

## МЕХАНИКА

УДК 519.632.4+532.5.031

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-2-42-47

## ЦИРКУЛЯЦИОННОЕ ОБТЕКАНИЕ ТОНКОЙ ПЛАСТИНКИ

Золотухина В. Г., Бунякин А. В., Марковский А. Н.

CIRCULATION FLOW AROUND A THIN PLATE

V. G. Zolotuhina, A. V. Bunyakin, A. N. Markovsky

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

e-mail: mrkvsk@yandex.ru

*Abstract.* The problem of plane-parallel flow around of contour by flow of an ideal incompressible fluid is considered. The current function in general is represented in the form of three terms: the first term is responsible for the flow in infinity, the second term is the simple layer potential and it is responsible for the potential flow, and finally, the third term is the Roben's potential and is responsible for the circulation flow around the contour. To calculate the current function of the general circulation flow problem, it is required to determine the densities of two potentials. A simple algorithm for calculating unknown densities is proposed, based on the harmonic continuation of the stream function into the region bounding by the contour. For approximation, we use special complete systems of basis potentials – shift systems for the fundamental solution of the Laplace equation with shifts within the region. The approximation coefficients are determined by solving a system of linear equations with a Gram matrix. The algorithm for solving the Roben's problem is briefly described. The results of computational experiments for a thin plate at different circulation values are presented. The results of computer modelling are compared with a picture of the real flow from the album of M. Van-Dyke. The proposed algorithm can be effectively used to calculate the streamflow function, not only thin, but also piecewise-smooth contours of various geometries.

*Keywords:* plane-parallel flow, potential flow, function of current, potential of the Roben, full system potential.

## Введение

Рассматривается задача плоскопараллельного потенциального обтекания контура, или как говорят, цилиндрического тела, когда векторное поле скоростей перпендикулярно образуемому обтекаемого цилиндра. Такая задача сводится к задаче плоского обтекания телесного профиля [1, 2]. Среди методов расчета потенциальных течений идеальной жидкости имеется достаточно большая группа методов, основанных на представлении функции тока в виде потенциала простого слоя. В случае численной реализации для областей произвольной формы все они сводятся к интегрированию по границе области, и поэтому объединяются под общим названием «методы граничных элементов», однако, если область имеет малую относительную толщину например, тонкий крыловой профиль или «пластинка», то возникают вычислительные трудности [3–5].

Как известно, функция тока в общем виде представляется в виде трех слагаемых [6]: первое слагаемое отвечает за набегающий поток, второе слагаемое — потенциал простого слоя отвечает за бесциркуляционное обтекание и, наконец, третье слагаемое — потенциал Робена, отвечает за циркуляционное течение вокруг контура. Для вычисления функции тока требуется определить плотности двух потенциалов. Определение плотности первого потенциала сводится к решению внешней краевой задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Плотность второго потенциала — плотность Робена является собственной функцией интегрального оператора  $B_2^*$  сопряженного оператору потенциала двойного слоя, с собственным числом  $\lambda = 1/2$ , требует решения задачи Робена.

В работе предлагается единый простой алгоритм определения двух плотностей использующий одну систему базисных потенциалов.

Золотухина Вера Геннадьевна, аспирант кафедры теории функций Кубанского государственного университета; e-mail: zolotuhinavera26@yandex.ru.

Бунякин Алексей Вадимович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета; e-mail: alex.bunyakin@mail.ru.

Марковский Алексей Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета; e-mail: mrkvsk@yandex.ru.

### 1. Представление функции тока

1.1. Обозначим через  $Q$  область на плоскости с достаточно гладкой границей  $S = \partial Q$ , например, удовлетворяющей условию Ляпунова с показателем  $\alpha > 0$ ,  $S \in C^{1+\alpha}$ . Внешность области  $Q$  обозначим

$$Q^+ = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}.$$

Требуется в области  $Q^+$  построить векторное поле

$$\mathbf{w}(x) = \{u(x), v(x)\}, \quad x = (x_1, x_2),$$

удовлетворяющее следующим условиям:

- 1)  $\operatorname{div} \mathbf{w}(x) = 0, \operatorname{rot} \mathbf{w}(x) = 0, x \in Q^+$ ;
- 2)  $\mathbf{w}(\infty) = w_0 = \{u_0, v_0\}$ ;
- 3) контур  $S = \partial Q$  — линия тока.

Векторное поле  $\mathbf{w}(x)$  — поле скоростей плоскопараллельного потока идеальной несжимаемой жидкости, обтекающего профиль  $S$ , с заданной скоростью потока на бесконечности  $\{u_0, v_0\}$  [1].

1.2. Из первого условия следует, что существует функция тока  $\Psi(x)$ , такая что  $\mathbf{w}(x) = \nabla_c \Psi(x)$ , где  $\nabla_c = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1} \right\}$  — коградиент. Условие 3) можно переписать в терминах функции тока в виде

$$\Psi(x)|_S = c \equiv \operatorname{const}. \quad (1.1)$$

Обозначим  $E(x) = \frac{1}{2\pi} \ln |x|$  — фундаментальное решение уравнения Лапласа в плоском случае. Для задачи обтекания справедливо следующее интегральное представление функции тока удовлетворяющее условиям 1) и 2):

$$\Psi(x) = (u_0 x_2 - v_0 x_1) + \int_S q(y) E(x - y) dS_y, \quad x \in Q^+ \quad (1.2)$$

для любой плотности  $q \in L_2(S)$ . Требуется определить функцию  $q$  так, что будет выполняться условие 3) при некоторой заданной постоянной  $c$ . Неизвестная функция  $q$  в (1.2) может трактоваться как плотность вихрей, распределённых на контуре  $S$ . Алгоритм приближенного решения [6] состоит в получении аппроксимации  $q^N$  плотности вихрей  $q$

$$q^N(y) = \sum_{m=1}^N c_m \alpha_m^+(y),$$

где  $\alpha_m^+(y) = E(x^{(m)} - y)$  — система базисных потенциалов [6] с носителями  $x^{(m)}$  в  $Q^+$ . Коэффициенты  $c_m$  определяются задачей минимизации квадрата  $L_2(S)$ -нормы

$$\left\| c - (u_0 x_2 - v_0 x_1) - \sum_{m=1}^N \sigma_m(x) \right\| \rightarrow \min_{c_m}$$

где  $\sigma_m$  — потенциалы простого слоя с плотностью  $\alpha_m^+$ . Необходимое условие экстремума приводит к решению системы линейных уравнений с матрицей Грама для системы  $\sigma_m$ ; при этом вычисление элементов матрицы Грама требует вычисления сингулярных интегралов. Более того, такой подход позволяет вычислить конкретное циркуляционное течение соответствующее заданной константе  $c$ , а для построения однопараметрического по циркуляции семейства течений, необходимо еще решать задачу Робена.

В данной работе предлагается единый алгоритм использующий только системы  $\alpha_m^-(x)$  и позволяющий строить сразу общее циркуляционное обтекание, то есть обтекание при любом заданном параметре циркуляции.

### 2. Потенциал и задача Робена

#### 2.1. Потенциал простого слоя

$$R(x) = \int_S \varphi^*(y) E(x - y) dS_y, \quad (2.1)$$

равный константе на границе

$$R(x)|_S = R_S \equiv \operatorname{const}, \quad (2.2)$$

называется *потенциалом Робена* [7]. Функция  $\varphi^*$  и константа  $R_S$  называются *плотностью и константой Робена* соответственно. Для однозначного определения константы дополнительно используют нормирующее условие (условие полного заряда)

$$\int_S \varphi^*(y) dS_y = 1. \quad (2.3)$$

Задача определения плотности  $\varphi^* \in L_2(S)$  называется *задачей Робена*.

2.2. Рассмотрим разложение в ортогональную сумму подпространств

$$L_2(S) = \{\varphi^*\} \oplus L_2^\circ(S). \quad (2.4)$$

Пусть последовательность точек  $x^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , принадлежит области  $Q$ , отделена от границы и удовлетворяет условию

единственности гармонических функций. Будем называть такую последовательность *базисной*.

Обозначим

$$\alpha_m^-(x) = E(x^{(m+1)} - x) - E(x^{(m)} - x),$$

$$x \in S, \quad m = 1, 2, \dots$$

Справедливо утверждение [8].

**Лемма (В.Г. Лежнев).** Система функций  $\alpha_m^-(x)$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , полна и линейно независима в подпространстве  $L_2^{\varphi}(S)$ , если последовательность  $x^{(m)}$  является базисной в  $Q$ .

**2.3.** Алгоритм решения задачи Робена заключается в следующем [9]. Зафиксируем базисную в  $Q$  последовательность точек  $b^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и рассмотрим соответствующую этой последовательности систему функций  $\alpha_m^-(x)$ . В силу ортогональной суммы (2.4) имеем разложение единицы

$$1 = c_0\varphi^* + h = c_0\varphi^* + h^N + \varrho_N, \quad (2.5)$$

где

$$h^N(x) = \sum_{m=1}^N c_m \alpha_m^-(x),$$

— проекция неизвестной функции  $h$  на конечномерное подпространство, натянутое на первые  $N$  функций рассматриваемой системы, и  $\varrho_N \rightarrow 0$ , при  $N \rightarrow \infty$  в силу полноты системы  $\alpha_m^-$ . Умножим скалярно в  $L_2(S)$  тождество (2.5) на  $\alpha_k^-$  при  $k = \overline{1, N}$ , получим систему линейных уравнений с матрицей Грама

$$\sum_{m=1}^N c_m (\alpha_m^-, \alpha_k^-) = (1, \alpha_k^-), \quad (2.6)$$

$$k = \overline{1, N},$$

для определения неизвестных коэффициентов  $c_1, c_2, \dots, c_N$  искомой проекции  $h^N$ .

Решая систему, получаем приближенную плотность Робена

$$c_0\varphi_N^*(x) = 1 - \sum_{m=1}^N c_m \alpha_m^-(x).$$

Константу  $c_0$  можно определить из условия полного заряда (2.3). Таким образом, окончательно имеем приближенную плотность Робена

$$\varphi_N^*(y) = c_0^{-1} \left[ 1 - \sum_{m=1}^N c_m \alpha_m^-(y) \right]$$

и приближенный потенциал Робена

$$R_N(x) = \int_S \varphi_N^*(y) E(x - y) dy, \quad x \in Q^+.$$

Полнота системы  $\alpha_m^-$  обеспечивает сходимость в норме  $L_2(S)$  приближенной плотности Робена  $\varphi_N^*$  к точной  $\varphi^*$ :  $\|\varphi_N^* - \varphi^*\| \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Тогда последовательность приближенных потенциалов  $R_N(x)$  сходится равномерно внутри  $Q^+$  к потенциалу Робена  $R(x)$  и, в силу гладкости  $S$ , равномерная сходимость имеет место вплоть до границы.

### 3. Простой алгоритм вычисления плотности

**3.1.** Рассмотрим ту же, что и в предыдущем пункте, базисную в  $Q$  последовательность точек  $b^{(m)}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , и ту же систему функций  $\alpha_m^-(x)$ . В силу ортогональной суммы (2.4) имеем разложение для плотности  $q$  потенциала из (1.2)

$$q = \gamma\varphi^* + p, \quad (3.1)$$

тогда функция тока представляется в виде суммы трех слагаемых

$$\Psi(x) = (u_0x_2 - v_0x_1) + \int_S p(y) E(x - y) dS_y + \gamma R(x), \quad (3.2)$$

$$x \in Q^+,$$

где первый член отвечает за набегающий поток, потенциал простого слоя отвечает за безциркуляционное обтекание с неизвестной плотностью  $p$ , определяемой однозначно,  $R(x)$  — потенциал Робена, отвечающий за чисто циркуляционное течение с константой  $\gamma$ , задающей интенсивность циркуляции векторного поля.

Плотность потенциала  $p$  принадлежит пространству  $L_2^{\varphi}$ , поэтому может быть аппроксимирована системами  $\alpha_m^-$

$$p = p^N + \varrho_N, \quad (3.3)$$

где

$$p^N = \sum_{m=1}^N c_m \alpha_m^-$$

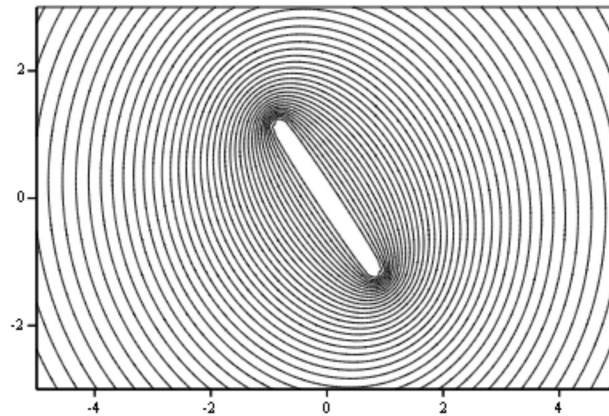


Рис. 1

— проекция неизвестной функции  $p$  на конечномерное подпространство, натянутое на первые  $N$  функций рассматриваемой системы, и  $\varrho_N \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$  в силу полноты системы  $\alpha_m^-$ .

**3.2.** Рассмотрим разность функции тока  $\Psi(x)$  (3.2) в точках  $b^{(k+1)}$  и  $b^{(k)}$ ,  $k = \overline{1, N}$ , имеем

$$\begin{aligned} \Psi(b^{(k+1)}) - \Psi(b^{(k)}) &= (u_0x_2 - v_0x_1)|_{b^{(k+1)}}^{b^{(k)}} + \\ &+ \int_S p(y) \left[ E(b^{(k+1)} - y) - E(b^{(k)} - y) \right] dS_y - \\ &- \gamma R(b^{(k+1)}) - \gamma R(b^{(k)}). \end{aligned}$$

Функция тока (3.2) — гармоническая функция в  $Q^+$ , а также и в  $Q$ , поскольку состоит из трех гармонических в  $Q$  слагаемых, при этом, в силу условия (1.1),  $\Psi(x) \equiv c$ ,  $x \in Q$ , аналогично, потенциал Робена  $R(x) \equiv R_S$ ,  $x \in Q$ , тогда из последнего получаем

$$\int_S p(y) \alpha_k^-(y) dS_y = (u_0x_2 - v_0x_1)|_{b^{(k)}}^{b^{(k+1)}},$$

$$k = \overline{1, N}.$$

Подставляя выражение плотности (3.3) в последнее равенство и используя ортогональность  $\varrho_N$  первым  $N$  элементам системы  $\alpha_m^-$ , имеем алгебраическую систему линейных уравнений с матрицей Грама

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N c_m (\alpha_m^-, \alpha_k^-) &= \\ &= (u_0x_2 - v_0x_1)|_{b^{(k)}}^{b^{(k+1)}}, \quad (3.4) \end{aligned}$$

$$k = \overline{1, N}.$$

из которой определяем неизвестные коэффициенты  $c_1, c_2, \dots, c_N$  искомой проекции  $p^N$ .

Полнота системы  $\alpha_m^-$  обеспечивает сходимость в норме  $L_2(S)$  приближенной плотности  $p^N$  к точной  $p$ :  $\|p^N - p\| \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ . Тогда последовательность приближенных потенциалов сходится равномерно внутри  $Q^+$  к потенциалу с плотностью  $p$ .

**3.3.** В результате имеем приближение функции тока

$$\begin{aligned} \Psi^N(x) &= (u_0x_2 - v_0x_1) + \\ &+ \int_S p^N(y) E(x - y) dS_y + \gamma R_N(x), \quad x \in Q^+, \end{aligned}$$

которое равномерно в  $Q^+$  сходится к искомой функции тока  $\Psi(x)$  при  $N \rightarrow \infty$ . Сходимость обеспечена полнотой системы  $\alpha_m^-$  и тем обстоятельством, что плотность потенциала  $p^N$  и плотность Робена  $\varphi_N^*$  аппроксимируются одной системой функций  $\alpha_m^-$ . Таким образом для построения общего циркуляционного обтекания контура достаточно использовать одну систему потенциалов  $\alpha_m^-$  и решить две системы линейных уравнений (2.6) и (3.4) с одной и той же матрицей Грама. Предлагаемый алгоритм может быть эффективно использован для вычисления функции тока задачи обтекания, не только тонких, но и кусочно-гладких контуров различной геометрии.

#### 4. Вычислительные эксперименты

На рис. 1–5 приводятся результаты численных экспериментов для тонкой пластинки с центром в начале координат. Толщина  $a = 0,1$ , длина  $b = 1,5$ . Пластинка наклонена по отношению к набегающему потоку на угол  $\pi/5$ . Количество базисных точек  $N = 60$ ,

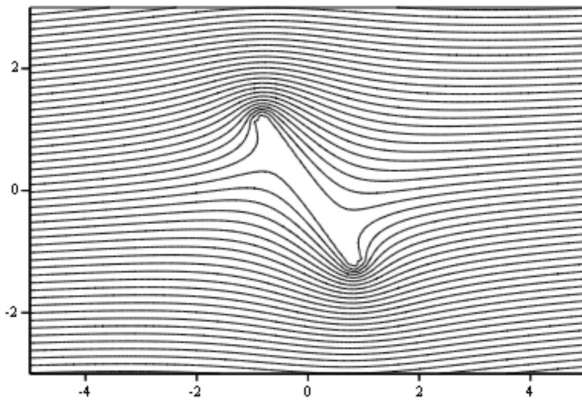


Рис. 2

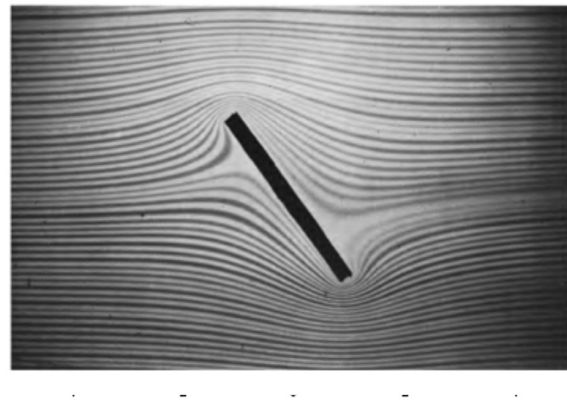


Рис. 3

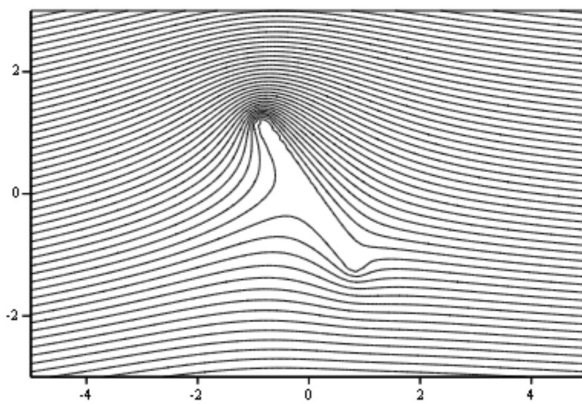


Рис. 4

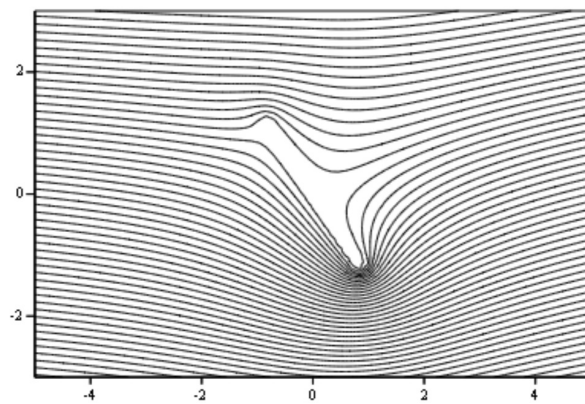


Рис. 5

точки  $b^{(m)}$ ,  $m = \overline{1, N}$ , расположены внутри пластинки параллельно границе на расстоянии 0,02.

На рис. 1 изображены эквипотенциалы Робена — чисто циркуляционное течение вокруг пластинки.

На рис. 2 бесциркуляционное обтекание пластинки  $\gamma = 0$ . На рис. 3 приводится фотография из альбома М. Ван-Дайка [10] реального течения аналогичной пластинки с теми же относительными размерами  $a$  и  $b$ . Фотография реального течения приводится для сравнения результата компьютерного моделирования полученного алгоритмом, предлагаемым в статье. На рис. 4 и 5 представлены картины циркуляционного обтекания при разных значениях циркуляции: рис. 4 —  $\gamma = -0,3$ , рис. 5 —  $\gamma = 0,2$ .

### Литература

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
2. Марсен Дж. Э., Чорин А. Математические основы механики жидкости. М.-Ижевск: НИЦ РХД, 2004. 204 с.
3. Мазо А. Б. Вычислительная гидродинамика. Ч. 1. Математические модели, сетки и сеточные схемы. Казань: КФУ, 2018. 165 с.
4. Мазо А. Б. Вычислительная гидродинамика. Ч. 2. Сеточные схемы метода конечных элементов. Казань: КФУ, 2018. 125 с.
5. Роч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.
6. Лежнев М. В. Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений. Краснодар: КубГУ, 2009. 133 с.
7. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985. 512 с.
8. Лежнев А. В., Лежнев В. Г. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 111 с.
9. Лежнев В. Г., Марковский А. Н. Проекционные алгоритмы вычисления потенциала Робена // Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20. № 4. С. 378–385.
10. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир, 1986. 184 с.

### References

1. Kochin N. E., Kibel' I. A., Roze N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika. Ch. 1* [Theoretical hydromechanics, pt. 1]. Fizmatgiz, Moscow, 1963. (In Russian)
2. Marsden, Dzh. E., Chorin, A. *Matematicheskie osnovy mekhaniki zhidkosti* [Mathematical foundations of fluid mechanics]. RKhD, Moscow–Izhevsk, 2004. (In Russian)
3. Mazo A. B. *Vychislitel'naya gidrodinamika. Ch. 1. Matematicheskie modeli, setki i setochnye skhemy* [Computational fluid dynamics. Part 1. Mathematical models, grids and mesh schemes]. KFU, Kazan, 2018. (In Russian)
4. Mazo A. B. *Vychislitel'naya gidrodinamika. Ch. 2. Setochnye skhemy metoda konechnykh elementov* [Computational fluid dynamics. Part 2. Grid schemes of the finite element method]. KFU, Kazan, 2018. (In Russian)
5. Rouch P. *Vychislitel'naya gidrodinamika* [Computational Fluid Dynamics]. Mir, Moscow, 1980. (In Russian)
6. Lezhnev M. V. *Zadachi i algoritmy ploskoparallelnykh techeniy* [Problems and algorithms of plane-parallel flows]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
7. Vladimirov V. S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Nauka, Moscow, 1985. (In Russian)
8. Lezhnev A. V., Lezhnev V. G. *Metod bazisnykh potentsialov v zadachakh matematicheskoy fiziki i gidrodinamiki* [The method of basic potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
9. Lezhnev V. G., Markovskiy A. N. *Proektsionnye algoritmy vychisleniya potentsiala Robena* [Projection Algorithms for Calculating Robin Potential]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Computational Methods and Programming], 2019, vol. 20, no. 4, pp. 378–385. (In Russian)
10. Van-Dayk M. *Al'bom techeniy zhidkosti i gaza* [Album of fluid and gas flows]. Mir, Moscow, 1986. (In Russian)

---

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2020

© Золотухина В. Г., Бунякин А. В., Марковский А. Н., 2020

Статья поступила 24 января 2020 г.