

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ МЕТОД ПОИСКА ОСОБЫХ ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ КОМПЛЕКСНОГО ВРЕМЕНИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕТЕРМИНИРОВАНО-ХАОТИЧЕСКИХ СИСТЕМ (НА ПРИМЕРЕ СИСТЕМЫ Э. ЛОРЕНЦА)

Буныкин А. В., Пшикова И. С.

COMPUTATIONAL METHOD FOR SEARCHING SINGULAR POINTS ON THE PLANE  
OF COMPLEX TIME FOR RESEARCH OF DETERMINATED-CHAOTIC SYSTEMS  
(USING THE EXAMPLE OF E. LORENZ SYSTEM)

A. V. Bunyakin, I. S. Pshikova

Kuban State University, Krasnodar, Russia  
e-mail: alex.bunyakin@mail.ru

*Abstract.* The general scheme of search and recognition (identification) of singular points of the solution of dynamic systems is present. Under singular points we understand not a features of the phase flow, but the poles of the functions of the solution components for analytical continuation into the plane of complex time. Pole orders may be different for different components. As examples for calculation, precisely known system exhibiting deterministic chaotic behavior – E. Lorentz system, and also indicates a general scheme for matching of the differential dynamic system solution with the special integer sequence (quantization).

The introduction describes a method for searching for singular points on the plane of complex time, which is a specific variant of numerical integration with the optimal choice of the direction of the next step. Optimization is the minimization of the number of steps, that is, ultimately – the computational time. The second part of the paper describes an algorithm for searching for singular points of the layer closest to the real time axis, and this algorithm is numerically implemented for the Lorentz system. The third (final) part of the paper describes a possible application of the method for constructing quantum-mechanical models of multielectronic systems.

*Keywords:* dynamical systems, deterministic chaos, analytic continuation.

### Введение

В основу метода исследования динамических систем положен численный поиск особых точек у решения системы на плоскости комплексного времени. Рассматриваются динамические системы (математические модели, сводящиеся к системам обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных) с аналитически заданными правыми частями. При этом решение такой системы гладкое на вещественной оси времени, что соответствует физическому смыслу. Особые точки ищутся у аналитического продолжения этого решения в плоскость комплексного времени. В качестве примеров приводятся результаты поиска осо-

бых точек для трехмерной системы термоконвекции (система Лоренца [1]) и для семи-мерной системы турбулентности и подобных систем [2, 3].

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_N), \quad n = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Переменные  $x_n$  считаются комплексными функциями комплексного переменного  $t$ . Пусть  $f_n$  — полиномы с вещественными коэффициентами.

Компоненты решения  $x_n = x_n(t - c_1, c_2, \dots, c_N)$  есть аналитические функции в некоторой области комплексной плоскости  $t$ . В частности, для систем, полученных приближением по методу Галеркина для решений

Буныкин Алексей Вадимович, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедр математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета, оборудования нефтяных и газовых промыслов Кубанского государственного технологического университета, кафедры нефтегазового дела и землеустройства Майкопского государственного технологического университета; e-mail: alex.bunyakin@mail.ru.

Пшикова Ирина Сергеевна, студентка факультета математики и компьютерных наук Кубанского государственного университета, старший лаборант кафедры математических и компьютерных методов Кубанского государственного университета; e-mail: ira.pshikova.98@gmail.com.

реальных задач, это должна быть область, вытянутая вдоль вещественной оси. Вне этой области решение может иметь особые точки, число которых может быть конечным или счетным, в частности и при задании начальных условий на вещественной оси.

На всей плоскости, за исключением особых точек, выполнено

$$\Delta \operatorname{Re} x_n = \Delta \operatorname{Im} x_n = 0,$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{(\partial \operatorname{Re} t)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial \operatorname{Im} t)^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial t \partial \bar{t}}.$$

Составим функцию эрмитовой нормы решения, заданную на комплексной плоскости  $t$ ,

$$F(\operatorname{Re} t, \operatorname{Im} t) = \sum_{n=1}^N x_n \bar{x}_n.$$

Эта функция уже не аналитическая, но можно заметить, что

$$\Delta = 2 \sum_{n=1}^N \left( \left( \frac{\partial \operatorname{Re} x_n}{\partial \operatorname{Re} t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \operatorname{Re} x_n}{\partial \operatorname{Im} t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \operatorname{Im} x_n}{\partial \operatorname{Re} t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \operatorname{Im} x_n}{\partial \operatorname{Im} t} \right)^2 \right) > 0,$$

то есть внутри области аналитичности решения эта функция выпуклая вниз. Это означает, что она не может достигать максимума, и любой путь интегрирования динамической системы (1), лежащий на комплексной плоскости времени, обеспечивающий возрастание значения  $F$  вдоль него, ведет в особую точку системы (в точку, где решение устремляется к бесконечности).

Зная координаты точки фазового пространства  $x_1, \dots, x_N$ , можно определить направление, в котором скорость возрастания максимальна. И если при численном интегрировании двигаться по такому направлению, то это и есть оптимальный (кратчайший в смысле вычислительного времени) путь, ведущий в особую точку. Действительно, пусть ( $i$  — мнимая единица)  $dt = e^{i\varphi} ds$ ,  $ds = |dt|$ , тогда

$$\frac{d}{ds} = e^{i\varphi} \frac{d}{dt} = e^{-i\varphi} \frac{d}{\bar{t}}$$

и, используя

$$e^{i\varphi} \frac{d\bar{x}_n}{dt} = e^{-i\varphi} \frac{dx_n}{\bar{dt}},$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} &= \sum_{n=1}^N \left( e^{i\varphi} \bar{x}_n \frac{dx_n}{dt} + e^{-i\varphi} x_n \frac{d\bar{x}_n}{\bar{dt}} \right) = \\ &= Q e^{i\varphi} + \bar{Q} e^{-i\varphi}, \end{aligned}$$

где

$$Q = \sum_{n=1}^N \frac{dx_n}{dt} \bar{x}_n.$$

Тогда условие выбора направления максимального возрастания  $F$

$$\frac{d}{d\varphi} \frac{dF}{ds} = i(Q e^{i\varphi} - \bar{Q} e^{-i\varphi}) = 0$$

даст

$$\varphi = -\operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im} Q}{\operatorname{Re} Q} \pm \pi. \quad (2)$$

Неоднозначность выбора соответствует движению «туда или обратно» по кратчайшему пути, ведущему в особую точку.

Численный метод поиска особых точек может иметь вид явной однослойной разностной схемы, то есть может быть устроен следующим образом. С вещественными начальными условиями из начальной точки на вещественной оси делается шаг численного интегрирования вдоль мнимой оси в верхнюю полуплоскость, далее на каждом шаге интегрирования направление следующего шага выбирается по формуле (2) и таким образом осуществляется движение к особой точке. Особая точка считается найденной, когда значение  $Q$  близко к переполнению.

### Алгоритм поиска особых точек

После того, как ближайшая из особых точек найдена, система (1) численно интегрируется вдоль вещественной оси времени на промежутки, затем снова организуется поиск. Каждая особая точка может быть найдена, начиная с разных позиций на вещественной оси, а величина  $T$  выбирается таким образом, чтобы двигаться как можно быстрее, но при этом не пропустить особую точку.

Найденные таким образом особые точки в дальнейшем будут именоваться «особенностями ближайшего к вещественной оси слоя», строго говоря — это точки, к которым ведут все пути, выходящие с вещественной оси времени.

Разумеется, для вещественной правой части системы и при вещественных начальных

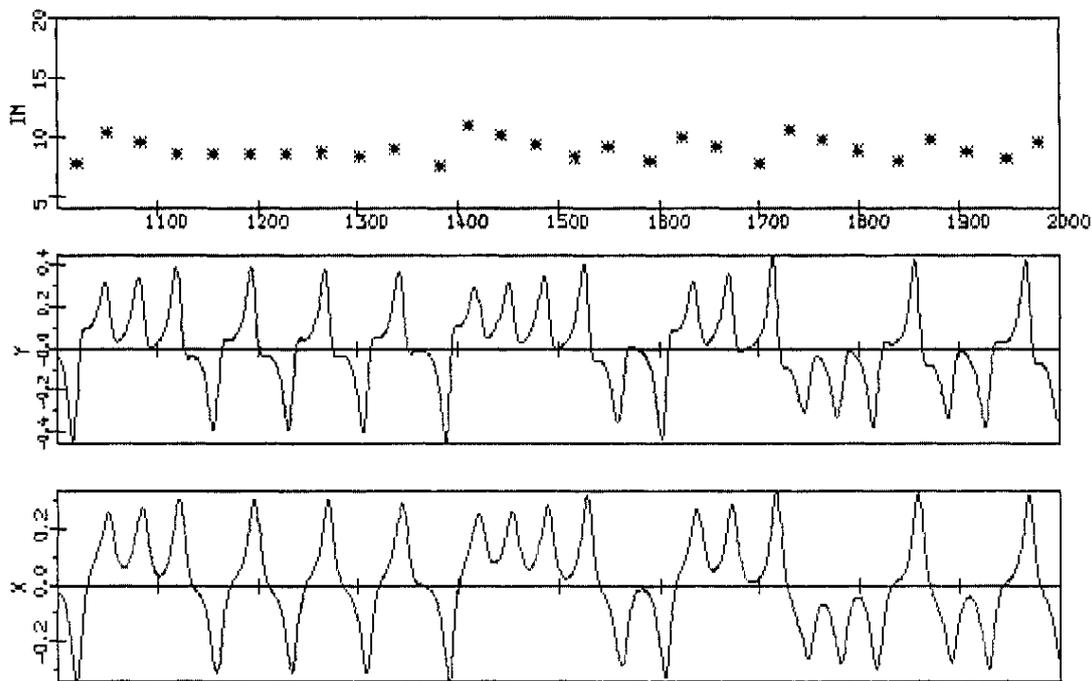


Рис. 1. Компоненты решения системы Лоренца и карта особых точек

условиях, картина особых точек симметрична относительно вещественной оси.

Следует отметить, что предлагаемый метод поиска особых точек может быть реализован в виде многослойной разностной схемы (типа предиктор—корректор), по-видимому, может быть применен для систем более широкого класса: неавтономных, с правыми частями аналитическими не всюду, а почти всюду, для ситуаций, когда особые точки могут быть не алгебраическими (не полюсами). Вопрос о типах особых точек является отдельным, для доказательства соответствующих утверждений используется методика построения диаграмм Пьюизо [4–6].

Метод поиска особых точек был опробован на знаменитой трехмерной системе термомоноконвекции (Э. Лоренца), известной тем, что это одна из первых дифференциальных динамических систем, обнаруживших детерминировано-хаотическое поведение [1],

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) = x'; \\ \frac{dy}{dt} &= rx - my - xz = y'; \\ \frac{dz}{dt} &= -bz + xy = z'. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\sigma$ ,  $r$ ,  $m$ ,  $b$  — положительные параметры. Как известно, при определенной комбинации этих параметров все положения равновесия этой системы теряют устойчивость, но вблизи них образуется множество, ограниченное по размерам, имеющее меру нуль в трехмерном пространстве и мощность континуума, притягивающее к себе фазовые траектории, но внутри которого нет ни одного предельного цикла — так называемый «странный аттрактор». Последний факт определяется путем численного определения показателей Ляпунова и по ним — размерности притягивающего множества (гипотеза о совпадении размерностей по Хаусдорфу и по Ляпунову) [7–15].

Если задать начальные условия около нуля, то по прошествии сравнительно небольшого промежутка времени фазовая точка начинает двигаться вблизи аттрактора, все более приближаясь к нему. С этого момента был организован поиск особых точек, ближайшего к вещественной оси слоя. На рис. 1 представлены графики двух первых компонент решения и соответствующая карта особых точек на промежутке вещественной оси времени от 1000 до 2000 для следующей комбинации параметров и начальных условий:

$$\begin{aligned} \sigma &= 0,2; & m &= 0,003; & r &= 0,5; \\ b &= 0,006; & x(0) &= y(0) = 0,17; & z(0) &= 0,49. \end{aligned}$$

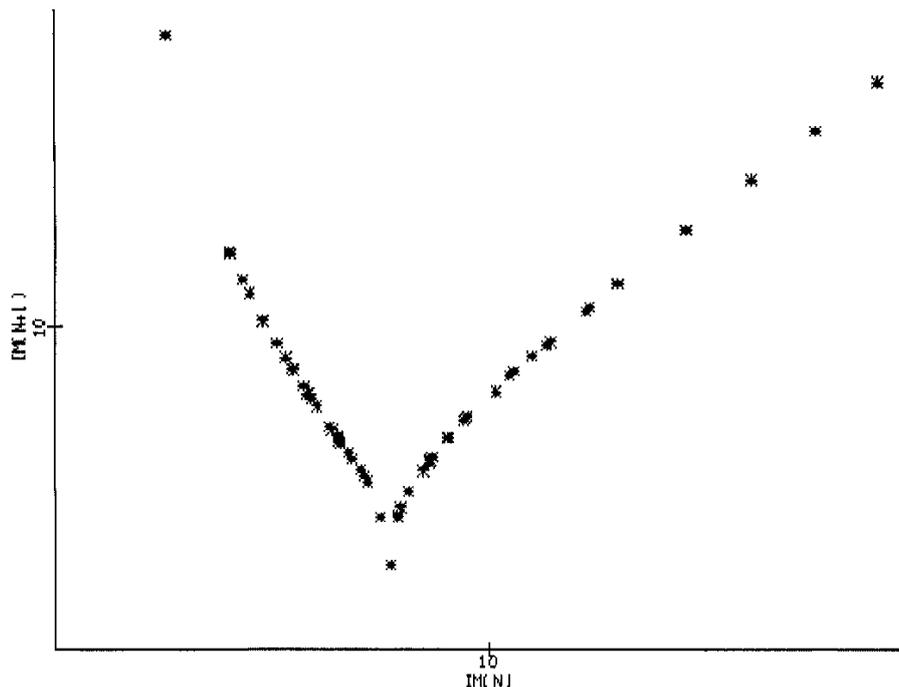


Рис. 2. Зависимость мнимых координат соседних особых точек

Положение каждой особой точки, в силу автономности системы, характеризуется лишь двумя величинами: мнимой координатой и расстоянием вдоль вещественной оси до ближайшей другой особой точки. При проверке на корреляционный тест эти величины ведут себя как независимые случайные.

Причиной является то, что рекуррентные зависимости, связывающие их, сильно отличаются от линейных. На рис. 2 показана зависимость двух мнимых координат соседних особых точек.

На рис. 3 показана зависимость расстояния вдоль вещественной оси между двумя соседними особыми точками от мнимой координаты особой точки. Видно, что эти зависимости имеют особенность типа точки возврата. И это не случайный факт. Похожие зависимости обнаружены для максимальных значений компонент решения, это является следствием того, что отображение Пуанкаре для трехмерной системы Лоренца одномерное [12].

Теперь следует остановиться на характере (типе) особенностей. Предполагая, что это полюсы, для определения их порядков и амплитуд (старшие коэффициенты разложения решения в ряды Лорана) подставим в систему Лоренца (3) разложение решения в виде рядов (центр разложения, ввиду автономности

системы, может быть выбран в нуле).

$$x = \frac{A}{t^\alpha} + \dots, \quad y = \frac{B}{t^\beta} + \dots, \quad z = \frac{C}{t^\gamma} + \dots$$

После приравнивания порядков и амплитуд по разные стороны от равенств, получим:

$$\alpha + 1 = \beta, \quad \beta + 1 = \alpha + \gamma, \quad \gamma + 1 = \alpha + \beta, \\ -A = \sigma B; \quad 2B = AC; \quad -2C = AB.$$

Отсюда двузачно находятс я порядки и амплитуды решения

$$\alpha = 1, \quad \beta = \gamma = 2, \\ A = \pm 2i, \quad B = \mp \frac{2i}{\sigma}, \quad C = -\frac{2}{\sigma}.$$

Отсутствие целочисленного решения систем, получаемых для порядков компонент системы (такие системы в общем случае, помимо арифметических операций, могут содержать  $\min$  и  $\max$ ), означает отсутствие у решения алгебраических особенностей (полюсов). Исследование подобных систем при помощи диаграмм Пьюизо является одним из основных методов аналитической теории дифференциальных уравнений [4–6].

Система Лоренца обладает тем свойством, что если к бесконечности устремляется хотя бы одна из компонент решения, то аналогичным образом ведут себя и две другие, то есть можно говорить об особой точке всей системы.

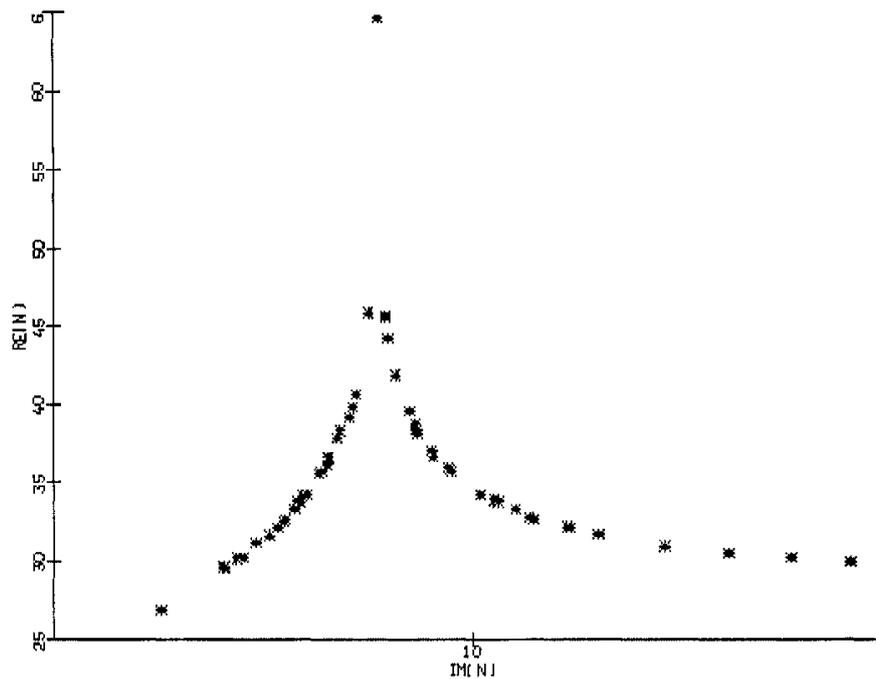


Рис. 3. Зависимость расстояния вдоль вещественной оси от мнимой координаты

Невыполнение такого следствия связано с отсутствием решения системы алгебраических уравнений, получаемой для амплитуд.

Возникшая неоднозначность сопряжения при решении системы для амплитуд является следствием того, что пары особых точек с сопряженными амплитудами располагаются симметрично относительно вещественной оси. И это свойство присуще всем системам с вещественными параметрами и начальными условиями.

Фиксируя неоднозначность определения амплитуд (верхнюю и нижнюю группы знаков) и рассматривая только точки, расположенные в верхней полуплоскости времени, приходим к понятию сорта особой точки. Найденная особая точка может иметь верхнюю либо нижнюю группы знаков, то есть для системы Лоренца этих сорта два. Для некоторого класса систем, с правыми частями в виде полиномов, их может быть больше, но конечное число — это произведение номеров различных решений системы алгебраических уравнений для амплитуд на знаки сопряженности (индексы сортов).

При этом возникает последовательность индексов сортов — это динамическая система с конечным числом состояний (квантовая система). И это новый объект исследования, непосредственно связанный с исходной дина-

мической системой, который появляется при применении метода поиска особых точек.

Амплитуды находятся с точностью, достаточной для распознавания сортов непосредственно в процессе поиска особых точек применением асимптотических формул.

Для полюса первого порядка:

$$A = - \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x^2}{x'}, \quad x = \frac{A}{t - t_0} + \dots$$

Для полюса второго порядка:

$$B = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4y^3}{(y')^2}, \quad y = \frac{B}{(t - t_0)^2} + \dots,$$

$$C = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4z^3}{(z')^2}, \quad z = \frac{C}{(t - t_0)^2} + \dots$$

Найденные таким образом на последнем шаге поиска (когда значение  $Q$  близко к переполнению) значения амплитуд достаточно близки к аналитическим.

#### Использование особых точек для аппроксимации вещественного решения

Следует отметить, что последовательность координат и сортов особых точек достаточно информативна (по крайней мере, для

таких систем небольшой размерности, как система Лоренца), а именно, с ее помощью можно аппроксимировать решение [2, 3, 16]. Метод, позволяющий это делать, по-видимому, не единственно возможный, состоит в следующем:

Решение ( $n$  — номер компоненты) заменяется выражениями

$$x_n = A_n + \sum_j X_n(t - t_j).$$

Здесь константа  $A_n$  — это свободный член ряда Лорана для соответствующей компоненты решения, сумма берется по особым точкам  $t_j$ , функции  $X_n$  обладают следующими свойствами:

а)  $X_n(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow 0$ , имея те же коэффициенты при отрицательных степенях в ряде Лорана, что и компонента решения  $x_n$ .

б)  $X_n(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , причем так, что ряд по особым точкам сходится для каждой из компонент решения.

Неединственность метода аппроксимации заключается в том, что функции  $X_n$  данными условиями определены неоднозначно, их выбор зависит не только от вида правой части динамической системы. Для системы Лоренца эти функции были взяты в следующем общем виде:

$$x_n = A_n + \sum_{t_j} \sum_{p=1}^{p_n} \frac{A_{np}}{(S_n(k_n(t - t_j)))^p}, \quad (4)$$

где  $p$  — порядок полюса для компоненты  $x_n$ , а функции

$$S_n(t) = t + \frac{t^3}{D_{n1}} + \frac{t^5}{D_{n2}} + \dots + \frac{t^{2\delta+1}}{D_{n\delta}},$$

Целые значения  $\delta$  могут быть различными для разных компонент решения. Тогда для сходимости ряда по особым точкам достаточно условий  $|D_{n\delta}| \geq D^{2\delta}$ ;  $n = \overline{1, N}$ ;  $\delta = 1, 2, \dots$ , здесь  $D$  — максимальное расстояние от особой точки до точки вещественной оси, взятое по множеству всех особых точек.

Интересующее вещественное решение, определенное на вещественной оси времени, имеет вид

$$\operatorname{Re} x_n = \operatorname{Re} A_n + 2 \sum_{t_j^+} \sum_{p=1}^{p_n} \operatorname{Re} \frac{A_{np}}{(S_n(k_n(t - t_j)))^p}, \quad (5)$$

где суммирование ведется по особым точкам  $t_j^+$ , расположенным в верхней полуплоскости времени. Кроме того, ограничимся только ближайшим к вещественной оси слоем особенностей, так как именно они оказывают наибольшее влияние на вещественное решение.

Количество членов с нечетными степенями в выражении  $S_n$  берется с расчетом на то, чтобы туда вошли все члены, которые могут повлиять на значения коэффициентов при неположительных степенях ряда Лорана, получаемого разложением выражений (4) в особой точке. Неизвестные коэффициенты  $A_n, A_{np}; k_n$  определяются из системы алгебраических уравнений, получаемой после подстановки выражений (4) в дифференциальные уравнения динамической системы и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях рядов Лорана (производные берутся от выражений (4), а потом раскладываются в ряды). При этом ввиду того, что разложения в ряды берется в окрестности особой точки, суммирование по особым точкам может быть опущено.

Представленная методика похожа на разложение в ряды Пейнлеве (Peinleve) [4–6], однако специфический вид выражения (4) обусловлен не только необходимостью того, чтобы получаемая система уравнений для коэффициентов имела бы решения (и не бесконечно много), но и сходимостью рядов по особым точкам. Последнее не предусмотрено в методике Пейнлеве и является отличительным признаком данной работы. Итак, для системы Лоренца выражения (4) имеют вид

$$x = \frac{A_1}{S_1(kt)} + A_0, \quad S_1(t) = t + \frac{t^3}{D_1},$$

$$y = \frac{B_2}{S_2^2(pt)} + \frac{B_1}{S_2(pt)} + B_0, \quad S_2(t) = t + \frac{t^3}{D_2},$$

$$z = \frac{C_2}{S_3^2(qt)} + \frac{C_1}{S_3(qt)} + C_0, \quad S_3(t) = t + \frac{t^3}{D_3}.$$

Производя разложение в ряды Лорана до свободных членов включительно, получим

$$x = \frac{A_1}{kt} + A_0 + \dots, \quad x' = -\frac{A_1}{kt^2} - \frac{kA_1}{D_1} + \dots,$$

$$y = \frac{B_2}{p^2t^2} + \frac{B_1}{pt} + B_0 - \frac{2B_2}{D_2} + \dots,$$

$$y' = -\frac{2B_2}{p^2t^3} - \frac{B_1}{pt^2} - \frac{pB_1}{D_2} + \dots,$$

$$z = \frac{C_2}{q^2 t^2} + \frac{C_1}{qt} + C_0 - \frac{2C_2}{D_3} + \dots,$$

$$z' = -\frac{2C_2}{q^2 t^3} - \frac{C_1}{qt^2} - \frac{qC_1}{D_3} + \dots$$

После подстановки этих выражений в систему дифференциальных уравнений Лоренца и приравнивания членов с одинаковыми степенями, получаем при третьей степени в знаменателе

$$-\frac{2B_2}{p^2} = -\frac{A_1 C_2}{k q^2}, \quad -\frac{2C_2}{q^2} = \frac{A_1 B_2}{k p^2},$$

при второй степени в знаменателе

$$\begin{aligned} -\frac{A_1}{k} &= \sigma \frac{B_2}{p^2}, \\ -\frac{B_1}{p} &= -m \frac{B_2}{p^2} - \frac{A_1 C_1}{k q} - A_0 \frac{C_2}{q^2}, \\ -\frac{C_1}{q} &= -b \frac{C_2}{q^2} + \frac{A_1 B_1}{k p} + A_0 \frac{B_2}{p^2}, \end{aligned}$$

при первой степени в знаменателе

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{k} &= \frac{B_1}{p}, \\ 0 &= r \frac{A_1}{k} - m \frac{B_1}{p} - \\ &\quad - \frac{A_1}{k} \left( C_0 - \frac{2C_2}{D_3} \right) - A_0 \frac{C_1}{q}, \\ 0 &= -b \frac{C_1}{q} + \frac{A_1}{k} \left( B_0 - \frac{2B_2}{D_2} \right) + A_0 \frac{B_1}{p}, \end{aligned}$$

свободные члены

$$\begin{aligned} -\frac{kA_1}{D_1} &= \sigma \left( B_0 - \frac{2B_2}{D_2} - A_0 \right), \\ -\frac{pB_1}{D_2} &= rA_0 - m \left( B_0 - \frac{2B_2}{D_2} \right) - \\ &\quad - A_0 \left( C_0 - \frac{2C_2}{D_3} \right), \\ -\frac{qC_1}{D_3} &= -b \left( C_0 - \frac{2C_2}{D_3} \right) + A_0 \left( B_0 - \frac{2B_2}{D_2} \right). \end{aligned}$$

Полученную систему уравнений можно решить относительно переменных  $B_2, C_2, A_1,$

$B_1, C_1, A_0, B_0, k, p, q$  аналитически, при этом если обозначить

$$a = \mp \frac{\sigma i}{3} \left( \frac{2b}{\sigma} + \frac{m}{\sigma} - 3 \right);$$

$$c = \frac{2}{3} \left( 3 + \frac{m}{\sigma} - \frac{b}{\sigma} \right),$$

то решение будет следующим:

$$\mp \frac{2i}{D_1} k^2 = \sigma \left( \mp \frac{bc}{2i} - 2a \right),$$

$$\begin{aligned} \mp \frac{2i}{D_2} p^2 &= ra - m \left( \mp \frac{bc}{2i} - a \right) - \\ &\quad - a \left( r - m \pm \frac{ac}{2i} \right), \end{aligned}$$

$$-\frac{c}{D_3} q^2 = -b \left( r - m \mp \frac{ac}{2i} \right) + a \left( \pm \frac{bc}{2i} - a \right),$$

$$A_1 = \pm 2ki, \quad B_1 = \pm 2pi, \quad C_1 = cq,$$

$$B_2 = \mp \frac{2p^2 i}{\sigma}, \quad C_2 = -\frac{2q^2}{\sigma}, \quad A_0 = a,$$

$$C_0 = r - m \mp \frac{ac}{2i} - \frac{4q^2}{\sigma D_3},$$

$$B_0 = \pm \frac{bc}{2i} - a \mp \frac{4p^2 i}{\sigma D_2},$$

Возникающая неоднозначность решения, обозначенная верхней и нижней группой знаков, объясняется так же, как и при определении амплитуд.

Теперь о значении искусственно введенных параметров  $D_{nj}$  и членов в выражениях  $S_n(t)$ , куда они входят. При разложении в ряд Лорана в окрестности особой точки они на порядок меньше  $t$  и оказывают влияние лишь на свободные члены, но при удалении от особой точки они быстро растут и могут сильно искажать приближенное вещественное решение (5). Поэтому увеличением  $|D_{nj}|$  можно пытаться уменьшить влияние этих членов или даже вообще отбрасывать некоторые из них для наилучшего приближения. На рис. 4 показаны графики приближенных решений системы Лоренца, одно из которых получено численным интегрированием (сплошная линия), другое — аппроксимированное суммой (5) по особым точкам (пунктирная).

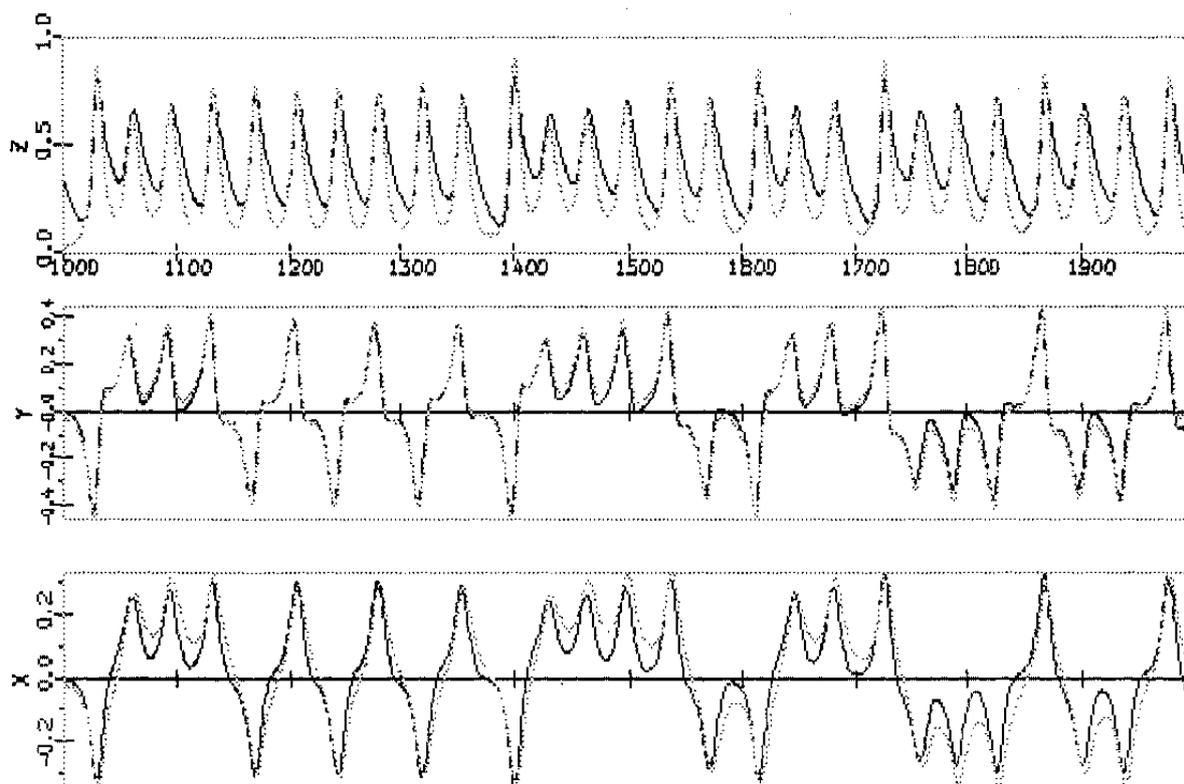


Рис. 4. Аппроксимация решения системы Лоренца суммой по особым точкам

### Выводы и обсуждение

Конечно, предлагаемый метод аппроксимации является полуэмпирическим, но он позволяет приближать решение систем с хаотическим поведением на больших промежутках времени, если удастся обнаружить рекуррентное соотношение в расположении особых точек, подобно той, что имеется у системы Лоренца.

Если порядки полюсов и их амплитуды заранее неизвестны, то их можно определять в процессе поиска особой точки (на последнем шаге), причем, как показали расчеты с вышеуказанными двумя системами, точность такого определения вполне достаточна для распознавания точек по сортам. Справедлива следующая асимптотическая формула:

$$x = \frac{A}{(t - t_0)^p} + \dots,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left( -q \frac{x}{x'} \right)^q x = \begin{cases} 0 : q > p, \\ A : q = p, \\ \infty : q < p. \end{cases} \quad (6)$$

Кроме системы Лоренца данным методом были исследованы и некоторые другие систе-

мы с детерминировано-хаотическим поведением, причем «сценарии возникновения хаоса» включали не только последовательность удвоения периода [13, 14], а и такие как, например, в работе [15].

Такое внимание к системе Лоренца обусловлено не только исторически (как к наиболее известному и одному из первых примеров системы с детерминировано-хаотическим поведением). Дело еще и в том, что у этой системы (у компонент  $y$ ,  $z$ ) полюсы не простые, а второго порядка. Это приводит к проблемам при аппроксимации решения рядом по особым точкам (на эти проблемы и был сделан акцент), большинство же систем, полученных приближением по Галеркину, имеют одинаковые особенности для всех компонент (простые полюсы), и указанных проблем не возникает.

Эта тема (исследование детерминировано-хаотических систем) чрезвычайно интересна с фундаментальной точки зрения. Системы с хаосом возникают в самых разных приложениях (укажем лишь некоторые, в качестве примеров [17–21]). Этим вопросам посвящены книги, например, [22–25] и специальные журналы, например, *International journal of Bifurcation and Chaos* (ed. L.O. Chua). Дан-

ная проблема связана с теорией гамильтоновых систем, непосредственно контактирует и с такими замечательными результатами, как КАМ-теорема [26–29], однако в настоящем изложении будет указано на связь с квантовой механикой.

Согласно теории, основанной на решении уравнения Шредингера, при котором физические величины заменяются эрмитовыми операторами, решение этого уравнения может быть периодическим или квазипериодическим по времени (в случае, если разложение волновой функции по собственным функциям оператора гамильтониана конечно).

В случае бесконечного ряда решение не относится к указанным типам, то есть является детерминировано-хаотическим. Возникает вопрос — отличается ли этот «хаос» от того, который возникает при численном решении исходной (классической, а не операторной) задачи? То есть насколько отличаются характеристики хаотического режима (и какие), получаемые из решения уравнения Шредингера, от характеристик прямого решения задачи (если оно тоже детерминировано-хаотическое)?

Естественно предположить, что если квантовый аналог построен изложенным методом (по особым точкам), то он «унаследует характер хаотического поведения» от исходной системы (в смысле размерности аттрактора, порядка и особенностей отображения Пуанкаре). Поэтому здесь будет изложен (как один из возможных вариантов) пример «квантования» механической системы, состоящей из конечного числа заряженных частиц.

Рассмотрим  $M$  – частичную систему с кулоновским взаимодействием в классической постановке ( $X_k$  — векторы координат частиц), уравнения движения электронов имеют вид

$$\ddot{X}_k = -\frac{\vartheta M}{|X_k|^3} X_k + \vartheta \sum_{k \neq j=1}^M \frac{X_k - X_j}{|X_k - X_j|^3}, \quad (7)$$

$$k = \overline{1, M}.$$

Здесь введен параметр размерности  $\frac{\text{длина}^3}{\text{время}^2}$ , имеющий в СИ значение

$$\vartheta = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_\epsilon} \approx 253,21,$$

где  $\epsilon_0$ ,  $m_\epsilon$ ,  $e$  — электрическая постоянная, масса и заряд электрона. Данная система описывает электро-нейтральную (в целом) систему из  $M$  электронов, взаимодействующих и

притягивающихся к положительному ядру из  $M$  протонов в нуле.

К безразмерному виду можно перейти, введя характерный масштаб длины « $a$ » и времени  $\tau$ , тогда вместо размерной величины  $\vartheta$  в системе (7) надо поставить  $\vartheta_0 = \vartheta \frac{\tau^2}{a^3}$ , перейдя к безразмерным координатам и времени.

Особые точки системы (7) все имеют одинаковый тип для всех компонент «полукубические сингулярности» или «cusp type» с главным членом разложения вида

$$X_k = A_k(t - t_0)^{\frac{2}{3}} + a_k^0 + a_k^1(t - t_0) + a_k^2(t - t_0)^2 + \dots,$$

действительно, при этом обеспечивается равенство порядков в левой и правой части (7) при стремлении  $X_k$  к нулю, а  $\dot{X}_k$  — к бесконечности. Особенность слабее, чем «полюс», но это не мешает применению изложенного метода, так как величина  $Q$  устремляется к бесконечности.

Величины амплитуд  $A_k$  могут быть найдены из системы нелинейных алгебраических уравнений

$$-\frac{2}{9}A_k = -\frac{\vartheta M}{|A_k|^3} + \vartheta \sum_{k \neq j=1}^M \frac{A_k - A_j}{|A_k - A_j|^3}, \quad (8)$$

$$k = \overline{1, M},$$

а можно их находить и непосредственно в процессе поиска особых точек описанным численным алгоритмом (из формулы, аналогичной (6)  $p = 2/3$ ):

$$X_k = A_k(t - t_0)^p + \dots,$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left( \frac{\dot{X}_k}{qX_k} \right)^q X_k = \begin{cases} 0 : q < p, \\ A_k : q = p, \\ \infty : q > p. \end{cases}$$

Значение  $\dot{X}_k$  находятся при численном интегрировании (7) как системы первого порядка (удвоенной размерности):

$$\dot{X}_k = Y_k,$$

$$\dot{Y}_k = -\frac{\vartheta M}{|X_k|^3} X_k + \vartheta \sum_{k \neq j=1}^M \frac{X_k - X_j}{|X_k - X_j|^3}.$$

Фазовый вектор этой системы  $\mathbf{Z} = (X_1, \dots, X_M, \dot{X}_1, \dots, \dot{X}_M)$  в особой точке устремляется в бесконечность, хоть и не по всем компонентам решения, но «по половине из

них»  $\dot{X}_1, \dots, \dot{X}_M$ , то есть можно все же говорить об особой точке системы.

Квантовое состояние идентифицируется с сортом особой точки ближайшего к вещественной оси слоя, мимо которой «проходит» в данный момент вещественное решение этой системы. Состояния отличаются одно от другого по набору амплитуд  $A_k^\pm$ ,  $k = 1, \dots, K \leq M$  (то есть — по решению системы (8), которое всегда неоднозначно — минимум двузначно по сопряженности « $\pm$ »), задается индексом, определяющим «сорт» особой точки « $\pm$ » (сопряженность приписывается как знак сорта при рассмотрении точек, находящихся в верхней полуплоскости времени).

Предположение, которое предлагается проверить посредством изложенной методики, состоит в том, что моделирование квантовых состояний и переходов (в механической системе (7), записанной как классическая — детерминированная) возможно в виде поиска особых точек на плоскости комплексного времени. Особенности ближайшего к вещественной оси слоя, отличающиеся вещественными частями амплитуд, можно интерпретировать как разные энергетические состояния, а знак сорта « $\pm$ » — как ориентацию спинов частиц. Этот знак приписывается всему решению системы (7), то есть — каждому «коллективному состоянию частиц», и соответствует определенным ориентациям их спинов. Это и есть предположение, подлежащее проверке.

Получаемая таким образом последовательность сортов особых точек представляет собой своеобразный квантовый аналог механической системы, а процесс такой идентификации квантовых состояний с сортами можно назвать «квантование системы с помощью особых точек на аплоскости комплексного времени».

### Заключение

Разумеется, представленный метод окажется применимым не для всех систем, он может плохо описывать некоторые конкретные ситуации, но в отличие от традиционных методов моделирования квантовых состояний, он имеет совсем другой принцип. Соответственно и совсем другие проблемы возникают при его реализации. Традиционные методы, основанные на сведении задачи к поиску собственных чисел и векторов эрмитовой матрицы (аппроксимирующей оператор гамильтониана), наталкиваются на проблему

большой размерности, которая, судя по всему, имеет фатальный характер.

Метод же поиска особых точек этим «бременем большой размерности не так сильноотягощен». Хотя с увеличением числа частиц размерность (7) и увеличивается, но лишь пропорционально, а не показательно (как размерность эрмитовой матрицы, получаемой при аппроксимации уравнения Шредингера, для которой требуется решать задачу на собственные значения и векторы).

Наконец, надо отметить, что все многообразие появляющихся мезоскопических и нано-размерных систем (пространственно-периодических или кластерных), при попытке их численного моделирования уже приводят к таким сложным математическим проблемам, что алгоритмы их решения подчас нереализуемы. В такой ситуации любой альтернативный подход «имеет право» на попытку его применения.

### Литература

1. *Lorenz E. N.* Deterministic non-periodic flow // *J. Atmos. Sci.* 1963. Vol. 20. P. 130–141.
2. *Бунякин А. В.* Особые точки решения семи-мерной системы турбулентности // *Журн. выч. мат. и матем. физ.* 1993. № 6. С. 968–973.
3. *Бунякин А. В.* Особые точки динамических систем // *Журн. выч. мат. и матем. физ.* 1995. № 3. С. 477–478.
4. *Кондратеня С. Г., Яблонский А. И.* Подвижные особые точки систем дифференциальных уравнений // *Диф. уравн.* 1968. Т. 4. № 6. С. 983–990.
5. *Пушкевич Г. Е., Яблонский А. И.* О подвижных особых точках системы дифференциальных уравнений, описывающих модели генетики // *Диф. уравн.* 1991. Т. 27. № 8. С. 1453–1456.
6. *Климанишевская И. Н., Кондратеня С. Г.* Простейшие классы автономных систем, не имеющих решений с подвижными неалгебраическими особыми точками // *Диф. уравн.* 1991. Т. 27. № 3. С. 335–353.
7. *Qin Yuanxun, Zhao Huaizong* Theory of singular points of ordinary differential equations in complex domain // *Acta math. Appl. Sin. Eng. Ser.* 1992. Vol. 8. Iss. 4. P. 316–321.
8. *Grebogi C., Ott E., Yorke J. A.* Are three-frequency quasi-periodic orbits to be expected in typical nonlinear systems // *Phys. Rev. Lett.* 1983(a). Vol. 51. P. 339–345. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.339
9. *Grebogi C., Ott E., Yorke J. A.* Crises, sudden changes in chaotic attractors and transients to chaos // *Physica 7D.* 1983(b). Vol. 7. P. 181–200.

10. *Poincare H.* Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. Gauthier–Villars, 1892. Paris (In English: N.A.S.A. Translation: TT F-450/452. U.S. Fed. Clearinghouse, Springfield, VA, USA).
11. *Flower A. C., McGuines M. J.* A description of the Lorenz attractor at high Prandtl–number // *Physika*. 1982. Vol. D5. Iss. 2-3. P. 149–182.
12. *Зиновьев А. Т., Штерн В. Н.* Структуры стохастических траекторий системы Лоренца // *Числ. мет. мех. сплош. среды*. 1983. Т. 14. № 1. С. 51–60.
13. *Feigenbaum M. J.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // *J. Stat. Phys.* 1978. Vol. 19. P. 25–52.
14. *Feigenbaum M. J.* Universal behavior in nonlinear systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1983. Vol. 7. Iss. 1–3. P. 16–39. (Имеется перевод: *Фейгенбаум М.* Универсальность в поведении нелинейных систем // *УФН*. 1983. Т. 141. № 2. С. 343–374).
15. *Guckenheimer J., Worfolk P.* Intant chaos // *Nonlinearity*. 1992. Vol. 5. Iss. 3. P. 1211–1222.
16. *Бунякин А. В.* Особые точки решения системы дифференциальных уравнений Лоренца // *Журн. выч. мат. и матем. физ.* 1991. № 10. С. 1489–1497.
17. *Eckmann J. P.* Road to turbulence in dissipative dynamical systems // *Rev. Mod. Phys.* 1981. Vol. 53. P. 643–654. DOI: 10.1103/RevModPhys.53.643
18. *Campbell D., Rose H.* (eds.) Order in chaos // *Proc. of the Int. Conf. in Los Alamos*. Amsterdam, North Holland, 1983, 371 p.
19. *Golubb J. P., Benson S. V.* Phase locking in the oscillations leading to turbulence, in H. Haken (ed.): *Pattern formation and pattern recognition*. Springer–Heidenberg, New York, 1979.
20. *Jansen M. N., Bak P., Bohr T.* Complete Devil’s staircase, fractal dimension and universality of mode–locking structures // *Phys. Rev. Lett.* 1983(b). Vol. 50. P. 1637–1639.
21. *Libchaber A., Fauve S., Laroche C.* Two–parameter study of routes to chaos // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 1983. Vol. 7. P. 73–84.
22. *Schuster H. G.* Deterministic chaos. An introduction. XXIII. Weinheim, Physik–Verlag, 1984. 220 p.
23. *Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L.* Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos. Elsevier, 2018. 432 p.
24. *Elhadj Z.* Dynamical systems: Theory and Applications. CRC Press, 2019. 400 p.
25. *Argyris J. H., Faust G., Haase M., Friedrich R.* An exploration of dynamical system and chaos. Springer, 2015. 345 p.
26. *Колмогоров А. Н.* О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // *ДАН СССР*. 1954. Т. 98. № 4. С. 527–530.
27. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели II. Доклад зательство теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // *Усп. мат. наук*. 1963. Т. 18. С. 5–13.
28. *Arnold V. I., Avez A.* Ergodic problems in classical mechanics. Benjamin–New York, 1968. 286 p.
29. *Mozer J.* Convergent series expansions of quasi-periodic motions // *Math. Ann.* 1967. Vol. 169. Iss. 1. P. 163–173.

### References

1. Lorenz, E. N. Deterministic non–periodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 1963, vol. 20, pp. 130–141.
2. Bunyakin, A. V. Osobyie tochki resheniya semimernoy sistemy turbulentnosti [Singular points of the solution of the seven-dimensional turbulence system]. *Zhurnal vychislitel’noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1993, no. 6, pp. 968–973. (In Russian)
3. Bunyakin, A. V. Osobyie tochki dinamicheskikh sistem [Singular points of dynamical systems]. *Zhurnal vychislitel’noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [J. of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1995, no. 3, pp. 477–478. (In Russian)
4. Kondratenya, S. G., Yablonskiy, A. I. Podvizhnyye osobyie tochki sistem differentsial’nykh uravneniy [Moving singular points of systems of differential equations]. *Differentsial’nye uravneniya* [Differential equations], 1968, vol. 4, no. 6, pp. 983–990. (In Russian)
5. Pushkevich, G. E., Yablonskiy, A. I. O podvizhnykh osobykh tochkakh sistemy differentsial’nykh uravneniy, opisyyvayushchikh modeli genetiki [On movable singular points of a system of differential equations describing genetic models]. *Differentsial’nye uravneniya* [Differential equations], 1991, vol. 27, no. 8, pp. 1453–1456. (In Russian)
6. Klimanshevskaya, I. N., Kondratenya, S. G. Prosteyshie klassy avtonomnykh sistem, ne imeyushchikh resheniy s podvizhnymi nealgebraicheskimi osobymi tochkami [The simplest classes of autonomous systems that do not have solutions with moving non-algebraic singular points]. *Differentsial’nye uravneniya* [Differential equations], 1991, vol. 27, no. 3, pp. 335–353. (In Russian)
7. Qin Yuanxun, Zhao Huaizong. Theory of singular points of ordinary differential equations in complex domain. *Acta math. Appl. Sin. Eng. Ser.*, 1992, vol. 8, iss. 4, pp. 316–321.
8. Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J. A. Are three–frequency quasi–periodic orbits to be expected in typical nonlinear systems. *Phys. Rev. Lett.* 1983(a), vol. 51, pp. 339–345. DOI: 10.1103/PhysRevLett.51.339
9. Grebogi, C., Ott, E., Yorke, J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors and transients to

- chaos. *Physica D.*, 1983(b), vol. 7, pp. 181–200.
10. Poincare, H. Les methodes nouvelles de la mecanique celeste. Gauthier–Villars, 1892. Paris (In English: N.A.S.A. Translation: TT F-450/452. U.S. Fed. Clearinghouse, Springfield, VA, USA).
  11. Flower, A. C., McGuines, M. J. A description of the Lorenz attractor at high Prandtl–number. *Physica*, 1982, vol. D5, iss. 2–3, pp. 149–182.
  12. Zinov'ev, A. T., Shtern, V. N. Struktury stokhasticheskikh traektoriy sistemy Lorentsa [Structures of stochastic trajectories of the Lorentz system]. *Chislennyye metody mekhaniki sploshnoy sredy* [Numerical methods of continuum mechanics], 1983, vol. 14, no. 1, pp. 51–60. (In Russian)
  13. Feigenbaum, M. J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.*, 1978, vol. 19, pp. 25–52.
  14. Feigenbaum, M. J. Universal behavior in nonlinear systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1983, vol. 7, iss. 1–3, pp. 16–39.
  15. Guckenheimer, J., Worfolk, P. Instant chaos. *Nonlinearity*, 1992, vol. 5, iss. 3, pp. 1211–1222.
  16. Bunyakin, A. V. Osobyie tochki resheniya sistemy differentsial'nykh uravneniy Lorentsa [Singular points of the solution of the system of Lorenz differential equations]. *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki* [J. of Computational Mathematics and Mathematical Physics], 1991, no. 10, pp. 1489–1497. (In Russian)
  17. Eckmann, J. P. Road to turbulence in dissipative dynamical systems. *Rev. Mod. Phys.*, 1981, vol. 53, pp. 643–654. DOI: 10.1103/RevModPhys.53.643
  18. Campbell, D., Rose, H. (eds.) Order in chaos. *Proc. of the Int. Conf. in Los Alamos*. Amsterdam, North Holland, 1983.
  19. Golubb, J. P., Benson, S. V. Phase locking in the oscillations leading to turbulence. In: H. Haken (ed.) *Pattern formation and pattern recognition*. Springer–Heidenberg, New York, 1979.
  20. Jansen, M. N., Bak, P., Bohr, T. Complete Devil's staircase, fractal dimension and universality of mode-locking structures. *Phys. Rev. Lett.*, 1983(b), vol. 50, pp. 1637–1639.
  21. Libchaber, A., Fauve, S., Laroche, C. Two-parameter study of routes to chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1983, vol. 7, pp. 73–84.
  22. Schuster, H.G. *Deterministic chaos. An introduction. XXIII*. Weinheim, Physik-Verlag, 1984.
  23. Hirsch, M.W., Smale, S., Devaney, R.L. *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*. Elsevier, 2018.
  24. Elhadj, Z. *Dynamical systems: Theory and Applications*. CRC Press, 2019.
  25. Argyris, J.H., Faust, G., Haase, M., Friedrich, R. *An exploration of dynamical system and chaos*. Springer, 2015.
  26. Kolmogorov, A.N. O sokhraneniі uslovno periodicheskikh dvizheniy pri malom izmenenii funktsii Gamil'tona [On the conservation of conditionally periodic motions with a small change in the Hamilton function]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the USSR Academy of Sciences], 1954, vol. 98, no. 4, pp. 527–530. (In Russian)
  27. Arnol'd, V.I. Malye znamenateli II. Dokazatel'stvo teoremy A.N. Kolmogorova o sokhraneniі uslovno periodicheskikh dvizheniy pri malom izmenenii funktsii Gamil'tona [Small denominators II. Proof of the theorem of A.N. Kolmogorov on the conservation of conditionally periodic motions with a small change in the Hamilton function]. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Russian Mathematical Surveys], 1963, vol. 18, pp. 5–13. (In Russian)
  28. Arnold, V.I., Avez, A. *Ergodic problems in classical mechanics*. Benjamin–New York, 1968.
  29. Mozer, J. Convergent series expansions of quasi-periodic motions. *Math. Ann.*, 1967, vol. 169, iss. 1, pp. 163–173.