## Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-2-9-13

# О МОДЕЛИ ПРЕДОПОЛЗНЕВОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ОСТРОУГОЛЬНОЙ КЛИНОВИДНОЙ ОБЛАСТИ

**Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Хрипков Д. А., Евдокимов В. С., Коваленко М. М.**

ABOUT THE PRE-LANDSLIDE STRUCTURE MODEL IN AN ACUTE-ANGLED WEDGE-SHAPED AREA

V. A. Babeshko[1,2], O. V. Evdokimova[2], O. M. Babeshko[1], D. A. Khripkov[1], V. S. Evdokimov[2], M. M. Kovalenko[2]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

*Abstract.* We consider a cylindrical area whose perpendicular cross-section is an acute wedge with a solution angle less than or equal to a straight one. It is assumed that the area is filled with a water-saturated medium, it can be anisotropic, prone to spreading and causing a landslide. These media can have a viscosity, be viscoelastic and with variable flow characteristics, the most dangerous parameters in cases of pre-landslide formations. In order to cover all possible cases, the limit option is considered, which consists in replacing the described media with the most fluid medium – a liquid. The study is carried out under the assumption of possible dynamic effects of a vibrational nature. Thus, the study was reduced to the study of the Helmholtz equation in the wedge-shaped region. Dirichlet conditions are set on the border. The block element method is used for research, allows you to solve the boundary value problem in a closed form.

*Keywords:* block element method, boundary value problem, Helmholtz equation, pseudo-differential equations, wedge-shaped area.

### Введение

Исследованию уравнения Гельмгольца посвящено большое количество работ. В первую очередь это работы в слоистых областях [1], где эффективно применен метод интегральных преобразований. В работах [2–4] развит лучевой метод, давший возможность исследовать при высоких частотах граничные задачи в произвольных областях, в том числе для уравнения Гельмгольца. В работах [5–9] развивается метод представления решений граничных задач теории упругости термоэлектроупругости, поронасыщенных сред Био с использованием решений уравнения Гельмгольца. Достаточно большое число работ посвящено исследованию этого уравнения для плоских клиньев методом преобразования Конторовича–Лебедева [10] и других преоб-

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Хрипков Дмитрий Александрович, научный сотрудник Кубанского государственного университета; e-mail: vestnik@fpm.kubsu.ru.

Евдокимов Владимир Сергеевич, студент Кубанского государственного университета, лаборант Южного научного центра РАН; e-mail: evdok_vova@mail.ru.

Коваленко Мария Михайловна, младший научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: akinina_mm@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки России на 2020 г. (проект FZEN-2020-0022), Южного научного центра РАН на 2020 г. (проект 00-20-13) № госрег. 01201354241, и при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

разований. Метод блочного элемента впервые для решения граничной задачи Неймана для уравнения Гельмгольца рассмотрен в [11]. В этой работе построено точное решение рассматриваемой граничной задачи в виде упакованных блочных элементов при произвольных граничных условиях в области типа неограниченного прямоугольного клина. Также произведен анализ акустических свойств среды в этой области.

В настоящей статье по аналогии с указанной работой исследуется граничная задача Неймана для уравнения Гельмгольца. Исследован ряд свойств решения этой граничной задачи, необходимой для решения более сложных задач. Представления решений граничных задач в виде упакованных блочных элементов открывают возможность исследования и решения граничных задач практически любой сложности и в любых областях. Это связано с тем, что произвольную область всегда можно реально или виртуально представить в виде некоторой блочной структуры, блоки которой можно формировать из условия удобства решения на них заданных граничных задач [12].

## 1. Постановка задачи

Введем правую прямоугольную систему координат, направив оси $\mathrm{o}x_1$, $ox_3$ горизонтально, а ось $\mathrm{o}x_2$ — вертикально вверх. Рассматривается граничная задача для трехмерного уравнения Гельмгольца в клиновидной области $\Omega = \{0 \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \operatorname{tg} \nu,\ |x_3| \leqslant \infty\}$. На границах области $\Omega$ задаются условия Неймана. Задачи такого рода возникают при исследовании оползневых явлений, акустических свойств неограниченных областей тип клина, а также при подготовке исходных данных для исследования более сложных граничных задач для уравнений Ламе, Навье–Стокса, Максвелла и других [7–9] в таких областях. Построение решений в форме упакованных блочных элементов — необходима часть исследования при изучении блочных структур. Указанная граничная задача в ограниченной области, в прямоугольной пирамиде, рассматривалась в [13]. В ней после введения локальных систем координат методом блочного элемента с осуществлением касательного расслоения границы были построены функциональные и псевдодифференциальные уравнения.

Функциональные уравнения для анизотропного уравнения Гельмгольца

$$\begin{gathered}\left[A_{11}\partial^2 x_1 + A_{22}\partial^2 x_2 + A_{33}\partial^2 x_3 + A\right] \times \\ \times\, \phi\,(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad (1.1)\end{gathered}$$

имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_3\Phi_3 = &\int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\phi'_{33} - i\alpha_3^3\phi_3\right) \times \\
&\times \exp i\left[\alpha_1^3\eta_1^3 + \alpha_2^3\eta_2^3\right] \mathrm{d}\eta_1^3\, \mathrm{d}\eta_2^3 - \\
&- \int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{11}\left(\phi'_{23} - i\alpha_1^3\phi_2\right) \times \\
&\times \exp i\big[\alpha_1^3\left(x_3^2 + \alpha\right) + \alpha_2^3 x_2^2 - \\
&- \alpha_3^3\left(x_1^2 + b\right)\big]\, \mathrm{d}x_1^2\, \mathrm{d}x_2^2 - \\
&- \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\phi'_{63} - i\alpha_2^3\phi_6\right) \times \\
&\times \exp i\big[\alpha_1^3 x_1^6 + \alpha_2^3\left(x_3^6 + c\right) - \\
&- \alpha_3^3\left(x_2^6 + b\right)\big]\, \mathrm{d}x_1^6\, \mathrm{d}x_2^6 + \\
&+ \iint_{\partial\Omega_v}\big[\mathrm{A}_{33}^v\left(\phi_{v3} - ic_{k3}^3\alpha_k^3\phi_v\right) - \\
&- ic_{k1}^3\alpha_k^3\mathrm{A}_{13}^v\phi_v - ic_{k3}^3\alpha_k^3\mathrm{A}_{23}^v\phi_v\big] \times \\
&\times \mathrm{E}_{3v}\left(\alpha_1^3, \alpha_2^3, \alpha_3^3, x_1^v, x_2^v, x_3^v\right) \mathrm{d}x_1^v\, \mathrm{d}x_2^v;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{K}_\nu\Phi_\nu = &\iint_{\partial\Omega_v}\big[\mathrm{A}_{33}^v\left(\phi_{v3} - i\alpha_3^v\phi_v\right) - \\
&- i\alpha_1^v\mathrm{A}_{13}^v\phi_v - i\alpha_2^v\mathrm{A}_{23}^v\phi_v\big] \times \\
&\times \exp i\left[\alpha_1^v\eta_1^v + \alpha_2^v\eta_2^v\right] \mathrm{d}\eta_1^v\, \mathrm{d}\eta_2^v + \\
&+ \int_{-b}^{b}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{11}\left(\phi'_{23} - ic_{3m}^2\alpha_m^v\phi_2\right) \times \\
&\times \mathrm{E}_{\nu n}\left(\alpha_1^v, \alpha_2^v, \alpha_3^v, x_1^2, x_2^2, x_3^2\right) \mathrm{d}x_1^2\, \mathrm{d}x_2^2 + \\
&+ \int_{-a}^{a}\int_{-c}^{c} \mathrm{A}_{33}\left(\phi'_{33} - ic_{3m}^3\alpha_m^v\phi_3\right) \times \\
&\times \mathrm{E}_{\nu n}\left(\alpha_1^v, \alpha_2^v, \alpha_3^v, x_1^3, x_2^3, x_3^3\right) \mathrm{d}x_1^3\, \mathrm{d}x_2^3 + \\
&+ \int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} \mathrm{A}_{22}\left(\phi'_{63} - ic_{3m}^6\alpha_m^v\phi_6\right) \times \\
&\times \mathrm{E}_{\nu n}\left(\alpha_1^v, \alpha_2^v, \alpha_3^v, x_1^6, x_2^6, x_3^6\right) \mathrm{d}x_1^6\, \mathrm{d}x_2^6.
\end{aligned}$$

Участвующие в представлении параметры детально описаны в работе [13] и здесь не повторяются. В указанной статье также строятся блочные элементы для треугольников граней, что дает возможность воспользоваться этими результатами и построить упакованные блочные элементы в клиновидной области. В настоящей работе применяется вариант метода блочного элемента, основанный на привязке локальных систем координат к единой координатной системе, что, в связи с формой области $\Omega$, позволяет выполнить исследование более наглядно. Ниже уравнение (1.1) упрощается и рассматривается трехмерное уравнение Гельмгольца

$$[\, \partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + p^2 \,]\, u(x_1, x_2, x_3) = 0$$

в области $\Omega = \{0 \leqslant x_1 \leqslant \infty,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant x_1 \operatorname{tg} \nu, |x_3| \leqslant \infty\}$.

Здесь параметр $p$ может быть комплексным числом.

Для применения метода блочного элемента к граничной задаче в блочной структуре, необходимо выполнить три алгоритма: внешней алгебры, внешнего анализа и построение фактор-топологии. Ввиду рассмотрения лишь одного блочного элемента, необходимость в последнем алгоритме отпадает.

## 2. Метод решения

Применением преобразования Фурье к дифференциальному уравнению по параметру $x_3$ в граничной задаче, получаем дифференциальное уравнение с параметром вида

$$\left(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2\right) u\,(x_1, x_2, \alpha_3) = 0,$$

$$k^2 = p^2 - \alpha_3^2.$$

Рассмотрим для этого уравнения граничную задачу Неймана. Граничные условия для данного уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, \alpha_3)}{\partial x_2} = f_1(x_1, x_2, \alpha_3),$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2, \alpha_3)}{\partial \mathbf{n}} = f_2(x_1, x_2, \alpha_3).$$

Здесь $\mathbf{n}$ — внутренняя нормаль к верхней границе. Произвольные функции $f_n$ обладают свойствами, достаточными для разрешимости соответствующих граничных задач в пространствах медленно растущих обобщенных функций. Поскольку область $\Omega$ содержит бесконечно удаленные точки, в том случае, если в граничной задаче появляются волновые функции, ищется решение с применением принципа излучения.

Введем локальную систему координат, согласованную с границами клина раствора $0 < \nu \leqslant 0{,}5\pi$,

$$x_1 = x_1^\nu + x_2^\nu \cos \nu, \quad x_2 = x_2^\nu \sin \nu.$$

В новых координатах уравнение Гельмгольца принимает вид

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x_1^{\nu}} - 2 \frac{\partial}{\partial x_2^{\nu}} \frac{\partial}{\partial x_1^{\nu}} \cos \nu + \frac{\partial^2}{\partial x_2^{\nu}} + k^2 \right] \times$$
$$\times\, u^\nu (x_1^\nu, x_2^\nu, \alpha_3) = 0.$$

Граничные условия на нижней и верхней границах имеют, соответственно, вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial x_1^{\nu}} u^\nu \left(0, x_2^\nu, \alpha_3\right) - \\
- \frac{\partial}{\partial x_2^{\nu}} u^\nu \left(0, x_2^\nu, \alpha_3\right) \cos \nu = \\
= f_2^\nu \left(0, x_2^\nu, \alpha_3\right), \\
\frac{\partial}{\partial x_2^{\nu}} u^\nu \left(x_1^\nu, 0, \alpha_3\right) - \\
- \frac{\partial}{\partial x_1^{\nu}} u^\nu \left(x_1^\nu, 0, \alpha_3\right) \cos \nu = \\
= f_1^\nu \left(x_1^\nu, 0, \alpha_3\right).
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Используя один из способов касательного расслоения границы, после применения двумерного преобразования Фурье и введения внешних форм, по аналогии с [11] приходим к функциональным и псевдодифференциальным уравнениям, решения которых дают следующее представление внешней формы граничной задачи

$$\omega(\alpha_1^\nu, \alpha_2^\nu, \alpha_3) = \left\langle 1 - \frac{(i\alpha_2^\nu - i\alpha_1^\nu \cos \nu)}{(i\alpha_{2+}^\nu - i\alpha_1^\nu \cos \nu)} \right\rangle \times$$
$$\times \left\langle f_1^\nu(\alpha_1^\nu, b, \alpha_3) - \right.$$
$$\left. - f_1^\nu(\alpha_{1+}^\nu, b, \alpha_3) \frac{(i\alpha_1^\nu - i\alpha_2^\nu \cos \nu)}{(i\alpha_{1+}^\nu - i\alpha_2^\nu \cos \nu)} \right\rangle +$$

$$+\left\langle 1-\frac{(i\alpha_1^\nu - i\alpha_2^\nu\cos\nu)}{(i\alpha_{1+}^\nu - i\alpha_2^\nu\cos\nu)}\right\rangle \times$$

$$\times\left\langle f_2^\nu(c,\alpha_2^\nu,\alpha_3) - \right.$$

$$\left. - f_2^\nu(c,\alpha_{2+}^\nu,\alpha_3)\frac{(i\alpha_2^\nu - i\alpha_1^\nu\cos\nu)}{(i\alpha_{2+}^\nu - i\alpha_1^\nu\cos\nu)}\right\rangle.$$

Здесь приняты обозначения

$$\alpha\alpha_{1+}^\nu = \alpha\alpha_2^\nu\cos\nu + i\sqrt{\alpha_2^{\nu 2}(1-\cos^2\nu)-k^2},$$

$$\alpha\alpha_{2+}^\nu = \alpha_1^\nu\cos\nu + i\sqrt{\alpha_1^{\nu 2}(1-\cos^2\nu)-k^2}.$$

Тогда решение граничной задачи можно представить в виде

$$u^\nu(x_1^\nu,x_2^\nu,x_3) =$$

$$= \frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{R^3}\frac{\omega(\alpha_1^\nu,\alpha_2^\nu,\alpha_3)e^{-i\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle}d\alpha_1^\nu d\alpha_2^\nu d\alpha_3}{(\alpha_1^\nu - 2\alpha_1^\nu\alpha_2^\nu\cos\nu + \alpha_2^\nu - k^2)},$$

$$\langle\boldsymbol{\alpha}\mathbf{x}\rangle = \alpha_1^\nu x_1^\nu + \alpha_2^\nu x_2^\nu + \alpha_3 x_3.$$

Для получения решения в исходной системе координат необходимо воспользоваться обратной заменой

$$x_1^\nu = x_1. - x_2\operatorname{ctg}\nu, \quad x_2^\nu = x_2\sin^{-1}\nu.$$

## Заключение

Решение граничной задачи для уравнения Гельмгольца можно исследовать таким же путем, как и в случае прямого угла клиновидной области [11]. Построенное интегральное представление решения граничной задачи для уравнения Гельмгольца достаточно просто переносится на решение нестационарных задач. Достаточно применить к нестационарному уравнению Гельмгольца преобразование Лапласа по времени с параметром $s$. В результате получаем аналогичную граничную задачу с двумя параметрами — $\alpha_3$ и $s$. Все остальное сохраняется без изменения.

## Литература


1. *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973. 502 с.
2. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Математический сборник. 1964. Т. 65. С. 577–630.
3. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 256 с.
4. *Cerveny V., Molotkov I.A., Psencik I.* Rey Method in seismology. Praha: Univerzita Karlova, 1977. 216 p.
5. *Мухина И.В.* Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // ПММ. 1972. Т. 36. С. 667–671.
6. *Молотков Л.А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. С.-Пб: Наука, 2001. 348 с.
7. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
8. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
9. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
10. *Беркович В.Н.* К теории смешанных задач динамики клиновидных композитов // ДАН. Т. 34. № 1. С. 172–176.
11. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* К проблеме акустических и гидродинамических свойств среды, занимающей область трехмерного прямоугольного клина // Прикладная механика и техническая физика. 2019. Т. 60. № 6. С. 90–96. DOI: 10.15372/PMTF20190610
12. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Рядчиков И.В.* Метод проектирования неоднородных материалов и блочных конструкций // ДАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014
13. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* О пирамидальном блочном элементе // ДАН. 2009. Т. 428. № 1. С. 30–34.
14. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стадиях преобразования блочных элементов // ДАН. 2016. Т. 468. № 2. С. 154–158.
15. *Федорюк М.В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977. 368 с.


## References


1. Brekhovskikh, L.M. *Volny v sloistykh sredakh* [Waves in layered media]. Nauka, Moscow, 1973. (In Russian)
2. Babich, V.M. O korotkovolnovoy asimptotike funktsii Grina dlya uravneniya Gel'mgol'tsa [On the short-wave asymptotic behavior of the Green's function for the Helmholtz equation]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical Collection], 1964, vol. 65, pp. 577–630. (In Russian)
3. Babich, V.M., Buldyrev, V.S. *Asimptoticheskie metody v probleme difraktsii korotkikh voln* [Asymptotic methods in the problem of short-wave diffraction]. Nauka, Moscow, 1972. (In Russian)

4. Cerveny, V., Molotkov, I.A., Psencik, I. *Rey Method in seismology.* Univerzita Karlova, Praha, 1977.
5. Mukhina, I.V. Priblizhennoe svedenie k uravneniyam Gel'mgol'tsa uravneniy teorii uprugosti i elektrodinamiki dlya neodnorodnykh sred [Approximate reduction to the Helmholtz equations of the equations of elasticity theory and electrodynamics for inhomogeneous media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1972, vol. 36, pp. 667–671. (In Russian)
6. Molotkov, L.A. *Issledovanie rasprostraneniya voln v poristykh i treshchinovatykh sredakh na osnove effektivnykh modeley Bio i sloistykh sred* [The study of wave propagation in porous and fractured media based on effective models of Bio and layered media]. Nauka, S.-Pb, 2001. (In Russian)
7. Novatskiy, V. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Mir, Moscow, 1975. (In Russian)
8. Novatskiy, V. *Dinamicheskie zadachi termouprugosti* [Dynamic problems of thermoelasticity]. Mir, Moscow, 1970. (In Russian)
9. Novatskiy, V. *Elektromagnitnye effekty v tverdykh telakh* [Electromagnetic effects in solids]. Mir, Moscow, 1986. (In Russian)
10. Berkovich, V.N. K teorii smeshannykh zadach dinamiki klinovidnykh kompozitov [On the theory of mixed problems of the dynamics of wedge-shaped composites]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], vol. 34, no. 1, pp. 172–176. (In Russian)
11. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. K probleme akusticheskikh i gidrodinamicheskikh svoystv sredy, zanimayushchey oblast' trekhmernogo pryamougol'nogo klina [On the problem of acoustic and hydrodynamic properties of a medium occupying the region of a three-dimensional rectangular wedge]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2019, vol. 60, no. 6, pp. 90–96. DOI: 10.15372/PMTF20190610 (In Russian)
12. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Ryadchikov, I.V. Metod proektirovaniya neodnorodnykh materialov i blochnykh konstruktsiy [The method of designing heterogeneous materials and block structures]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2018, vol. 482, no. 4, pp. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014 (In Russian)
13. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. O piramidal'nom blochnom elemente [About the Pyramidal Block Element]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2009, vol. 428, no. 1, pp. 30–34. (In Russian)
14. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. O stadiyakh preobrazovaniya blochnykh elementov [About the stages of transforming block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2016, vol. 468, no. 2,, pp. 154–158. (In Russian)
15. Fedoryuk, M.V. *Metod perevala* [Method of steepest descent]. Nauka, Moscow, 1977. (In Russian)



Статья поступила 18 мая 2020 г.