

## МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-2-48-60

ЛИНИИ ТОКА И ВЕКТОР ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ЭНЕРГИИ  
ПРИ ВОЗБУЖДЕНИИ КОЛЕБАНИЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИМ  
ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ В СЛОИСТОМ ФОНОННОМ КРИСТАЛЛЕ

Фоменко С. И., Голуб М. В., Шпак А. Н., Глинкова С. А.

ENERGY STREAMLINES AND THE POWER DENSITY VECTOR ACCOMPANYING  
WAVE EXCITATION BY A PIEZOELECTRIC TRANSDUCER IN A LAYERED  
PHONONIC CRYSTAL

S. I. Fomenko, M. V. Golub, A. N. Shpak, S. A. Glinkova

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia

e-mail: m.golub@inbox.ru

*Abstract.* The use of periodic composite structures has a great potential for improving sensors/actuators and self-adjusting optics, as well as for active vibration suppression and energy storage systems. At the same time, the employment of dielectric elastomers offers even greater possibilities since they provide tools for the active control of wave energy fluxes. The mathematical formulation of the problem considers more general state equations for piezoelectric bodies. Namely, the absence of symmetry in elastic and piezoelectric tensors is taken into account. The present study investigates the features of elastic wave excitation by a surface piezoelectric transducer (generally made of dielectric elastomer) in multi-layered periodic composites or so-called phononic crystals. A hybrid approach is used to solve the boundary value problem, which involves application of the spectral element method and the boundary integral equation method. Employing the energy streamlines and the power density vector, wave phenomena associated with the interaction of a piezoelectric transducer with a layered phononic crystal at frequencies belonging to four frequency ranges (band gaps, pass bands and the frequency ranges, in which only a quasi-transverse or quasi-longitudinal waves propagate without attenuation) are analyzed.

*Keywords:* elastic waves, waveguide, dielectric elastomer, piezoelectric transducer, hybrid scheme, energy streamlines, Umov-Poynting vector.

## Введение

В настоящее время при строительстве многих промышленных объектов, таких как трубопроводы, мосты, самолеты и др., в них нередко также встраивается система контроля их целостности и работоспособности, работающая в режиме on-line. Область науки, включающая в себя разработку и внедрение таких систем, а также проведение теоретических и экспериментальных исследований с целью развития более надежных и эффективных методов контроля работоспособности, получила название мониторинг состояния кон-

струкций (structural health monitoring) [1, 2]. Значительное количество методов мониторинга основано на использовании упругих волн [3]. Например, волны Лэмба способны распространяться на значительные расстояния без сильного затухания и рассеиваться на неоднородностях различного типа, что позволяет использовать их для обнаружения дефектов в тонкостенных конструкциях [4–6].

Применение периодических композитных структур, таких как акустические метаматериалы и фононные кристаллы, имеет большой потенциал для совершенствования сенсоров/актуаторов и самонастраивающейся оп-

Фоменко Сергей Иванович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной математики Кубанского государственного университета; e-mail: sfom@yandex.ru

Голуб Михаил Владимирович, д-р физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: m\_golub@inbox.ru.

Шпак Алиса Николаевна, канд. физ.-мат. наук, младший научный сотрудник Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: alisashpak7@gmail.com.

Глинкова Софья Андреевна, аспирант кафедры математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета; e-mail: glinkvasfja@gmail.com.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Администрации Краснодарского края (проект 19-41-230012).

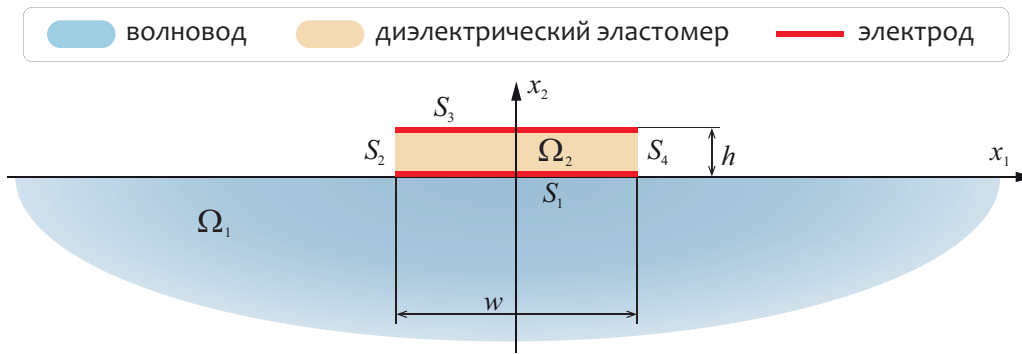


Рис. 1. Геометрия поставленной задачи

тики, а также при создании систем активного подавления вибрации и аккумуляции энергии [7, 8]. Использование вместе с этим диэлектрических эластомеров открывает еще большие возможности, так как позволяет активно управлять потоками волновой энергии [9, 10]. На настоящий момент распространение и дифракция волн в акустических метаматериалах на основе диэлектрических эластомеров изучены для относительно небольшого количества задач.

В настоящей работе изучаются особенности возбуждения упругих волн поверхностным пьезоэлектрическим преобразователем в многослойном периодическом композите, который принято называть фононным кристаллом. Для описания состояния диэлектрических эластомеров необходимо учитывать только отсутствие симметрии в тензорах их упругих и пьезоэлектрических постоянных, при этом уравнения движения по форме не отличаются от уравнений для обыкновенных пьезоэлектрических материалов [9, 10]. Рассматриваются линии тока и вектор плотности потока энергии [11, 12], возникающие при воздействии пьезоэлектрического преобразователя на слоистый фононный кристалл. С помощью вектора Умова–Пойнтинга и соответствующих линий тока можно наглядно проиллюстрировать процессы распространения волн. При этом описываются потоки волновой энергии, которые хотя и не могут быть измерены на практике, но представляют более общую картину распространения упругих волн, нежели поля перемещений и напряжений по отдельности [13, 14]. Кроме того, могут быть проведены аналогии с гидродинамическими задачами [15–17], в которых рассмотрены плоскопараллельные течения.

## 1. Постановка задачи

Для моделирования колебаний, возбуждаемых пьезоэлектрическим преобразователем, рассматривается многослойное упругое полупространство  $\Omega_1$  и приклеенный на его поверхности преобразователь ширины  $w$  и высоты  $h$ , см. рис. 1. Область контакта  $S_1$  является общей для слоя и пьезоэлектрического преобразователя, на ней предполагается идеальный контакт между волноводом и преобразователем.

Электро-механические уравнения состояния для диэлектрического эластомера отличаются от случая пьезоэлектрического материала, но при этом имеют сходный вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= C_{ijkl}u_{k,l} - e_{kij}E_k, \\ D_i &= e_{ikl}u_{k,l} + \varepsilon_{ij}E_j, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений,  $D_i$  — тензор диэлектрических перемещений,  $u_{k,l}$  — производная вектора перемещений  $u_k$  по переменной  $x_l$ ,  $C_{ijkl}$ ,  $e_{kij}$ ,  $\varepsilon_{ik}$  — упругие, пьезоэлектрические и диэлектрические константы соответственно. При этом компоненты вектора электрических перемещений

$$E_k = -\frac{\partial \phi}{\partial x_k} \quad (1.2)$$

задаются через электрический потенциал  $\phi$ . В случае диэлектрического эластомера учитывается отсутствие симметрии в тензорах упругих и пьезоэлектрических постоянных, значения которых зависят от предварительной деформации вследствие растяжения или воздействия внешнего электрического поля [9, 10].

Рассматриваются установившиеся гармонические колебания в двумерной постановке

для плоского деформированного состояния. Вектор перемещений  $\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x})$  удовлетворяет уравнениям Лямэ в упругом слоистом полупространстве

$$(\lambda(x_1) + \mu(x_1)) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) + \mu(x_1) \Delta \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) + \rho^{(1)}(x_1) \omega^2 \mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.3)$$

Здесь  $\omega$  — круговая частота, связанная с частотой  $f = \omega/2\pi$ . Свойства упругого стратифицированного полупространства  $\Omega_1$  задаются константами Ляме  $\lambda(x_1)$ ,  $\mu(x_1)$  и плотностью  $\rho^{(1)}(x_1)$ , которые указывают на неоднородность волновода вдоль оси  $Ox_2$ . Рассматриваются слоистые волноводы, составленные из  $M$  двухслойных ячеек толщины  $H = h_1 + h_2$  (толщины слоев  $h_1$  и  $h_2$ ), повторяющиеся периодически и расположенные на поверхности полупространства  $x_2 \leq MN$ . Таким образом, рассматриваются кусочно-постоянные функции  $\lambda(x_1)$ ,  $\mu(x_1)$ ,  $\rho^{(1)}(x_1)$ .

Уравнения движения для пьезоэлектрической структуры  $\Omega_2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + \rho^{(2)} \omega^2 u_i^{(2)}(\mathbf{x}) &= 0, \\ \frac{\partial D_i^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь верхний индекс 2 указывает на принадлежность пьезоэлектрическому преобразователю  $\Omega_2$ .

Электрический сигнал подается на нижнюю и верхнюю границы преобразователя, которые обозначены соответственно  $S_1 = \{0 \leq x_1 \leq w, x_2 = 0\}$  и  $S_3 = \{0 \leq x_1 \leq w, x_2 = h\}$ :

$$\begin{aligned} \phi^{(2)}(\mathbf{x}) &= V_1, \quad \mathbf{x} \in S_1, \\ \phi^{(2)}(\mathbf{x}) &= V_2, \quad \mathbf{x} \in S_3. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Боковые границы пьезоэлектрического преобразователя обозначены как  $S_2 = \{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq h\}$  и  $S_4 = \{x_1 = w, 0 \leq x_2 \leq h\}$ . Границы пьезоактуатора  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$  свободны от напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)}(\mathbf{x}) \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_3 \cup S_4, \quad (1.6)$$

где  $\mathbf{n}$  — нормаль. Электрические перемещения  $D^{(2)}(\mathbf{x})$  равны нулю на боковых границах пьезоэлектрического преобразователя

$$D_1^{(2)}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2 \cup S_4. \quad (1.7)$$

Для удобства вводится вектор  $\boldsymbol{\tau} = \{\sigma_{12}, \sigma_{22}\}$ , составленный из нормальных и касательных напряжений. Тогда граничные условия на свободных от напряжений границах можно записать:

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = 0, \quad \mathbf{x} \in \{x_2 = 0\} \setminus S_1. \quad (1.8)$$

Граничные условия в области контакта при этом принимают вид

$$\boldsymbol{\tau}^{(1)} = \boldsymbol{\tau}^{(2)}, \quad \mathbf{x} \in S_1, \quad (1.9)$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \mathbf{u}^{(2)}, \quad \mathbf{x} \in S_1. \quad (1.10)$$

## 2. Общая схема решения задачи

### 2.1. Метод спектральных элементов

Для моделирования колебаний пьезоэлектрического преобразователя используется метод спектральных элементов в частотной области, основанный на вариационной постановке математической задачи. Компоненты вектора решения  $\mathbf{y} = \{u_1^{(2)}, u_2^{(2)}, \phi^{(2)}\}$  принадлежат пространству Соболева  $H^2$  функций, интегрируемых с квадратом, и их производных порядка  $k < 2$ :

$$\begin{aligned} Y = \left\{ \mathbf{y}(\mathbf{x}) \mid y_i \in H^2(\Omega_2), \right. \\ \left. y_3(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_1, \right. \\ \left. y_3(\mathbf{x}) = V_2(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S_3 \right\}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Вариационная формулировка уравнений (1.4) для пьезоактуатора  $\Omega_2$  записывается в следующей форме:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial x_j} v_i(\mathbf{x}) d\Omega + \\ + \rho^{(2)} \omega^2 \int_{\Omega_2} u_i^{(2)}(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\int_{\Omega_2} \frac{\partial D_i^{(2)}(\mathbf{x})}{\partial x_i} v_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0.$$

Тестовые функции  $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$  принадлежат пространству

$$\begin{aligned} W = \left\{ \mathbf{v}(\mathbf{x}) \mid v_i(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega_2), \right. \\ \left. v_3(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_1 \cup S_3 \right\}, \end{aligned}$$

которое вводится с учетом граничных условий (1.5). Интегрирование по частям приводит к слабой постановке уравнений движения (2.2)

$$\oint_{\partial\Omega_2} \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) n_j dS - \int_{\Omega_2} \sigma_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}) \frac{\partial v_i(\mathbf{x})}{\partial x_j} d\Omega + \rho^{(2)} \omega^2 \int_{\Omega_2} u_i^{(2)}(\mathbf{x}) v_i(\mathbf{x}) d\Omega = 0, \quad (2.3)$$

$$\oint_{\partial\Omega_2} D_i^{(2)}(\mathbf{x}) v_3(\mathbf{x}) n_i dS - \int_{\Omega_2} D_i^{(2)}(\mathbf{x}) \frac{\partial v_3(\mathbf{x})}{\partial x_i} d\Omega = 0.$$

Метод спектральных элементов предполагает дискретизацию прямоугольной области  $\Omega_2$  на  $M_i$  конечных элементов вдоль соответствующей оси  $Ox_i$ . Перемещения  $u_i^{(2)}$  и электрический потенциал  $\phi^{(2)}$  аппроксимируются интерполяционными полиномами  $C^I(x)$  на узлах Гаусса–Лежандра–Лобатто на каждом элементе [18]. Вектор решения  $\mathbf{u}$  системы (2.3) записывается в следующем виде:

$$y_k(\mathbf{x}) = \sum_I y_k^I C^I(x_1, x_2), \quad k = \overline{1,3}, \quad (2.4)$$

где  $C^I(x_1, x_2) = C^{I_1}(x_1) C^{I_2}(x_2)$  — используемые интерполяционные полиномы,  $I(I_1, I_2)$  — индекс, зависящий от номера элемента и номера полинома. Эти же интерполяционные полиномы используются для тестовых функций  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in W$ :

$$v_i(\mathbf{x}) = C^{I'}(x_1, x_2). \quad (2.5)$$

Подстановка (2.4)–(2.5) в (2.3) приводит к системе линейных алгебраических уравнений, решение которой позволяет определить значения перемещений и электрического потенциала в узловых точках.

### 2.2. Метод граничных интегральных уравнений

Рассмотрим поверхностную нагрузку  $\mathbf{q}(x_1)$  на верхней границе многослойного волновода, тогда перемещения, возбуждаемые

нагрузкой  $\mathbf{q}(x_1)$ , могут быть рассчитаны на основе метода граничных интегральных уравнений [19–21]

$$\mathbf{u}^{(1)}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \mathbf{K}(\alpha, x_2) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \quad (2.6)$$

где  $\mathbf{K}(\alpha, x_2)$  — преобразование Фурье матрицы Грина упругого слоистого стратифицированного волновода,  $\mathbf{Q}(\alpha)$  — преобразование Фурье поверхностной нагрузки  $\mathbf{q}(x_1)$ . Таким образом, волновые поля в упругом слое, возбуждаемые пьезоэлектрическим преобразователем, могут быть рассчитаны на основе метода граничных интегральных уравнений, если известна поверхностная нагрузка. Эта функция находится из решения связанной задачи, схема решения описана в разделе 2.3.

### 2.3. Гибридная схема

Для решения связанной задачи (1.4)–(1.10) необходимо рассчитать волновые поля (2.6) так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (1.9)–(1.10). Введем функцию напряжений, такую, что

$$\boldsymbol{\tau}^1 = \boldsymbol{\tau}^2 = \mathbf{q}(x_1), \quad \mathbf{x} \in S_1.$$

Неизвестная вектор-функция  $\mathbf{q}(x_1)$  аппроксимируется сплайнами:

$$s^+(x) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.7)$$

$$s^-(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 \leq x \leq 0; \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

по значениям в узловых точках, принадлежащих  $S_1$ :

$$\mathbf{q}(x_1) = \sum_{m=1}^{M_1} \left( \sum_{i_1=2}^N \mathbf{q}_{m i_1} \left( s_{m i_1}^+(x_1) + s_{m i_1}^-(x_1) \right) + \mathbf{q}_{m 1} s_{m 1}^+(x_1) + \mathbf{q}_{m N+1} s_{m N+1}^-(x_1) \right). \quad (2.8)$$

Преобразование Фурье представления (2.8) с помощью индекса  $J$ , нумерующего узлы, принадлежащие  $S_1$ , можно переписать в виде

$$\mathbf{Q}(\alpha) = \sum_J \mathbf{q}^J S_J(\alpha), \quad (2.9)$$

где  $S_J(\alpha)$  — преобразование Фурье сплайнов, соответствующих комбинациям сплайнов  $s^\pm(x_1)$  в (2.8).

Для удовлетворения граничным условиям (1.9)–(1.10) функция (2.8) подставляется в (2.3), а её Фурье-символ (2.9) — в интегральное представление (2.6), после чего применяется метод Бубнова–Галеркина. Выражение, получаемое из условия непрерывности перемещений в области контакта, проецируется на функции  $S_{J'}$  (индекс определяется так же, как и  $J$ ). Таким образом, составляется система линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{g} = \mathbf{f}$$

относительного вектора неизвестных [22]

$$\mathbf{g} = \{y_1^I, y_2^I, y_3^I, q_1^J, q_2^J\}.$$

Ненулевыми в правой части  $\mathbf{f}$  являются элементы, соответствующие узлам, в которых задан электрический потенциал согласно граничным условиям (1.5). Матрица левой части составлена из нескольких матриц меньшей размерности

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{11} & \mathbf{A}^{12} & \mathbf{A}^{13} & \mathbf{B}^1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^{21} & \mathbf{A}^{22} & \mathbf{A}^{23} & \mathbf{0} & \mathbf{B}^2 \\ \mathbf{A}^{31} & \mathbf{A}^{32} & \mathbf{A}^{33} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{D}^1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{F}^{11} & \mathbf{F}^{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}^2 & \mathbf{0} & \mathbf{F}^{21} & \mathbf{F}^{22} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $\mathbf{A}^{ij}$ ,  $\mathbf{B}^j$  и  $\mathbf{D}^j$  составляются в рамках МСЭ после подстановки (2.4)–(2.5) в слабую постановку (2.3). Компоненты матриц  $\mathbf{F}^{ik}$  рассчитываются на основе контурного интеграла, возникающего после подстановки выражения (2.9) в представление (2.6) и в соответствии с граничными условиями (1.10)

$$F_{J'J}^{ik} = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} K_{ik}(\alpha, 0) S_J(\alpha) S_{J'}^*(\alpha^*) d\alpha.$$

### 3. Численный анализ

Для анализа волновых явлений вместо полей перемещений и напряжений рассматривается вектор плотности потока энергии  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ , предложенный Н.А. Умовым [11], который описывает усредненный по времени поток энергии в упругой среде. В этом случае явления в рассматриваемых структурах могут быть визуализированы с помощью линий тока энергии, являющихся касательными к

вектору  $\mathbf{e}$  [13, 14]. Компоненты вектора Умова в случае гармонических колебаний могут быть выражены через компоненты вектора перемещений  $\mathbf{u}$  и тензора напряжений  $\sigma_{ij}$

$$e_j = \frac{\omega}{2} \text{Im} \left( \sum_{i=1}^2 \sigma_{ij} u_i^* \right).$$

Рассмотрим фононный кристалл, состоящий из  $M$  ячеек, каждая из которых является двухслойной и состоит из слоев оксида алюминия ( $\rho = 4000$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 162,5$  ГПа,  $\lambda = 139,5$  ГПа) и алюминия ( $\rho = 2700$  кг/м<sup>3</sup>,  $\mu = 26$  ГПа,  $\lambda = 51,1$  ГПа) одинаковой толщины ( $h_1 = h_2$ ), и расположенный на полупространстве из алюминия. На поверхности фононного кристалла помещен пьезоэлектрический преобразователь ширины  $w = 10$  мм,  $h = 0,2$  мм из материала PIC-155 ( $C_{1111} = 120$  ГПа,  $C_{1112} = 67,3$  ГПа,  $C_{2222} = 94,4$  ГПа,  $C_{1212} = 22,3$  ГПа;  $e_{211} = -7,24$  Кл/м<sup>2</sup>,  $e_{212} = 13,77$  Кл/м<sup>2</sup>,  $e_{112} = 11,91$  Кл/м<sup>2</sup>;  $\varepsilon_{11} = 9,12$  Ф/м,  $\varepsilon_{22} = 7,55$  Ф/м;  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>).

Для лучшего понимания рассматриваемых волновых явлений предварительно следует оценить, какие плоские волны могут распространяться в слоистом фононном кристалле. Для этого достаточно решить дисперсионное уравнение для двухслойной ячейки с периодическими граничными условиями на верхней и нижней границах ячейки [23, 24]. На рис. 2 приведены вещественные  $\text{Re} \zeta_k$  и мнимые  $\text{Im} \zeta_k$  части волновых чисел  $\zeta_k$ , которые удовлетворяют соответствующему дисперсионному уравнению для плоских волн, распространяющихся в бесконечном фононном кристалле, составленном из двухслойных ячеек, в направлении перпендикулярном границам раздела между слоями. В частотном диапазоне  $0 \leq \omega_0 \leq 12$  ( $\omega_0 = \omega H/c$ , где  $c$  — скорость поперечных волн в алюминии) можно видеть три разрешенных зоны, одну запрещенную зону, а также несколько частотных диапазонов, в которых без затухания распространяется только одна из двух возможных волн (квази-поперечная или квази-продольная).

На рис. 3–6 изображены модуль вектора плотности потока энергии  $|\mathbf{e}(x_1, x_2)|$  и линии тока энергии, возникающие при воздействии пьезоэлектрического актуатора. Рассматриваются четыре частоты, которые отмечены стрелками на рис. 2 и принадлежат четырем

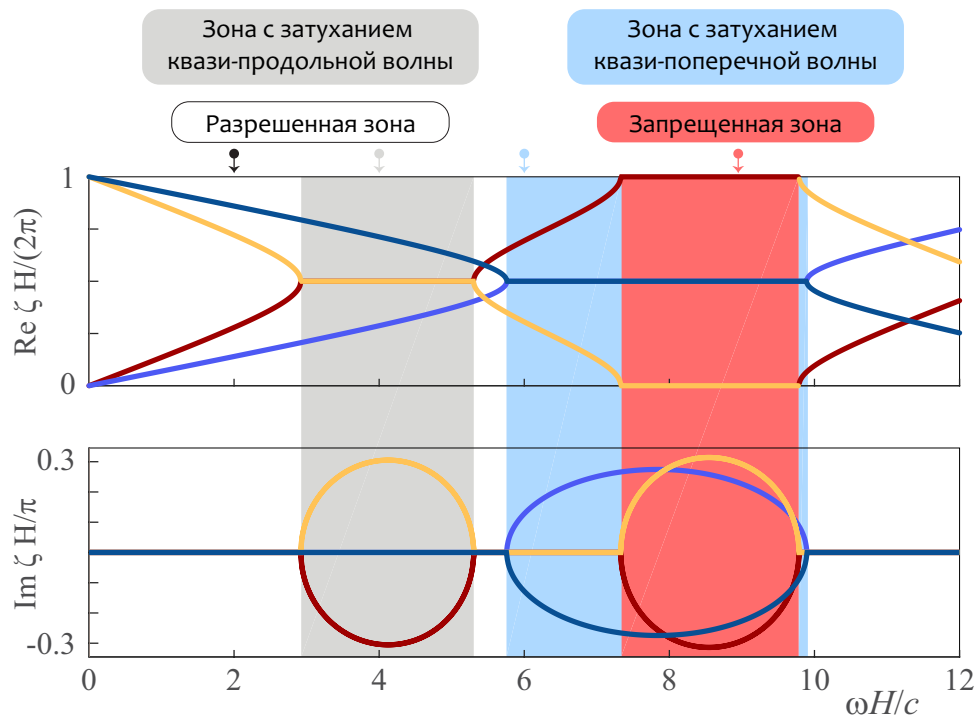


Рис. 2. Вещественные  $\text{Re}\zeta_k$  (а) и мнимые части  $\text{Im}\zeta_k$  (б) волновых чисел  $\zeta_k$  плоских волн распространяющихся в бесконечном фоновом кристалле, составленном из двухслойных ячеек

различным частотным диапазонам, описанные ранее. При этом рассмотрены четыре различных конфигурации структуры:  $M = 0$  (однородное полупространство),  $M = 1$ ,  $M = 5$  и  $M = 15$  ячеек, которые формируют соответствующий фоновый кристалл на поверхности полупространства.

При фактическом отсутствии фононного кристалла ( $M = 0$ ) в полупространстве возбуждаются волны Рэлея и объемные волны, уводящие часть волновой энергии, поступающей от актуатора, вглубь полупространства. С введением многослойного пакета на поверхности полупространства происходит сложное перераспределение энергии между поверхностными, каналовыми и объемными волнами. Так, на частоте  $\omega_0 = 2$ , принадлежащей разрешенной зоне фононного кристалла, при увеличении числа ячеек доля энергии, отводимая вглубь полупространства, увеличивается (рис. 3).

В частотных диапазонах, где без затухания распространяется только квази-поперечная или квази-продольная волна (рис. 4 и 5) наличие периодических расположенных слоев приводит к тому, что излучение в полупространство, на котором лежат

слои, оказывается более затрудненным и большая часть энергии отводится поверхностными и каналовыми волнами внутри фононного кристалла. При этом для частоты, принадлежащей зоне с затуханием квази-поперечной волны в полупространство, актуатор практически не излучает волновую энергию (рис. 5). На частоте  $\omega_0 = 9$ , соответствующей запрещенной зоне (см. рис. 2),  $M = 15$  ячеек достаточно, чтобы полностью заблокировать передачу волновой энергии под актуатор (рис. 6г). Здесь необходимо также заметить, что передача колебаний в полупространство не оказывается полностью «под запретом», но формируется «зона тени» под актуатором, а большая часть энергии уносится поверхностными волнами.

### Заключение

В работе изучаются особенности возбуждения упругих волн поверхностным пьезоэлектрическим преобразователем (в общем случае из диэлектрического эластомера) в многослойных периодических композитах, называемых фоновыми кристаллами. Для решения используется гибридный подход, который предполагает сочетание метода спек-

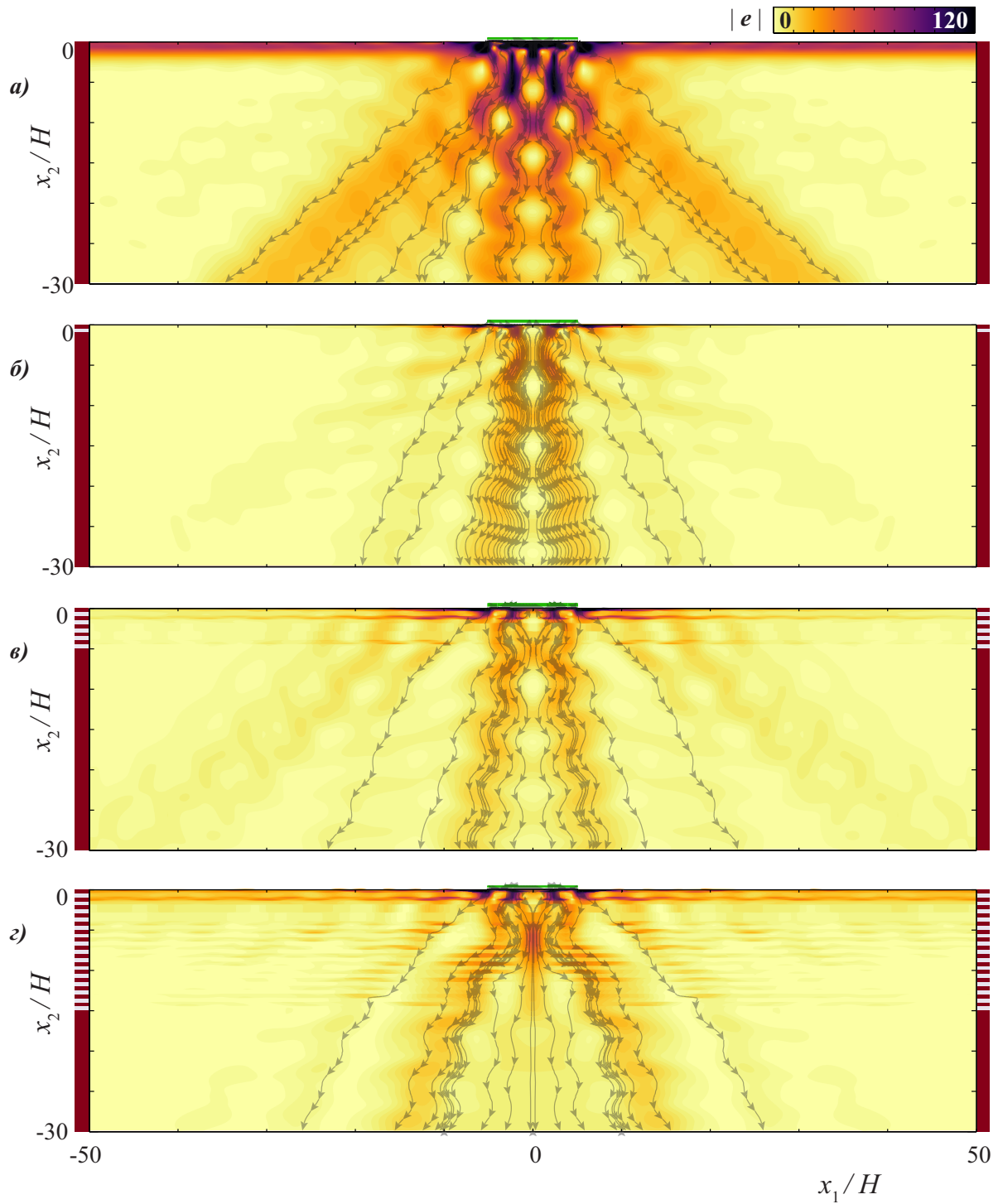


Рис. 3. Модуль вектора плотности потока энергии  $|e(x_1, x_2)|$  и линии тока в структуре с  $M = 0$ (а),  $M = 1$ (б),  $M = 5$ (в) и  $M = 15$ (г) периодически повторяющимися ячейками при действии актуатора на частоте  $\omega_0 = 2$

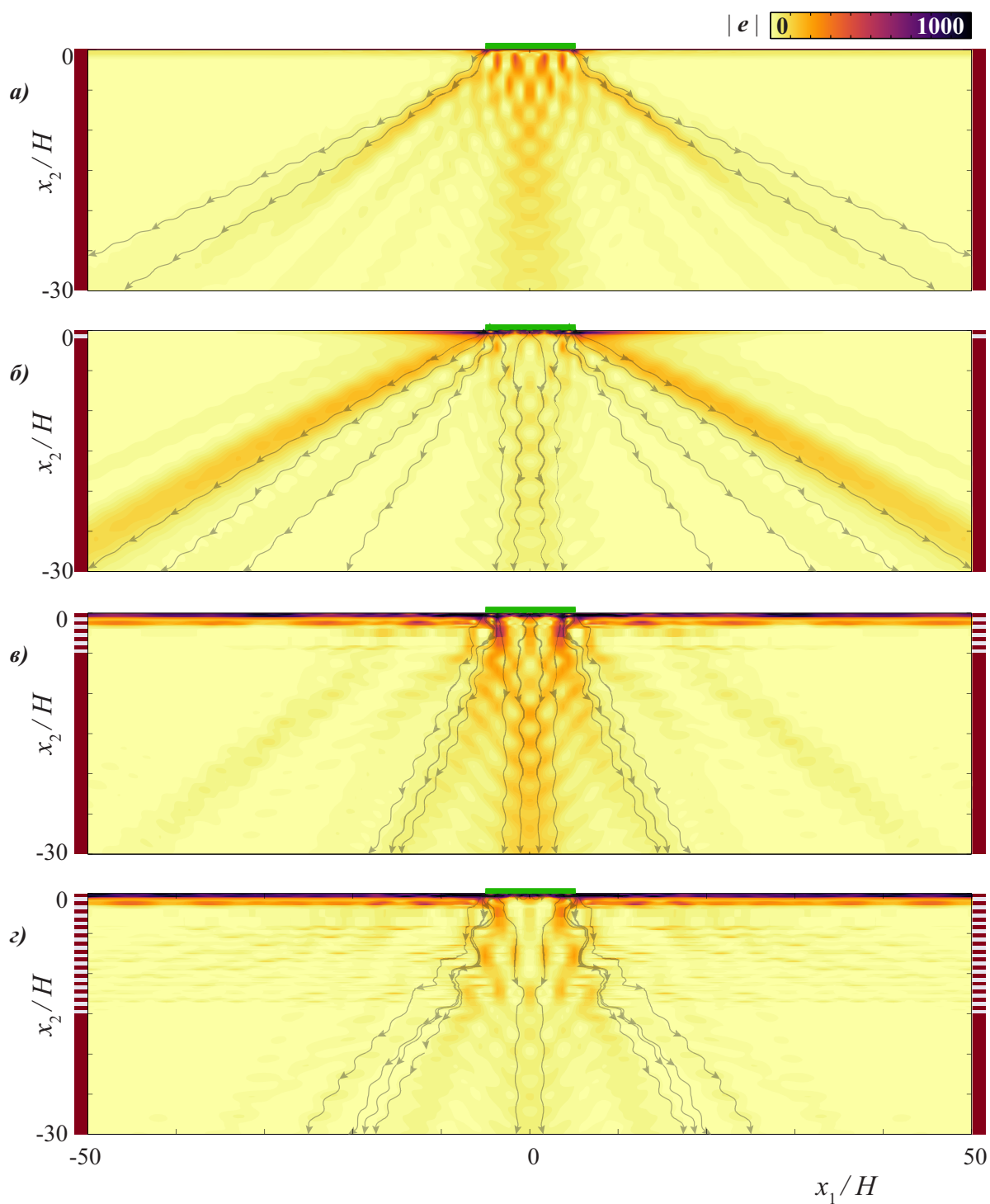


Рис. 4. Модуль вектора плотности потока энергии  $|e(x_1, x_2)|$  и линии тока в структуре с  $M = 0$ (а),  $M = 1$ (б),  $M = 5$ (в) и  $M = 15$ (г) периодически повторяющимися ячейками при действии актуатора на частоте  $\omega_0 = 4$



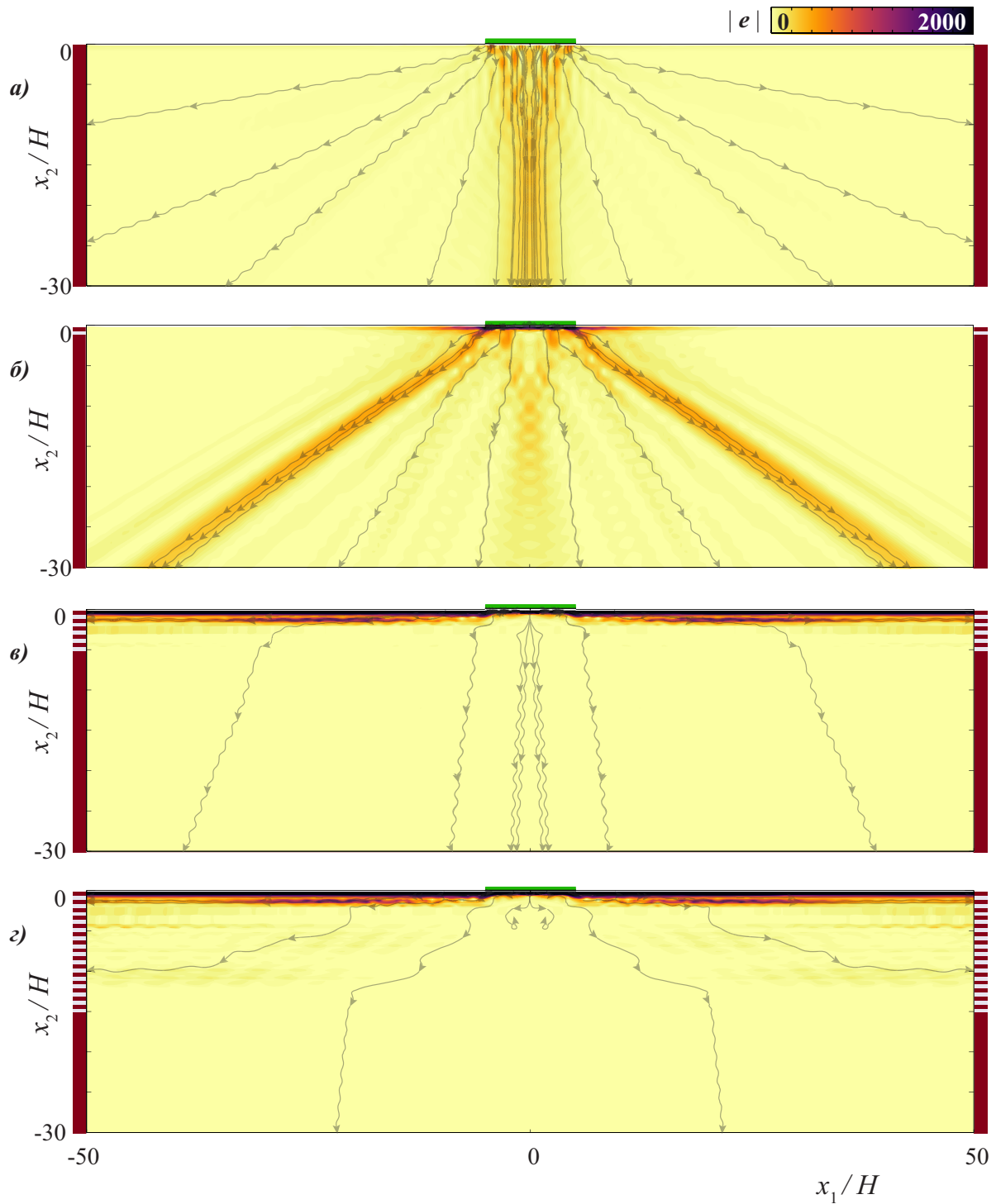


Рис. 5. Модуль вектора плотности потока энергии  $|e(x_1, x_2)|$  и линии тока в структуре с  $M = 0$ (а),  $M = 1$ (б),  $M = 5$ (в) и  $M = 15$ (г) периодически повторяющимися ячейками при действии актуатора на частоте  $\omega_0 = 6$

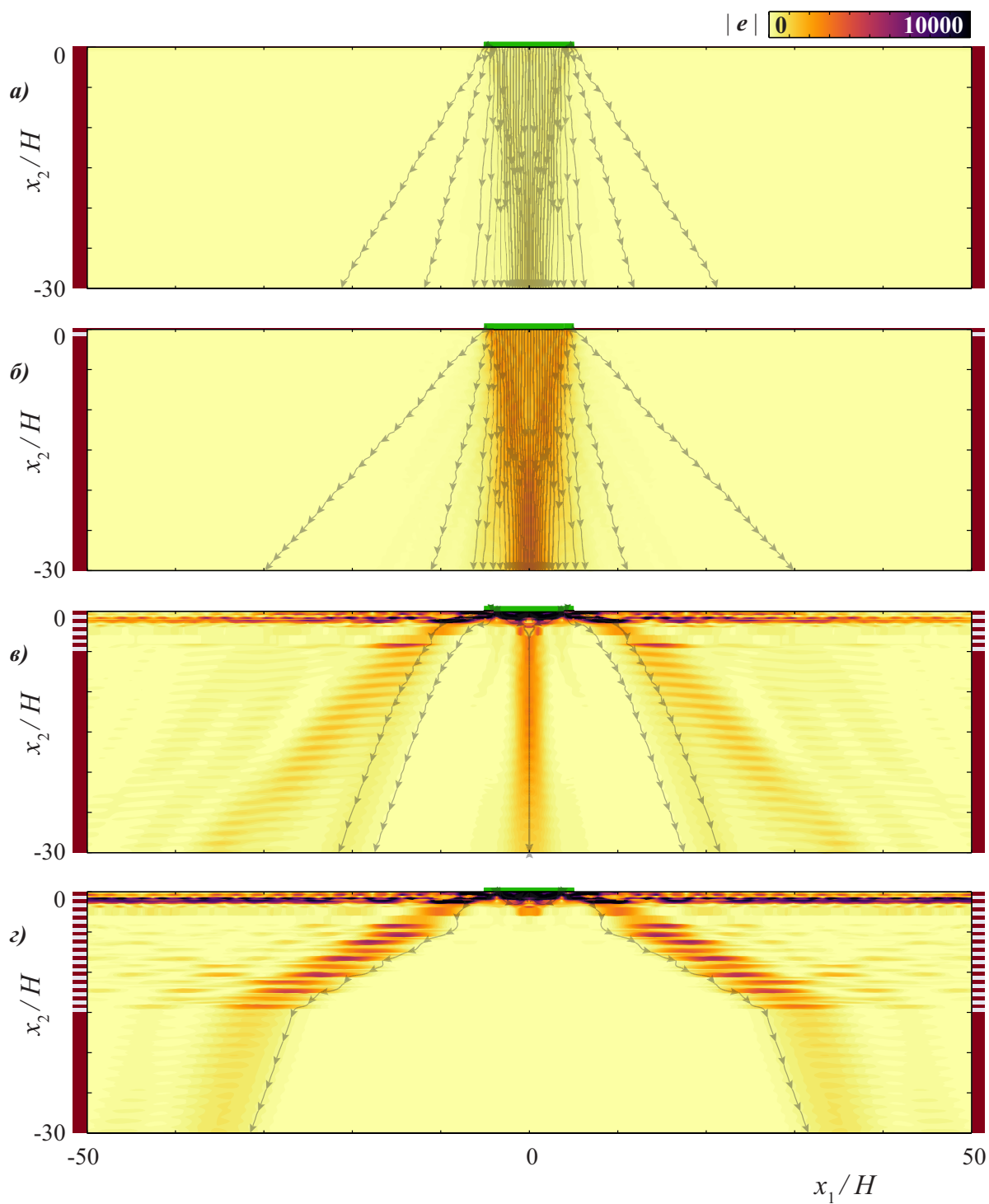


Рис. 6. Модуль вектора плотности потока энергии  $|e(x_1, x_2)|$  и линии тока в структуре с  $M = 0$ (а),  $M = 1$ (б),  $M = 5$ (в) и  $M = 15$ (г) периодически повторяющимися ячейками при действии актуатора на частоте  $\omega_0 = 9$

тральных элементов и метода граничных интегральных уравнений. С использованием линий тока и вектора плотности потока энергии анализируются волновые явления, связанные с воздействием пьезоэлектрического преобразователя на слоистый фононный кристалл на частотах, принадлежащих четырем частотным диапазонам (разрешенные зоны, запрещенные зоны и частотные диапазоны, в которых без затухания распространяется только квази-поперечная или квази-продольная волна).

*Авторы выражают признательность профессорам В. Г. Лежневу, Е. В. Глушкову и Н. В. Глушковой за пробуждение интереса к изучению течений и линий тока, а также за плодотворное обсуждение различных методов решения задач математической физики.*

### Литература

1. *Giurgiutiu V.* Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors. Second edition. Elsevier Academic Press, 2014. P. 1012.
2. *Матвеев В. П., Клигман Е. П., Юрлов М. А., Юрлова Н. А.* Моделирование и оптимизация динамических характеристик smart-структур с пьезоматериалами // Физическая мезомеханика. 2012. № 1. С. 75–85.
3. *Raghavan A., Cesnik C. E. S.* Review of guided wave structural health monitoring // The Shock and Vibration Digest. 2007. Vol. 39. Iss. 2. P. 91–114.
4. *Alleyne D. N., Cawley P.* The interaction of Lamb waves with defects // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 1992. Vol. 1. P. 381–397.
5. *Eremin A. A., Glushkov E. V., Glushkova N. V., Lammering R.* Guided wave time-reversal imaging of macroscopic localized inhomogeneities in anisotropic composites // Structural Health Monitoring, 2019. Vol. 18. Iss. 5–6. P. 1803–1819.
6. *Eremin A. A., Golub M. V., Glushkov E. V., Glushkova N. V.* Identification of delamination based on the lamb wave scattering resonance frequencies // NDT & E International. 2019. Vol. 103. P. 145–153.
7. *Веселаго В. Г.* Волны в метаматериалах: их роль в современной физике // Успехи физических наук. 2011. № 11. С. 1201–1205.
8. *Никитов С. А., Григорьевский А. В., Григорьевский В. И.* Особенности распространения поверхностных акустических волн в двумерных фононных кристаллах на поверхности кристалла ниобата лития // Радиотехника и электроника. 2011. № 7. С. 876–888.
9. *Galich P. I., Rudykh S.* Shear wave propagation and band gaps in finitely deformed dielectric elastomer laminates: Long wave estimates and exact solution // Journal of Applied Mechanics. 2018. Vol. 87. P. 21–28.
10. *Li J., Slesarenko V., Galich P. I., Rudykh S.* Oblique shear wave propagation in finitely deformed layered composites // Mechanics Research Communications. 2018. Vol. 87. P. 21–28.
11. *Умов Н. А.* Уравнения движения энергии в телах. Одесса: Типогр. Ульриха и Шульце, 1874. 56 с.
12. *Умов Н. А.* Избранные сочинения. М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 574 с.
13. *Киселев А. П.* Поток энергии упругих волн. Записки научного семинара ЛОМИ // 1979. № 89. С. 120–123.
14. *Глушков Е. В.* Распределение энергии поверхностного источника в неоднородном полупространстве // Прикладная математика и механика. 1983. № 47. С. 70–75.
15. *Лежнев В. Г., Данилов Е. А.* Задачи плоской гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2000. 91 с.
16. *Лежнев А. В., Лежнев В. Г.* Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 111 с.
17. *Лежнев В. Г., Марковский А. Н.* Проекционные алгоритмы вихревых 2D течений в сложных областях // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 26. С. 42–49.
18. *Голуб М. В., Шпак А. Н., Бюте И., Фритцен К. П.* Моделирование гармонических колебаний и определение резонансных частот полосового пьезоэлектрического актуатора методом конечных элементов высокого порядка точности // Вычислительная механика сплошных сред. 2015. № 4. С. 397–407.
19. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Анализ волновых полей, возбуждаемых в упругом стратифицированном полупространстве, поверхностными источниками // Акустический журнал. 1986. № 3. С. 366–371.
20. *Бабешко В. А., Глушков Е. В., Зинченко Ж. Ф.* Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
21. *Глушков Е. В., Глушкова Н. В.* Интегральные преобразования и волновые процессы. Краснодар: Кубанский государственный университет, 2017. 201 с.
22. *Golub M. V., Shpak A. N.* Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure // Applied Mathematical Modelling. 2019. Vol. 65. P. 234–255.
23. *Fomenko S. I., Golub M. V., Chen A.* In-plane elastic wave propagation and band-gaps in

layered functionally graded phononic crystals // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 439. P. 219–240.

24. Фоменко С. И., Голуб М. В., Александров А. А. Численно устойчивый метод определения волновых полей и запрещенных зон в слоистых фоновых кристаллах // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. № 10. С. 235–244.

### References

1. Giurgiutiu, V. *Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors*. Elsevier Academic Press, 2014.
2. Matveenko, V. P., Kligman, E. P., Yurlov, M. A., Yurlova, N. A. Modelirovanie i optimizaciya dinamicheskikh harakteristik smart-struktur s p'ezomaterialami [Modeling and optimization of dynamic characteristics of smart-structures with piezomaterials]. *Fizicheskaya mezomekhanika* [Physical Mesomechanics], 2012, no. 1, pp. 75–85. (In Russian)
3. Raghavan, A., Cesnik, C. E. S. Review of guided wave structural health monitoring. *The Shock and Vibration Digest*, 2007, vol. 39, no. 2, pp. 91–114.
4. Alleyne, D. N., Cawley, P. The interaction of lamb waves with defects. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*, 1992, vol. 1, pp. 381–397.
5. Eremin, A. A., Glushkov, E. V., Glushkova, N. V., Lammering, R. Guided wave time-reversal imaging of macroscopic localized inhomogeneities in anisotropic composites. *Structural Health Monitoring*, 2019, vol. 18, iss. 5–6, pp. 1803–1819. DOI: 10.1177/1475921719830612
6. Eremin, A. A., Golub, M. V., Glushkov, E. V., Glushkova, N. V. Identification of delamination based on the lamb wave scattering resonance frequencies. *NDT & E International*, 2019, vol. 103, pp. 145–153.
7. Veselago, V. G. Volny v metamaterialah: ih rol' v sovremennoj fizike [Waves in metamaterials: their role in modern physics]. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Advances in Physical Sciences], 2011, no. 11, pp. 1201–1205. (In Russian)
8. Nikitov, S. A., Grigor'evskij, A. V., Grigor'evskij, V. I. Osobennosti rasprostraneniya poverhnostnykh akusticheskikh voln v dvumernykh fononnykh kristallah na poverhnosti kristalla niobata litiya [Features of the propagation of surface acoustic waves in two-dimensional phonon crystals on the surface of a lithium niobate crystal]. *Radiotekhnika i elektronika* [Radio Engineering and Electronics], 2011, no. 7, pp. 876–888. (In Russian)
9. Galich, P. I., Rudykh, S. Shear wave propagation and band gaps in finitely deformed dielectric elastomer laminates: Long wave estimates and exact solution. *J. of Applied Mechanics*, 2018, vol. 87, pp. 21–28.
10. Li J., Slesarenko V., Galich P. I., Rudykh S. Oblique shear wave propagation in finitely deformed layered composites. *Mechanics Research Communications*, 2018, vol. 87, pp. 21–28.
11. Umov, N. A. *Urvneniya dvizheniya energii v telah* [The equations of motion of energy in bodies]. Tipogr. Ul'riha i SHul'ce, Odessa, 1874. (in Russian)
12. Umov, N. A. *Izbrannye sochineniya* [Selected Works]. Gostekhizdat, Moscow, Leningrad, 1950. (In Russian)
13. Kiselev, A. P. Potok energii uprugih voln [The flow of energy of elastic waves]. *Zapiski nauchnogo seminara LOMI* [Notes of the LOMI Scientific Seminar], 1979, no. 89, pp. 120–123. (In Russian)
14. Glushkov, E. V. Raspredelenie energii poverhnostnogo istochnika v neodnorodnom poluprostanstve [Energy distribution of a surface source in an inhomogeneous half-space]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1983, no. 47, pp. 70–75. (In Russian)
15. Lezhnev, V. G., Danilov, E. A. *Zadachi ploskoj gidrodinamiki* [Problems of flat hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2000. (In Russian)
16. Lezhnev, A. V., Lezhnev, V. G. *Metod bazisnykh potencialov v zadachah matematicheskoy fiziki i gidrodinamiki* [The method of basic potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
17. Lezhnev, V. G., Markovskij, A. N. Proekcionnye algoritmy vihrevykh 2D techenij v slozhnykh oblastyakh [Projection Algorithms of Vortex 2D Flows in Complex Areas]. *Tavricheskij vestnik informatiki i matematiki* [Tauride J. of Informatics and Mathematics], 2015, no. 26, pp. 42–49. (In Russian)
18. Golub, M. V., Shpak, A. N., Byute, I., Fritcen, K. P. Modelirovanie garmonicheskikh kolebanij i opredelenie rezonansnykh chastot polosovogo p'ezoelektricheskogo aktuatora metodom konechnykh elementov vysokogo porjadka tochnosti [Modeling harmonic oscillations and determining the resonant frequencies of a strip piezoelectric actuator using the finite element method of high order of accuracy]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational mechanics of continuous media], 2015, no. 4, pp. 397–407. (In Russian)
19. Babeshko, V. A., Glushkov, E. V., Glushkova, N. V. Analiz volnovykh polej, vzbuzhdaemykh v uppugom spatificipovannom poluppostpanstve, povephnostnymi istochnikami [Analysis of wave fields excited in

- elastic stratified half-space, surface sources]. *Akusticheskij zhurnal* [Acoustic J.], 1986, no. 3, pp. 366–371. (In Russian)
20. Babeshko, V. A., Glushkov, E. V., Zinchenko, Zh. F. *Dinamika neodnorodnykh linejno-uprugih sred* [Dynamics of inhomogeneous linear elastic media]. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)
21. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V. *Integral'nye preobrazovaniya i volnovye processy* [Integral transformations and wave processes]. Kuban State University, Krasnodar, 2017. (In Russian)
22. Golub, M. V., Shpak, A. N. Semi-analytical hybrid approach for the simulation of layered waveguide with a partially debonded piezoelectric structure. *Applied Mathematical Modelling*, 2019, vol. 65, pp. 234–255.
23. Fomenko, S. I., Golub, M. V., Chen, A. In-plane elastic wave propagation and band-gaps in layered functionally graded phononic crystals. *J. of Sound and Vibration*, 2019, vol. 439, pp. 219–240.
24. Fomenko, S. I., Golub, M. V., Aleksandrov, A. A. Chislenno ustojchivyy metod opredeleniya volnovykh polej i zapreshchennykh zon v sloistykh fononnykh kristallah [A numerically stable method for determining wave fields and band gaps in layered phonon crystals]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred* [Computational mechanics of continuous media], 2017, no. 10, pp. 235–244. (In Russian)

---

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2020

© Фоменко С. И., Голуб М. В., Шпак А. Н., Глинкова С. А., 2020

Статья поступила 28 октября 2019 г.