

МЕХАНИКА

УДК 519.642.3+532.527

DOI: 10.31429/vestnik-17-1-2-61-68

АЛГОРИТМ ДВИЖЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ
В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Черная А. С., Ханазарян А. Д., Марковский А. Н.

ALGORITHM FOR MOVING POINT VORTICES IN A BOUNDED AREA

A. S. Chernaya, A. D. Hanazaryan, A. N. Markovsky

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: mrkvsk@yandex.ru

Abstract. The problem of calculating the paths of motion of a set of point vortices in an ideal incompressible liquid in a limited area is considered. The area is supposed to be piecewise smooth. The stream function at any given time is presented as a sum: the stream functions of point vortices and the potential of a simple layer, the density of which – the density of vortices on the border – is required to determine. Regardless of time, the stream function harmoniously extends into the exterior of the area and is identically equal to a constant at the boundary, and, therefore, is a Roben potential. Briefly, the paper describes an algorithm for calculating the Roben potential. The unknown density of vortices is sought in the form of a linear combination of a complete system of potentials, and the coefficients are determined by the values of the Roben potential, as a solution to the inverse problem; determination of the coefficients reduces to solving a system of linear equations with a Gram matrix for a linearly independent system of functions. By the function of stream by tangents determine the trajectories of movements of vortices. The results of computational experiments of the motion of several point vortices in a square are presented. A computer analysis of the movement was carried out: two, four and eight point vortices, calculated the trajectories of their movement and found stationary and periodic, stable and unstable configurations.

Keywords: point vortices, stream function, density of vortices, potential of the Roben, full system potential.

Введение

В работе рассматривается классическая задача о движении точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости. Точечный вихрь — это простейшая модель вихревого движения жидкости, полученная в пределе стягивания площади плоского вихря в точку при постоянной завихренности. Вообще, под точечными вихрями понимают точки пересечения параллельных вихревых нитей бесконечно малого сечения с перпендикулярной этим нитям плоскостью [1].

Всякий точечный вихрь на плоскости индуцирует вокруг себя потенциальное течение идеальной несжимаемой жидкости, соответственно набор точечных вихрей индуцирует нетривиальное потенциальное течение. Такое течение само уже может выступать содержательной моделью для сложных вихревых

течений, например, моделировать вихревые пятна или эффекты в вихревой трубке Ранка–Хилша [2]. Некоторые задачи теории адвекции, связанные с динамикой «бесконечно малого» вихря в потоке жидкости, создаваемом взаимодействующими точечными вихрями, помогают изучению хаотизации и имеют важное значение для понимания турбулентности [3].

Помимо практических приложений, сама задача движения точечных вихрей является фундаментальной, поскольку находит множество параллелей с классическими аналитическими задачами, например, задачей N тел небесной механики, проблемой устойчивости равновесия системы одинаковых плавающих магнитов во внешнем магнитном поле и др. [4]. Также задача приобрела новую актуальность в связи с исследованием вихрей в жидком гелии и электронных колонн в фи-

Черная Анастасия Сергеевна, студент факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета; e-mail: chernaya.nastya18@gmail.com.

Ханазарян Артур Дереникович, студент факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета; e-mail: artur97.10@mail.ru.

Марковский Алексей Николаевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета; e-mail: mrkvsk@yandex.ru.

зике плазмы [2, 5, 6]. В связи с проблемами современной химии полимеров изучаются периодические и стационарные движения или составные конфигурации, образующие так называемые вихревые кристаллы [7].

Экспериментальное, численное и аналитическое исследования стационарных конфигураций, при которых вихри вращаются как твердое тело, привели к возникновению Лос-Аламосского каталога [8], в котором собраны симметричные конфигурации. Оказывается, что кроме симметричных существуют несимметричные конфигурации, найденные относительно недавно [9]. Поиск новых конфигураций продолжается, существует много предположений и гипотез относительно динамики точечных вихрей, некоторые из них, связанные с задачами небесной механики, причислены С. Смейлом [10] к числу математических проблем XXI в.

Уравнения движения точечных вихрей в безграничной идеальной жидкости — нелинейны, и добавление ограничений динамики вихрей в виде границы делает систему еще более сложной. Основы теории движения вихрей в произвольной области были заложены Э. Дж. Раусом и опираются на теорию конформных отображений [11]. Решение для случая круговой области было получено еще раньше А. Гринхиллом [11]. Наиболее детально исследовались простейшие области — круг, прямоугольник, прямолинейный канал, многоугольники, хотя и для этих областей задачи еще далеки от полного разрешения [3].

Для проведения компьютерного анализа динамики точечных вихрей в ограниченной области, проверки гипотез в областях произвольной формы, выявления периодических и стационарных конфигураций и численного исследования их устойчивости требуется разработка эффективных алгоритмов расчета траекторий точечных вихрей [12]. В настоящей работе предлагается простой сходящийся алгоритм, в котором функция тока представляется в виде суммы точечных вихрей и потенциала простого слоя, плотность которого — плотность вихрей на границе — требуется определить. Для определения неизвестной плотности используется гармоническое продолжение функции тока как потенциала Робена во внешность области.

1. Представление функции тока

1.1. Рассмотрим движение точечных вихрей в идеальной несжимаемой жидкости в ограниченной области Q с достаточно глад-

кой границей $S = \partial Q$. Пусть z^j — положения вихрей в Q , Γ_j — их интенсивности, $j = 1, \dots, N$. Предполагается, что поле скоростей $\mathbf{w}(x, t) = \{u(x, t), v(x, t)\}$, $x = (x_1, x_2)$, течения в каждый момент времени удовлетворяет в области Q следующим условиям [13]:

- 1) $\operatorname{div} \mathbf{w}(x, t) = 0$, $x \in Q$;
- 2) $\operatorname{rot} \mathbf{w}(x, t) = 0$, при $x \neq z^j$, $j = \overline{1, N}$;
- 3) граница $S = \partial Q$ — линия тока.

Требуется определить векторное поле $\mathbf{w}(x, t)$ в каждый момент времени t , а также траектории вихрей $z^j(t)$, при условии $z^j(0) = z^j$, $j = \overline{1, N}$.

1.2. Рассмотрим следующую подзадачу: в заданный момент времени t найти мгновенное векторное поле $\mathbf{w}(x) = \mathbf{w}(x, t)$ в области Q , индуцируемое заданной системой точечных вихрей $z^j = z^j(t)$, $j = \overline{1, N}$. Зная мгновенное векторное поле, мы можем найти вектора скорости каждого вихря, и в детерминированном случае, можем вычислить их положения в следующий момент времени и, далее, повторить эту процедуру для новых координат вихрей.

Из первого условия следует, что существует функция тока $\Psi(x)$, такая что $\mathbf{w}(x) = \nabla_c \Psi(x)$, где $\nabla_c = \left\{ \frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_1} \right\}$ — коградиент. Обозначим $E(x) = 1/(2\pi) \ln|x|$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа в плоском случае. Для заданной системы вихрей z^k , $k = 1, \dots, N$, функцию тока будем определять в виде

$$\Psi(x) = L(x) + \int_S q(y) E(x-y) dS_y, \quad (1.1)$$

$$x \in Q,$$

$$L(x) = \sum_{j=1}^N \Gamma_j \ln|z^j - x|,$$

где распределенную на S плотность вихрей $q(y)$ требуется определить, так чтобы выполнялось третье условие — условие непротекания

$$\Psi(x)|_S = C \equiv \text{const}, \quad (1.2)$$

Справедливо утверждение [14]: если потенциал Робена для Q не равен нулю, то функция $q(y)$ в представлении (1.1) такая, что выполняется условие (1.2), существует и единственна.

2. Потенциал и задача Робена

2.1. Потенциал простого слоя

$$R(x) = \int_S \varphi^*(y) E(x-y) dS_y, \quad (2.1)$$

равный константе на границе

$$R(x)|_S = R_S \equiv \text{const}, \quad (2.2)$$

называется *потенциалом Робена* [15]. Функция φ^* и константа R_S называются *плотностью и константой Робена* соответственно. Для однозначного определения константы дополнительно используют нормирующее условие (условие полного заряда)

$$\int_S \varphi^*(y) dS_y = 1. \quad (2.3)$$

Задача определения плотности $\varphi^* \in L_2(S)$ называется *задачей Робена*.

2.2. Рассмотрим разложение в ортогональную сумму подпространств

$$L_2(S) = \{\varphi^*\} \oplus L_2^\varphi(S). \quad (2.4)$$

Пусть последовательность точек $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, принадлежит области Q ($Q^+ = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{Q}$), отделена от границы и удовлетворяет условию единственности гармонических функций. Будем называть такую последовательность *базисной*.

Обозначим

$$\alpha_m^-(x) = E(x^{(m+1)} - x) - E(x^{(m)} - x),$$

$$x \in S, \quad m = 1, 2, \dots$$

Справедливо утверждение [16].

Лемма (В.Г. Лежнев). Система функций $\alpha_m^-(x)$, $m = 1, 2, \dots$, полна и линейно независима в подпространстве $L_2^\varphi(S)$, если последовательность $x^{(m)}$ является базисной в Q .

2.3. Алгоритм решения задачи Робена заключается в следующем [17]. Зафиксируем базисную в Q последовательность точек $b^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, и рассмотрим соответствующую этой последовательности систему функций $\alpha_m^-(x)$.

В силу ортогональной суммы (2.4) имеем разложение единицы

$$1 = c_0 \varphi^* + h = c_0 \varphi^* + h^M + \varrho_M, \quad (2.5)$$

где

$$h^M(x) = \sum_{m=1}^M c_m \alpha_m^-(x)$$

— проекция неизвестной функции h на конечномерное подпространство, натянутое на первые M функций рассматриваемой системы, и $\varrho_M \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$ в силу полноты системы α_m^- . Умножим скалярно в $L_2(S)$ тождество (2.5) на α_k^- при $k = 1, 2, \dots, M$, получим систему линейных уравнений с матрицей Грама

$$\sum_{m=1}^M c_m (\alpha_m^-, \alpha_k^-) = (1, \alpha_k^-), \quad k = 1, 2, \dots, M,$$

для определения неизвестных коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_M искомой проекции h^M .

Решая систему, получаем приближенную плотность Робена

$$c_0 \varphi_M^*(x) = 1 - \sum_{m=1}^M c_m \alpha_m^-(x).$$

Константу c_0 можно определить из условия полного заряда (2.3). Таким образом, окончательно имеем приближенную плотность Робена

$$\varphi_M^*(y) = c_0^{-1} \left[1 - \sum_{m=1}^M c_m \alpha_m^-(y) \right]$$

и приближенный потенциал Робена

$$R_M(x) = \int_S \varphi_M^*(y) E(x-y) dy, \quad x \in Q^+.$$

Полнота системы α_m^- обеспечивает сходимость в норме $L_2(S)$ приближенной плотности Робена φ_M^* к точной φ^* : $\|\varphi_M^* - \varphi^*\| \rightarrow 0$, $M \rightarrow \infty$. Тогда последовательность приближенных потенциалов $R_M(x)$ сходится равномерно внутри Q^+ к потенциалу Робена $R(x)$ и, в силу гладкости S , равномерная сходимость имеет место вплоть до границы.

3. Аппроксимация функции тока системами потенциалов $\sigma_m(x)$

Рассмотрим две системы базисных потенциалов

$$\alpha_m^+(x) = E(x^{(m)} - y), \quad x \in S,$$

$$\sigma_m(x) = \int_S E(x^{(m)} - y) E(x-y) dS_y, \quad x \in S.$$

Справедливы следующие утверждения [16].

Лемма (В.Г. Лежнев). Система функций $\alpha_m^+(x)$ полна и линейно независима в $L_2(S)$, если последовательность $x^{(m)}$ – базисная в Q^+ .

Лемма (В.Г. Лежнев). Если константа Робена области Q не равна нулю $R_S \neq 0$, то система функций $\sigma_m(x)$, $m = 1, 2, \dots$, линейно независима и замкнута в $L_2(S)$; если $R_S = 0$, то эта система функций замкнута в $L_2^{\varphi}(S)$, если последовательность $x^{(m)}$ – базисная в Q^+ .

Аппроксимация функции тока $\Psi(x)$ имеет вид

$$\Psi^M(x) = L(x) + \sum_{m=1}^M c_m \sigma_m(x). \quad (3.1)$$

Рассмотрим функционал

$$F(c_1, c_2, \dots, c_M) = \|\Psi(x)|_S - \Psi^M(x)\|^2.$$

Необходимое условие экстремума функционала приводит к системе линейных алгебраических уравнений с матрицей Грама для системы функций σ_m :

$$\sum_{m=1}^M c_m (\sigma_m, \sigma_k) = (C, \sigma_k), \quad (3.2)$$

$$k = 1, 2, \dots, M.$$

Вычисление элементов матрицы Грама $G(\sigma_1, \dots, \sigma_M) = (g_{m,k})$ для системы σ_m :

$$\begin{aligned} g_{m,k} &= \int_S \sigma_m(x) \sigma_k(x) dS_x = \\ &= \int_S \left[\int_S E(x^{(m)} - y) E(x - y) dS_y \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_S E(x^{(k)} - y) E(x - y) dS_y \right] dS_x, \end{aligned}$$

требует вычисления сингулярных интегралов, что приводит к значительным погрешностям приближенной функции тока $\Psi^M(x)$. Данный подход аппроксимации функции тока системами σ_m для описания динамики точечных вихрей подробно описан в [18], также на основе этого подхода в работе [19] рассчитаны траектории движения точечных вихрей как в ограниченной, так и в не ограниченной области. Рассмотрим далее более простой алгоритм, не требующий вычисления сингулярных интегралов.

4. Простой алгоритм вычисления плотности вихрей

Идея алгоритма основана на том соображении, что искомая мгновенная функция тока $\Psi(x)$ в силу условия (1.2) гармонически продолжается в Q^+ как потенциал Робена $R(x)$ и, следовательно, в Q^+ не зависит от времени t .

Зафиксируем базисную в Q^+ последовательность точек $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \dots$, и рассмотрим соответствующую этой последовательности систему функций $\alpha_m^+(x)$. Обозначим

$$q^M(x) = \sum_{m=1}^M c_m \alpha_m^+(x)$$

проекцию функции $q(x)$ на конечномерное подпространство, натянутое на первые функции системы α_m^+ , тогда

$$q(x) = q^M(x) + \varrho_M(x), \quad (4.1)$$

где $\varrho_M(x) \rightarrow 0$, при $M \rightarrow \infty$.

Рассмотрим выражение (1.1) при $x = x^{(k)}$, $k = \overline{1, M}$ и, используя (4.1), имеем систему линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^M c_m (\alpha_m^+, \alpha_k^+) = \Psi(x^{(k)}) - L(x^{(k)}), \quad (4.2)$$

$$k = \overline{1, M},$$

где $\Psi(x) \equiv R(x)$, $x \in Q^+$, для любого момента времени t $R(x)$ – потенциал Робена, определенный на кривой S . Для заданной области Q , если потенциал Робена неизвестен, его всегда можно вычислить по описанному в п. 3 алгоритму. Также можно использовать функцию Грина области Q^+ , содержащей бесконечно удаленную точку. Полученная система (4.2), в отличие от системы (3.2), не требует вычисления сингулярных интегралов, а также имеет преимущество при вычислении правой части для каждого момента времени.

5. Движение точечных вихрей

Мгновенное поле скоростей в момент времени t , индуцируемое точечными вихрями $z^j = z^j[t]$, $j = \overline{1, N}$, определяется в виде $\mathbf{w}(x) = \nabla_c \Psi(x)$, где функция тока $\Psi(x)$ имеет вид (1.1) при $x \in Q$ и $x \neq z^j$. Согласно формуле Гельмгольца [13], для нахождения скорости вихря из скорости потока $\mathbf{w}(x)$ в

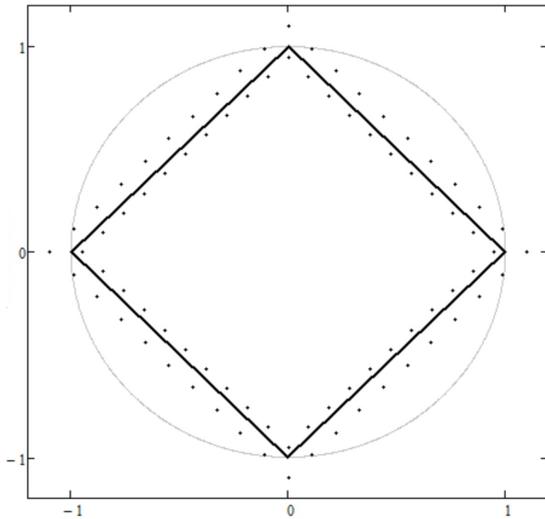


Рис. 1

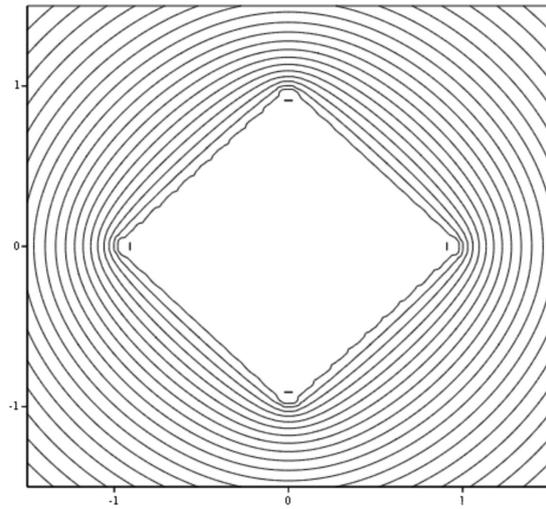


Рис. 2

точке расположения вихря $x = z^j, j = \overline{1, N}$ необходимо вычесть «самодействие» вихря (вихрь сам себя не движет) [3]. Квадратные скобки по времени $z^j[t]$ используем, чтобы подчеркнуть дискретность времени.

Для положения $z^k[t + \Delta t]$ k -го вихря в момент времени $t + \Delta t$ имеют место следующие приближенные равенства:

$$z^k[t + \Delta t] = z^k[t] + \frac{\mathbf{w}(z^k[t])}{|\mathbf{w}(z^k[t])|} \Delta t,$$

$$k = \overline{1, N},$$

где

$$\mathbf{w}(z^k[t]) = \nabla_c \left[\sum_{j=1, j \neq k}^N \Gamma_j \ln |z^j[t] - z^k[t]| + \int_S q(y) E(x - y) dS_y \right]$$

и плотность $q(y)$ вычисляется по простому алгоритму, описанному в п. 5. Положения в начальный момент времени $z^k[0]$ равны изначально заданным положениям вихрей $z^k, k = \overline{1, N}$.

6. Вычислительные эксперименты

Ниже приводятся результаты вычислительных экспериментов движения точечных вихрей в квадрате.

На рис. 1 указано расположение базисных точек $b^{(m)} \in Q$ и $x^{(k)} \in Q^+, m, k = \overline{1, N}, N = 40$; точки распределены равномерно

параллельно границе квадрата с отступами $-0,05$ и $0,1$ соответственно. На рис. 2 представлены линии уровня потенциала Робена, вычисленного по алгоритму п. 3.

На рис. 3 представлены траектории движения одного точечного вихря с интенсивностью $\Gamma_1 = 1$ при разных начальных положениях; траектории совмещены на одном рисунке для экономии места; начальные положения вихря имеют координаты $z^1 = \{k/10, 0\}, k = \overline{1, 9}$ и отмечены на рисунке точками. Как видно из рис. 3, все траектории движения одного точечного вихря замкнуты аналогично движению одного вихря внутри единичного круга.

На рис. 4 представлены траектории движения двух точечных вихрей при разных начальных положениях с интенсивностями $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$; траектории также совмещены на одном рисунке; начальные положения вихрей имеют координаты: $z^1 = \{k/10, 0\}, z^2 = \{-k/10, 0\}, k = \overline{1, 9}$, и отмечены на рис. 4 точками. Как видно из рис. 4, вихри движутся друг за другом по замкнутой траектории аналогично движению двух вихрей внутри единичного круга — томпсоновская конфигурация при $N = 2$ [3].

На рис. 5 представлены траектории движения двух точечных вихрей при разных начальных положениях с разными интенсивностями $\Gamma_1 = 1, \Gamma_2 = -1$; траектории совмещены на одном рисунке; начальные положения вихрей отмечены на рисунке точками, координаты первого вихря: $0,308, 0,381, 0,454, 0,527, 0,600$. Координаты второго вихря симметрич-

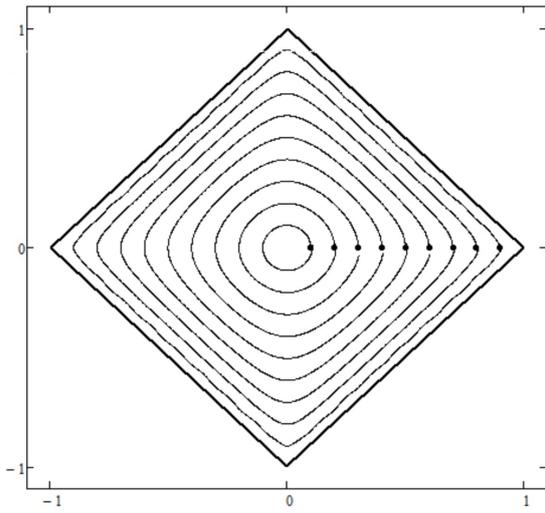


Рис. 3

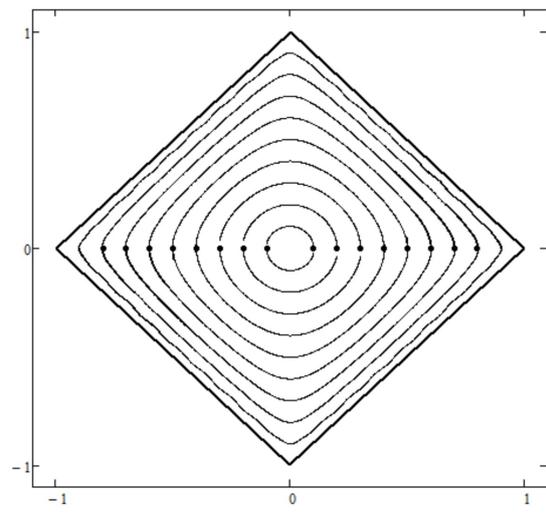


Рис. 4

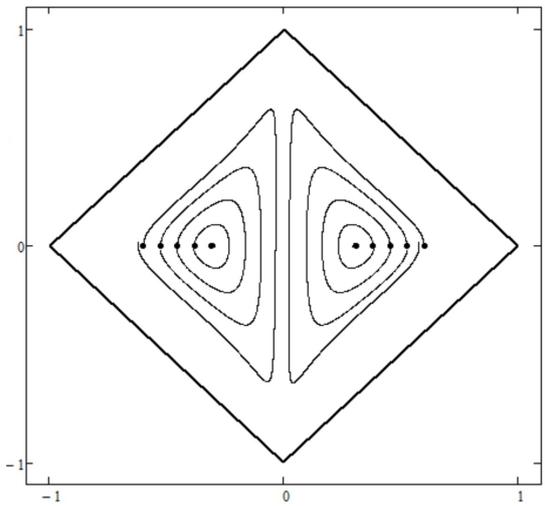


Рис. 5

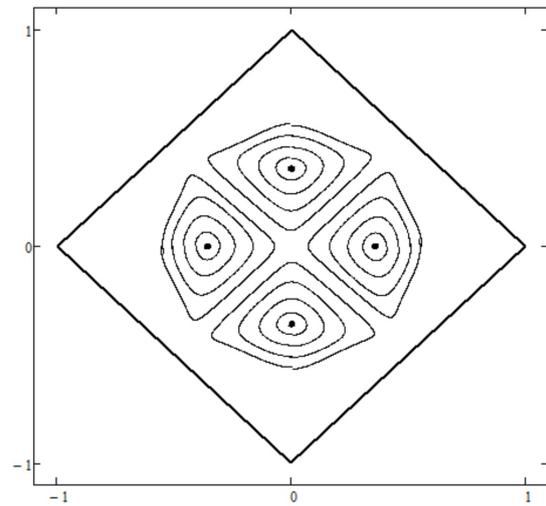


Рис. 6

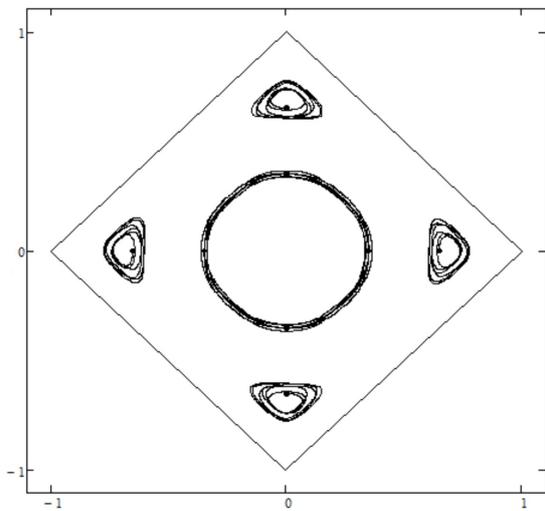


Рис. 7

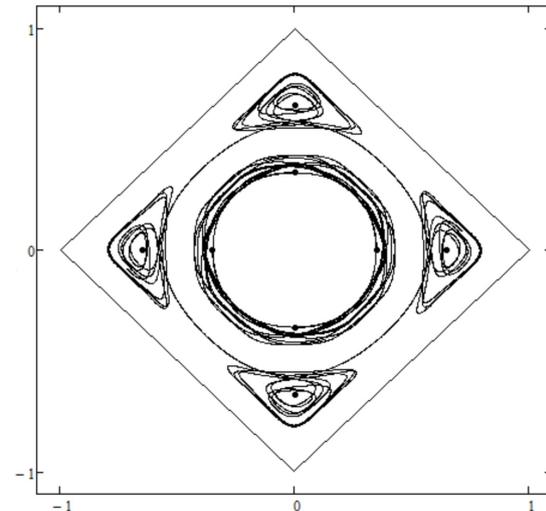


Рис. 8

ны относительно начала координат. Как видно из рис. 5, при значении координат 0,308 конфигурация вихрей статична — вихри стоят на месте; при значении координат более 0,308 траектории вихрей замкнуты, что соответствует регулярным периодическим решениям; при значении координат более 0,600 динамика конфигурации становится не регулярной.

На рис. 6 представлены траектории движения четырех точечных вихрей при разных начальных положениях с разными интенсивностями $\Gamma_1 = \Gamma_3 = 1$, $\Gamma_2 = \Gamma_4 = -1$; траектории совмещены на одном рисунке; начальные положения вихрей отмечены на рисунке точками. Координаты первого вихря: 0,355, 0,405, 0,456, 0,507, 0,557. Координаты других вихрей симметричны относительно диагоналей квадрата. Из рис. 6 видно, что при значении координат 0,355 конфигурация вихрей статична — вихри стоят на месте; при значении координат более 0,355 траектории вихрей замкнуты, что соответствует регулярным периодическим решениям; при значении координат более 0,557 динамика конфигурации становится нерегулярной.

На рис. 7 представлены траектории движения восьми точечных вихрей. В центре интенсивности равны единице, в углах — минус единице. Координаты вихрей отмечены на рис. 7 точками. На рис. 7 представлен пример устойчивой конфигурации, группа вихрей в углах смещается к центру на свои периодические орбиты, другая группа немного удаляется от центра, также перемещаясь на свои периодические орбиты.

На рис. 8 представлены другой пример динамики восьми вихрей. Вихри выходят из углов и двужутся по замкнутой траектории аналогично другой группе, расположенной ближе к центру.

Литература

1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
2. Алексеенко С. В., Куйбин П. А., Окулов В. Л. Введение в теорию концентрированных вихрей. Новосибирск: Институт теплофизики СО РАН, 2003. 504 с.
3. Борисов А. В., Мамаев И. С., Соколовский М. А. Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей. М.-Ижевск: РХД, 2003. 704 с.
4. Козлов В. В. Общая теория вихрей. М.-Ижевск: РХД, 1998. 238 с.

5. Сэффмэн Ф. Дж. Динамика вихрей. М.: Научный мир, 2000. 376 с.
6. Мелешко В. В., Константинов М. Ю. Динамика вихревых структур. Киев: Наукова думка, 1993. 282 с.
7. Aref H., Newton P. K., Stremmer M., Tokieda T., Vainchtein D. L. Vortex Crystals // TAM Reports 1008, 2002.
8. Campbell L., Ziff R. A catalog of two-dimensional vortex patterns. Los Alamos Scientific Laboratory. Report No. La-7384-MS, 1978.
9. Aref H., Vainchtein D. L. Asymmetric Equilibrium Patterns of Point Vortices // Nature. 1998. Vol. 392. P. 769–770.
10. Смейл С. Математические проблемы следующего столетия / Сб. «Современные проблемы хаоса и нелинейности». М.-Ижевск: ИКИ, 2002. С. 280–298.
11. Борисов А. В., Мамаев И. С. Математические методы динамики вихревых структур. М.-Ижевск: ИКИ, 2005. 368 с.
12. Ashbee T. L., Esler J. G., McDonald N. R. Generalized Hamiltonian point vortex dynamics on arbitrary domains using the method of fundamental solutions // Journal of Computational Physics. 2013. Vol. 246. P. 289–303.
13. Гельмгольц Г. Основы вихревой теории. М.-Ижевск: ИКИ, 2002. 82 с.
14. Лежнев В. Г., Марковский А. Н. О движении точечных вихрей в ограниченной области // Спектральные и эволюционные задачи: Труды Крымской Осенней Математической Школы-Симпозиума. 2005. Т. 15. С. 128–132.
15. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с.
16. Лежнев А. В., Лежнев В. Г. Метод базисных потенциалов в задачах математической физики и гидродинамики. Краснодар: КубГУ, 2009. 111 с.
17. Лежнев В. Г., Марковский А. Н. Проекционные алгоритмы вычисления потенциала Робена // Вычислительные методы и программирование. 2019. Т. 20. № 4. С. 378–385.
18. Лежнев М. В. Задачи и алгоритмы плоскопараллельных течений. Краснодар: КубГУ, 2009. 92 с.
19. Марковский А. Н. Модели плоских вихревых течений и задачи экологии. Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Краснодар, 2005. 84 с.

References

1. Kochin, N. E., Kibel', I. A., Roze, N. V. *Teoreticheskaya gidromekhanika, Ch. 1* [Theoretical Hydromechanics, Part 1]. Fizmatgiz, Moscow, 1963. (In Russian)
2. Alekseenko, S. V., Kuybin, P. A., Okulov, V. L. *Vvedenie v teoriyu kontsentrirrovannykh vikhrey*

- [Introduction to Concentrated Vortex Theory]. Institute of Thermophysics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 2003. (In Russian)
3. Borisov, A. V., Mamaev, I. S., Sokolovskiy, M. A. *Fundamental'nye i prikladnye problemy teorii vikhrey* [Fundamental and applied problems of the theory of vortices]. RKhD, Moscow–Izhevsk, 2003. (In Russian)
 4. Kozlov, V. V. *Obshchaya teoriya vikhrey* [General theory of vortices]. RKhD, Moscow–Izhevsk, 1998. (In Russian)
 5. Seffmen, F. Dzh. *Dinamika vikhrey* [Vortex dynamics]. Nauchnyy mir, Moscow, 2000. (In Russian)
 6. Meleshko, V. V., Konstantinov, M. Yu. *Dinamika vikhrevykh struktur* [The dynamics of vortex structures]. Naukova dumka, Kiev, 1993. (In Russian)
 7. Aref, H., Newton, P. K., Stremmer, M., Tokieda, T., Vainchtein, D. L. *Vortex Crystals. TAM Reports 1008*, 2002.
 8. Campbell, L., Ziff, R. A catalog of two-dimensional vortex patterns. *Los Alamos Scientific Laboratory. Report No. La-7384-MS*, 1978.
 9. Aref, H., Vainchtein, D. L. Asymmetric Equilibrium Patterns of Point Vortices. *Nature*, 1998, vol. 392, pp. 769–770.
 10. Smeyl, S. Matematicheskie problemy sleduyushchego stoletiya [Mathematical problems of the next century]. In: *Sovremennye problemy khaosa i nelineynosti* [Modern problems of chaos and nonlinearity]. IKI, Moscow–Izhevsk, 2002, pp. 280–298. (In Russian)
 11. Borisov, A. V., Mamaev, I. S. *Matematicheskie metody dinamiki vikhrevykh struktur* [Mathematical methods for the dynamics of vortex structures]. IKI, Moscow–Izhevsk, 2005. (In Russian)
 12. Ashbee, T. L., Esler, J. G., McDonald, N. R. Generalized Hamiltonian point vortex dynamics on arbitrary domains using the method of fundamental solutions. *J. of Computational Physics*, 2013, vol. 246, pp. 289–303.
 13. Gel'mgol'ts, G. *Osnovy vikhrevoy teorii* [Fundamentals of Vortex Theory]. IKI, Moscow–Izhevsk, 2002. (In Russian)
 14. Lezhnev, V. G., Markovskiy, A. N. O dizhenii tochechnykh vikhrey v ogranichennoy oblasti [On the dilation of point vortices in a limited area]. *Spektral'nye i evolyutsionnye zadachi: Trudy Krymskoy Osenney Matematicheskoy Shkoly-Simpoziuma* [Spectral and evolutionary problems: Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium], 2005, vol. 15, pp. 128–132. (In Russian)
 15. Vladimirov, V. S. *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of mathematical physics]. Nauka, Moscow, 1981. (In Russian)
 16. Lezhnev, A. V., Lezhnev, V. G. *Metod bazisnykh potentsialov v zadachakh matematicheskoy fiziki i gidrodinamiki* [The method of basic potentials in problems of mathematical physics and hydrodynamics]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
 17. Lezhnev, V. G., Markovskiy, A. N. Proektsionnye algoritmy vychisleniya potentsiala Robena [Projection Algorithms for Calculating Robin Potential]. *Vychislitel'nye metody i programirovanie* [Computational Methods and Programming], 2019, vol. 20, no. 4, pp. 378–385. (In Russian)
 18. Lezhnev, M. V. *Zadachi i algoritmy ploskoparallel'nykh techeniy* [Tasks and algorithms of plane-parallel flows]. Kuban State University, Krasnodar, 2009. (In Russian)
 19. Markovskiy, A. N. *Modeli ploskikh vikhrevykh techeniy i zadachi ekologii* [Models of plane vortex flows and environmental problems]. Abstract of diss. . . . cand. phys.-math. science. Krasnodar, 2005. (In Russian)