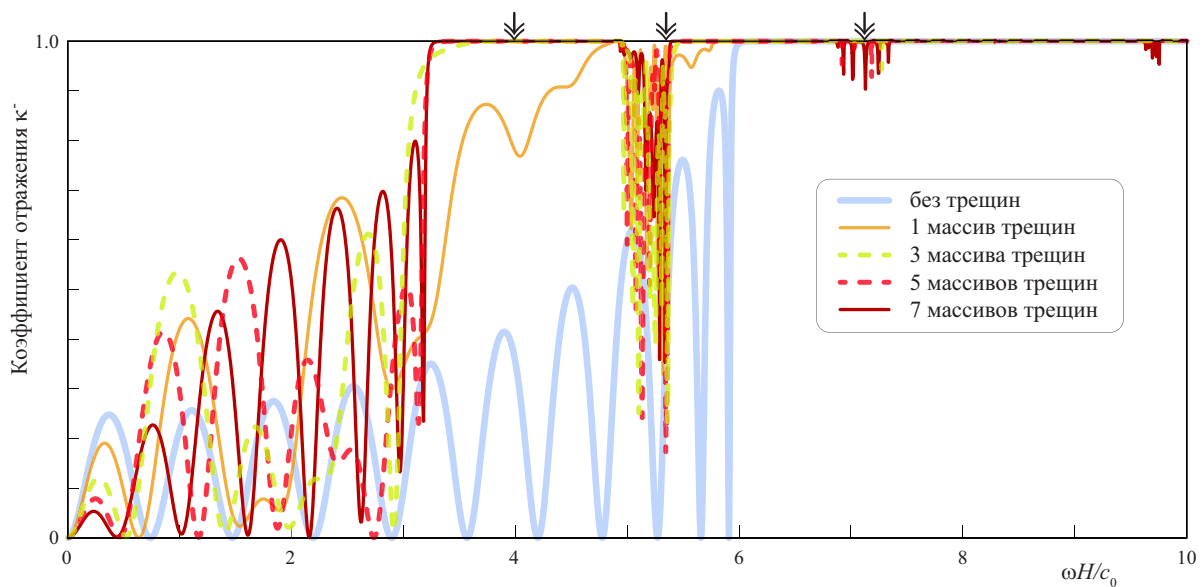


Рис. 2. Коэффициент отражения  $\kappa^-$  для фоновых кристаллов с  $M = 0, 1, 3, 5, 7$  периодическими массивами полосовых разрезов (трещин)

мещений и напряжений по отдельности [20]. При этом можно провести аналогии с плоскопараллельными течениями [21–23], в которых рассмотрены задачи обтекания тел в плоской постановке. На рис. 3–5 изображены линии тока для трех значений частот, описывающих различные эффекты, сопровождающие прохождение продольной волны через фоновый кристалл (соответствующие частоты описаны в п. 3.1 и отмечены стрелками на рис. 2).

Для каждой из частот в случае одного, трех и семи массивов интерфейсных трещин на рис. 3–5 изображены линии тока энергии и модуль вектора плотности потока энергии  $|\mathbf{e}(x_1, x_2)|$ . На рис. 3 можно видеть, что при увеличении числа вводимых массивов трещин  $M$  возникают дополнительные вихри в начале фоновый кристалла, что в результате приводит к возникновению запрещенной зоны. Рис. 4 иллюстрирует волновые процессы, происходящие в структуре при колебаниях на частоте  $\omega H/c_0 = 5,29$ , принадлежащей узкой разрешенной зоне внутри запрещенной зоны, которая сформировалась вследствие введения периодических массивов трещин. При введении одного массива трещин прохождение волновой энергии характеризуется образованием вихрей до и после зоны трещин, для трех массивов трещин энергия концентрируется перед поврежденной зоной, а для семи массивов вихри энергии начинают формироваться за периодическими массивами, что создает предпосылку для открытия вол-

новода. Тем не менее, запрещенные и разрешенные зоны в рассматриваемом частотном диапазоне  $5 \leq \omega H/c_0 \leq 5,4$  очень узкие, и формируемые вихри быстро распадаются или преобразуются. На рис. 5 проиллюстрирован случай «раскрытия» фоновый кристалла за счет введения периодических массивов трещин. Здесь можно наблюдать увеличение количества пропускаемой волноводом энергии на частоте 7,13 при введении дополнительных массивов трещин, однако в данном случае локализация энергии наблюдается в зонах между трещинами. Полученный эффект может иметь практическое применение в разработке акустических фильтров.

## Заключение

В работе рассмотрено прохождение упругих волн через периодически организованную структуру, состоящую из множества двухслойных ячеек и определяемую как фоновый кристалл. Для получения эффектов возникновения запрещенных и разрешенных зон вводились периодические массивы интерфейсных полосовых трещин. Построенные при помощи вектора Умова линии тока позволяют проанализировать влияние количества массивов трещин на особенности прохождения или отражения волновой энергии в волноводе. Описывается эффект «раскрытия» фоновый кристалла за счет введения в него периодических массивов полосовых трещин,

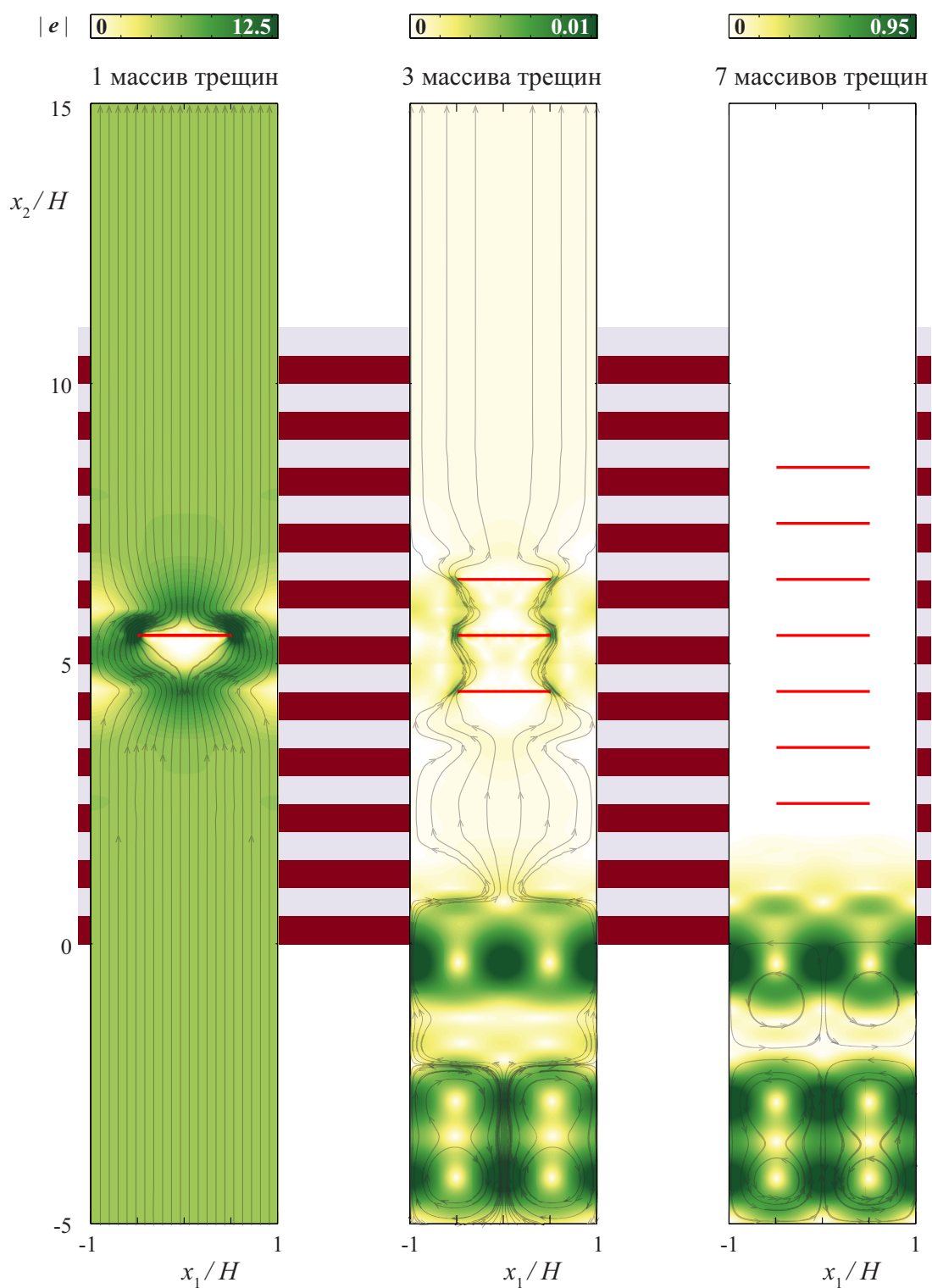


Рис. 3. Модуль вектора плотности потока энергии  $|e(x_1, x_2)|$  и линии тока для фоновых кристаллов с  $M = 1, 3$  и 7 периодическими массивами полосовых разрезов (трещин); частота  $\omega H/c_0 = 4$



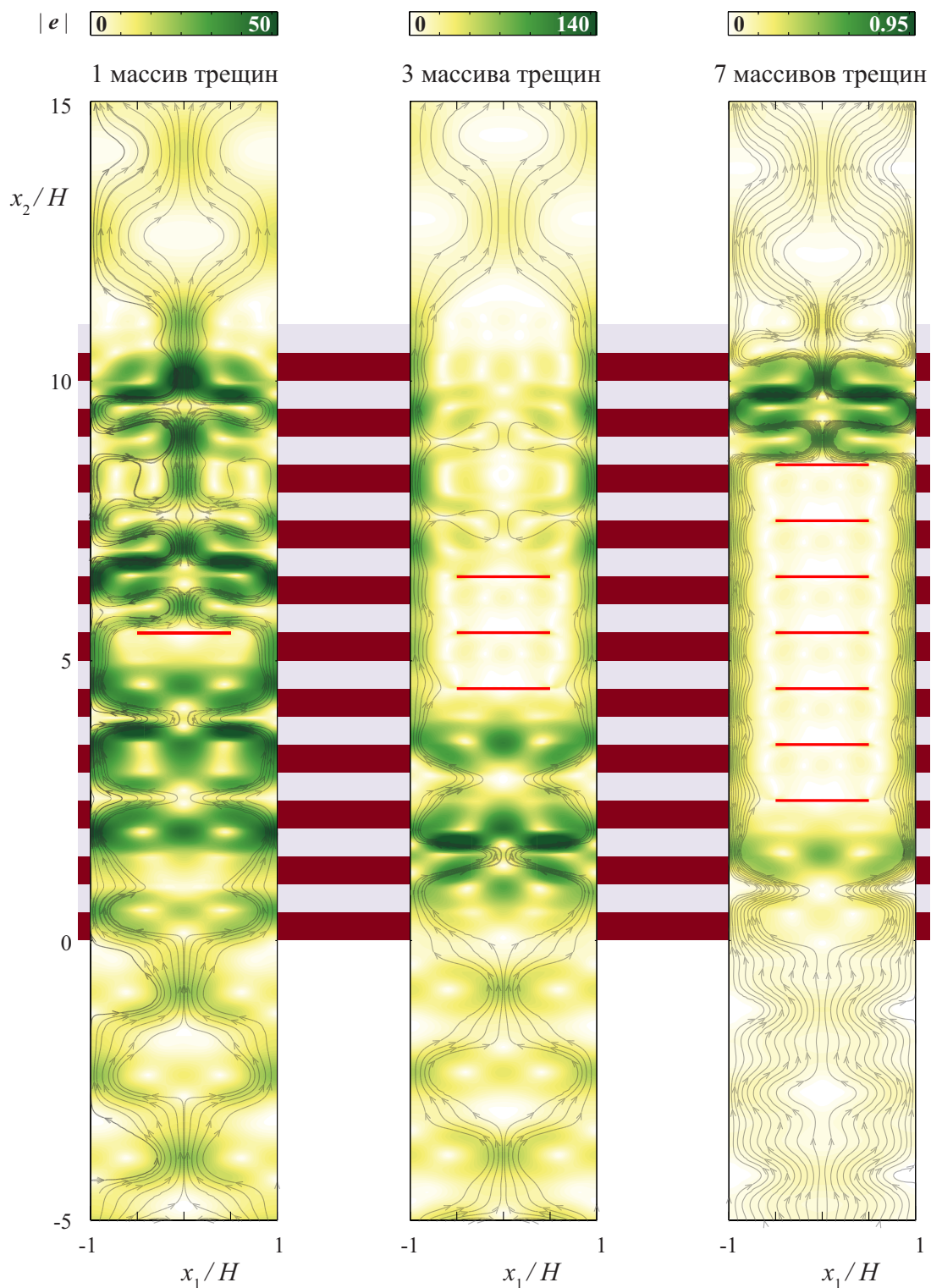


Рис. 4. Модуль вектора плотности потока энергии  $|e(x_1, x_2)|$  и линии тока для фоновых кристаллов с  $M = 1, 3$  и  $7$  периодическими массивами полосовых разрезов (трещин); частота  $\omega H/c_0 = 5,29$



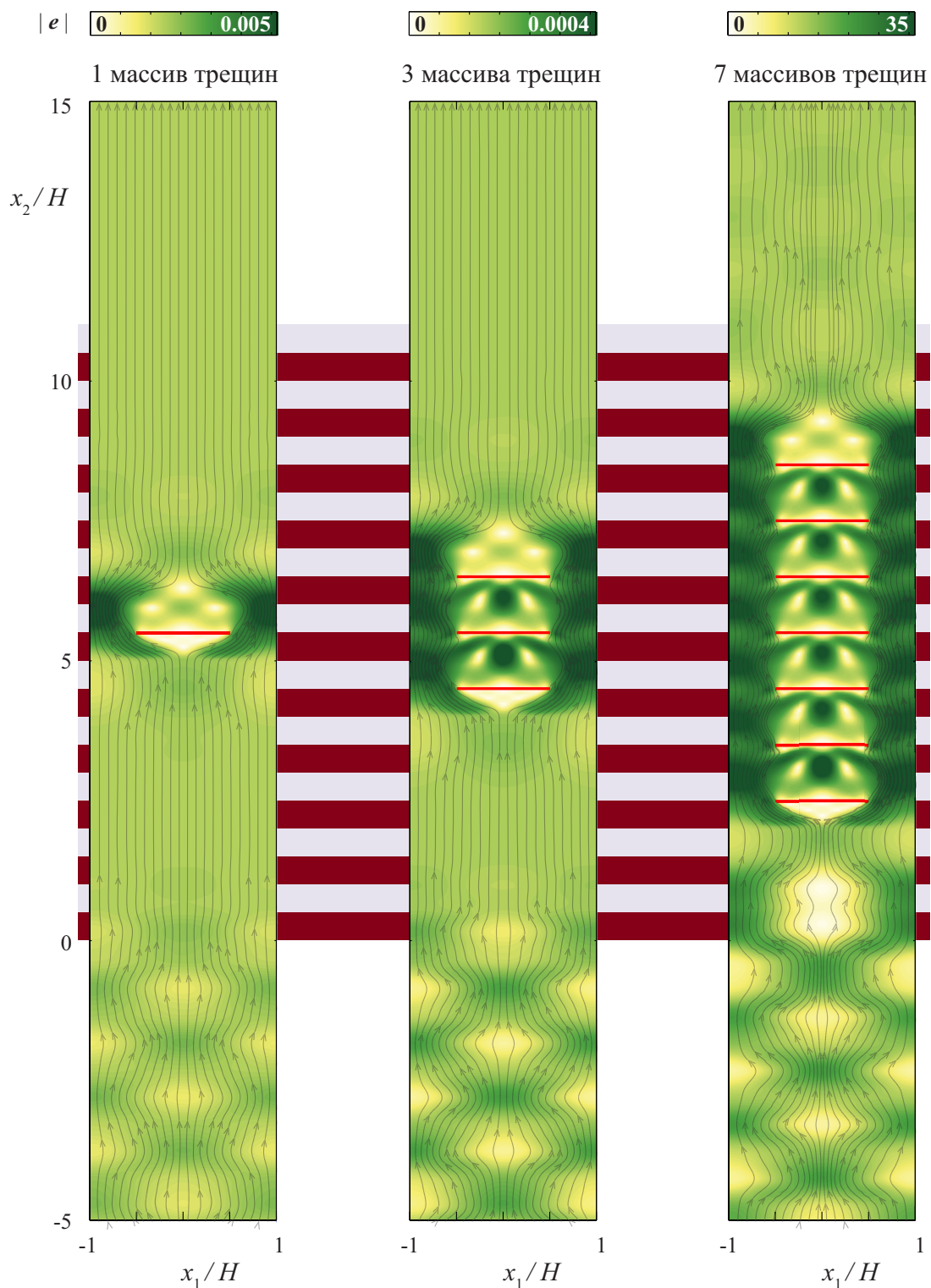


Рис. 5. Модуль вектора плотности потока энергии  $|\mathbf{e}(x_1, x_2)|$  и линии тока для фоновых кристаллов с  $M = 1, 3$  и  $7$  периодическими массивами полосовых разрезов (трещин); частота  $\omega H/c_0 = 7,13$

что может иметь практическое приложение в разработке акустических фильтров.

Авторы выражают благодарность профессорам В.Г. Лежневу, Е.В. Глушкову, Н.В. Глушковой и сотрудникам кафедры численного анализа, которые прививали навыки решения вычислительных задач.

### Литература

1. *Macleod H. A.* Thin-Film Optical Filters, Fourth Edition. CRC Press, USA, 2010. P. 800.
2. *Russell P.* Photonic crystal fibers // *Science*. 2003. Vol. 299(6), P. 358–362.
3. *Srivastava A.* Metamaterial properties of periodic laminates // *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*. 2016. Vol. 96. P. 252–263.
4. *Hwangh H. Y.* Effect of the crack length on the piezoelectric damage monitoring of glass fiber epoxy composite DCB specimens // *Composites Science and Technology*. 2012. Vol. 72. Iss. 8. P. 902–907.
5. *Kutsenko A. A., Shuvalov A. L.* Shear surface waves in phononic crystals // *The Journal of the Acoustical Society of America*. 2013. Vol. 133. N 2. P. 653–660.
6. *Pang Y.* Reflection and transmission of plane waves at an imperfectly bonded interface between piezoelectric and piezomagnetic media // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2011. Vol. 30. Iss. 5. P. 731–740.
7. *Ponge M. F., Cro C., Vasseur J. O.* Control of elastic wave propagation in one-dimensional piezomagnetic phononic crystals // *Journal of the Acoustical Society of America*. 2016. Vol. 139. Iss. 6. P. 3288–3295.
8. *Yan D. J., Chen A. L., Wang Y. S.* Propagation of guided elastic waves in nanoscale layered periodic piezoelectric composites // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2017. Vol. 66. P. 158–167.
9. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
10. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Интегральные преобразования и волновые процессы. Краснодар: Кубанский государственный университет, 2017. 201 с.
11. *Fomenko S. I., Golub M. V., Bui T. Q.* In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals // *International Journal of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51. Iss. 13. P. 2491–2503.
12. *Фоменко С. И., Голуб М. В., Александров А. А.* Численно устойчивый метод определения волновых полей и запрещенных зон в слоистых фоновых кристаллах // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2017. № 3. С. 235–244.
13. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Голуб М. В., Жанг Ч.* Резонансное блокирование бегущих волн системой трещин в упругом слое // *Акустический журнал*. 2009. № 1. С. 11–20.
14. *Glushkov E. V., Glushkova N. V.* On the efficient implementation of the integral equation method in elastodynamics // *Journal of Computational Acoustics*. 2001. Vol. 9(3). P. 889–898.
15. *Свейшников А. Г.* Принцип предельного поглощения для волновода // *ДАН СССР*. 1951. Т. 78. № 3. С. 255–258.
16. *Glushkov E. V., Glushkova N. V., Eremin A. A.* Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites // *Journal of Acoustical Society of America*. 2011. Vol. 129. No. 5. P. 2923–2934.
17. *Golub M. V., Zhang Ch.* In-plane time-harmonic elastic wave motion and resonance phenomena in a layered phononic crystal with periodic cracks // *Journal of Acoustical Society of America*. 2015. Vol. 137. Iss. 1. P. 238–252.
18. *Рабинович М. И., Трубецков Д. И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с.
19. *Umov N. A.* Ableitung der bewegungsgleichungen der energie kontinuierlichen körpern. *Zeitschrift für Mathematik und Physik*. 1874. Vol. 19. Iss. 5. P. 1–22.
20. *Babeshko V. A., Glushkov E. V., Glushkova N. V.* Energy vortices and backward fluxes in elastic waveguides // *Wave Motion*. 1992. Vol. 16. P. 183–192.
21. *Лежнев В. Г., Данилов Е. А.* Задачи плоской гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2000. 91 с.
22. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 111 с.
23. *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* Проекционные алгоритмы вихревых 2D течений в сложных областях // *Таврический вестник информатики и математики*. 2015. № 1. С. 42–49.

### References

1. *Macleod, H. A.* *Thin-Film Optical Filters*. CRC Press, USA, 2010.
2. *Russell, P.* Photonic crystal fibers *Science*, 2003, vol. 299(6), pp. 358–362.
3. *Srivastava, A.* Metamaterial properties of periodic laminates. *J. of the Mechanics and Physics of Solids*, 2016, vol. 96, pp. 252–263.
4. *Hwangh, H. Y.* Effect of the crack length on the piezoelectric damage monitoring of glass fiber epoxy composite DCB specimens. *Composites Science and Technology*, 2012, vol. 72, iss. 8, pp. 902–907.
5. *Kutsenko, A. A., Shuvalov, A. L.* Shear surface waves in phononic crystals. *The J. of the Acoustical Society of America*, 2013, vol. 133, iss. 2, pp. 653–660.

6. Pang, Y. Reflection and transmission of plane waves at an imperfectly bonded interface between piezoelectric and piezomagnetic media. *European J. of Mechanics - A/Solids*, 2011, vol. 30, iss. 5, pp. 731–740.
7. Ponge, M.F., Croenne, C., Vasseur, J.O. Control of elastic wave propagation in one-dimensional piezomagnetic phononic crystals. *J. of the Acoustical Society of America*, 2016, vol. 139, iss. 6, pp. 3288–3295.
8. Yan, D. J., Chen, A. L., Wang, Y. S. Propagation of guided elastic waves in nanoscale layered periodic piezoelectric composites. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 2017, vol. 66, pp. 158–167.
9. Babeshko, V. A., Glushkov, E. V., Zinchenko, Zh. F. *Dinamika neodnorodnykh lineynouprugikh sred* [Dynamics of inhomogeneous linear elastic media]. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)
10. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V. *Integral'nye preobrazovaniya i volnovye processy* [Integral transformations and wave processes]. Kuban State University, Krasnodar, 2017. (In Russian)
11. Fomenko, S. I., Golub, M. V., Bui, T. Q. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals. *Int. J. of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, iss. 13, pp. 2491–2503.
12. Fomenko, S. I., Golub, M. V., Aleksandrov, A. A. Chislenno ustojchivyy metod opredeleniya volnovykh polej i zapreshchennykh zon v sloistyykh fononnykh kristallakh [A numerically stable method for determining wave fields and band gaps in layered phonon crystals]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational mechanics of continuous media], 2017, no. 3, pp. 235–244. (In Russian)
13. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V., Golub, M. V., Zhang, Ch. Rezonansnoe blokirovanie begushchih voln sistemoy treshchin v uprugom sloe [Resonant blocking of traveling waves by a system of cracks in the elastic layer]. *Akusticheskij zhurnal* [Acoustic J.], 2009, no. 1, pp. 11–20. (In Russian)
14. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V. On the efficient implementation of the integral equation method in elastodynamics. *J. of Computational Acoustics*, 2001, vol. 9(3), pp. 889–898.
15. Sveshnikov, A. G. Printsip predel'nogo pogloshcheniya dlya volnovoda [The limit absorption principle for a waveguide]. *Doklady Akademii Nauk USSR* [Rep. of the USSR Academy of Sciences], 1951, vol. 80, no. 3, pp. 345–347. (In Russian)
16. Glushkov, E.V., Glushkova, N.V., Eremin, A.A. Forced wave propagation and energy distribution in anisotropic laminate composites. *J. of Acoustical Society of America*, 2011, vol. 129, no. 5, pp. 2923–2934.
17. Golub, M.V., Zhang, Ch. In-plane time-harmonic elastic wave motion and resonance phenomena in a layered phononic crystal with periodic cracks. *J. of Acoustical Society of America*, 2015, vol. 137, no. 1, pp. 238–252.
18. Rabinovich M. I., Trubetskov D. I. *Vvedenie v teoriyu kolebanij i voln* [Introduction to the theory of oscillations and waves]. NIC “Reguljarnaya i haoticheskaya dinamika”, Moscow, Izhevsk, 2000. (In Russian)
19. Umov N. A. Ableitung der bewegungsgleichungen der energie kontinuierlichen k6rpern *Zeitschrift f6ur Mathematik und Physik*, 1874, vol. 19, iss. 5, pp. 1–22.
20. Babeshko V. A., Glushkov E. V., Glushkova N. V. Energy vortices and backward fluxes in elastic waveguides. *Wave Motion*, 1992, vol. 16, pp. 183–192.
21. Lezhnev V. G., Danilov E. A. *Zadachi ploskoj gidrodinamiki* [Problems of flat hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2000. (In Russian)
22. Lezhnev A. V., Lezhnev V. G. *Metod bazisnykh potencialov v zadachah matematicheskoy fiziki i gidrodinamiki* [The method of basic potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
23. Lezhnev V. G., Markovskij A. N. Proekcionnye algoritmy vihrevykh 2D techenij v slozhnykh oblastyakh [Projection Algorithms of Vortex 2D Flows in Complex Areas]. *Tavricheskij vestnik informatiki i matematiki* [Tauride J. of Computer Science and Mathematics], 2015, no. 1, pp. 42–49. (In Russian)