Механика

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-2-14-17

ОБ УПАКОВАННЫХ ВЕКТОРНЫХ БЛОЧНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

Бабешко О. М., Бабешко В. А., Евдокимова О. В.

ABOUT PACKED VECTOR BLOCK ELEMENTS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

O. M. Babeshko[1], V. A. Babeshko[1,2], O. V. Evdokimova[2]

[1] Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
[2] Southern Scientific Center, Russian Academy of Science, Rostov-on-Don, 344006, Russia
e-mail: babeshko41@mail.ru

Abstract. This paper provides an example of a Packed vector block element for boundary value problems described by a system of partial differential equations with constant coefficients in the classical domain. The developed method of constructing Packed, both scalar and vector block elements is applicable for solving boundary problems not only in quadrants, but also in such areas as a rectangle, a rectangular parallelepiped, cylinders with rectangular and acute-angle sections. Previously, this was not possible to implement. The variability of the parameters of the differential equations of the considered medium is achieved by introducing meshes with dimensions in which the coefficients of the differential equations can be considered constant. The Union of block elements is obtained by constructing the corresponding factor topologies of vector topological spaces. This approach makes it possible to design materials with variable properties, study wave processes in inhomogeneous media, and study the behavior of block structures with inhomogeneous blocks.

Keywords: boundary value problems, packed scalar and vector block elements, Lame equation.

Введение

На примере решения граничной задачи для системы дифференциальных уравнений Ламе приводится построенный в [1] упакованный векторный блочный элемент. Он представляет точное решение граничной задачи для этой системы дифференциальных уравнений. Блочные элементы могут быть представлены в упакованном и распакованном виде. Свойства решений в таких формах в скалярном случае были ранее изложены в публикациях [2–5]. В настоящей статье на указанном примере впервые разъясняются эти свойства для упакованных векторных блочных элементов. В более ранних работах авторов метод блочного элемента успешно применялся в граничных задачах для одного уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами (скалярный случай). Другие подходы решения граничных задач в классических областях изложены в [6–14].

Ниже дана постановка этой задачи и приведено представление упакованного векторного блочного элемента, построенного в [1].

1. Рассматриваемые уравнения

1. Рассмотрим плоскую граничную задачу второго рода для системы уравнений Ламе, поставленную в первом квадранте при гармонических воздействиях на границе. Ранее точное ее решение получить не удавалось, однако методом блочного элемента в рабо-

Бабешко Ольга Мефодиевна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета; e-mail: babeshko49@mail.ru.

Бабешко Владимир Андреевич, академик РАН, д-р физ.-мат. наук, заведующий кафедрой математического моделирования Кубанского государственного университета, директор Научно-исследовательского центра прогнозирования и предупреждения геоэкологических и техногенных катастроф Кубанского государственного университета, заведующий лабораторией Южного федерального университета; e-mail: babeshko41@mail.ru.

Евдокимова Ольга Владимировна, д-р физ.-мат. наук, главный научный сотрудник Южного научного центра РАН; e-mail: evdokimova.olga@mail.ru.

Отдельные фрагменты работы выполнены в рамках реализации Госзадания Минобрнауки России на 2020 г. (проект FZEN-2020-0022), Южного научного центра РАН на 2020 г. (проект 00-20-13) № госрег. 01201354241, и при поддержке грантов Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

те [1] получено ее точное решение в форме упакованных векторных блочных элементов. Этим же методом можно строить упакованные блочные элементы и в таких областях, как прямоугольник, прямоугольный параллелепипед, цилиндры с прямоугольными и остроугольными сечениями.

В первом квадранте, обозначенном Ω, с осями координат x_1ox_2, уравнения Ламе, после исключения члена $\exp(-i\omega t)$, имеют вид

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_1}+\mu\Delta u_1+k^2u_1=0,$$

$$\theta=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2},\quad k^2=\rho\omega^2, \tag{1.1}$$

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\theta}{\partial x_2}+\mu\Delta u_2+k^2u_2=0,\quad x_1,x_2\in\Omega,$$

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Здесь $u_n(x_1,x_2)$ — компоненты векторов перемещений в точке x_1,x_2, Ω — область первого квадранта $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, λ, μ — параметры Ламе, ρ — плотность материала деформируемого тела, ω — частота внешних гармонических воздействий на границе, задаваемых комплексной функцией $\exp(-i\omega t)$, где t — время. Значения напряжений на границах квадранта обозначаются на оси абсцисс функциями $X_{x_2x_2}(x_1,0)$, $Y_{x_2x_1}(x_1,0)$ и $X_{x_1x_1}(0,x_2)$, $Y_{x_1x_2}(0,x_2)$ — на оси ординат. Нормальные к границе напряжения обозначаются символом X, а касательные — Y. В случае граничной задачи второго рода на границах задаются векторы перемещений с компонентами $u_n(x_1,0)$, $u_n(0,x_2)$ на осях абсцисс и ординат соответственно. При этом для $n=1$ принимаются нормальные к границе перемещения и при $n=2$ – касательные.

2. Метод исследования

Погрузив граничную задачу в топологическое пространство медленно растущих обобщенных функций [1], применив операторы преобразования Фурье $\mathbf{F}_2(\alpha_1,\alpha_2)$ и алгоритм внешней алгебры, приходим к системе функциональных уравнений, исследовав и решив которые, получаем представление решения поставленной граничной задачи в форме упакованного векторного блочного элемента

$$\mathbf{u}=\mathbf{F}^{-1}(x_1,x_2)\,\mathbf{B}^{-1}(\alpha_1,\alpha_2)\,\boldsymbol{\omega}, \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{\omega}(\alpha_1,\alpha_2)=\{\omega_1,\omega_2\},$$

$$\omega_1(\alpha_1,\alpha_2)=[s_1(\alpha_1,\alpha_2)-s_1(\alpha_{11+},\alpha_2)]-\\-[s_1(\alpha_1,\alpha_{21+})-s_1(\alpha_{11+},\alpha_{21+})],$$

$$\omega_2(\alpha_1,\alpha_2)=[s_2(\alpha_1,\alpha_2)-s_2(\alpha_{12+},\alpha_2)]-\\-[s_2(\alpha_1,\alpha_{22+})-s_2(\alpha_{12+},\alpha_{22+})].$$

Использованы обозначения из работы [1]

$$s_1(\alpha_1,\alpha_2)=\\=i[(\lambda+2\mu)\alpha_1u_1(0,\alpha_2)+\mu\alpha_2u_2(0,\alpha_2)]+\\+i[\mu\alpha_2u_1(\alpha_1,0)+\lambda\alpha_1u_2(\alpha_1,0)];$$

$$s_2(\alpha_1,\alpha_2)=\\=i[\mu\alpha_1u_2(0,\alpha_2)+\lambda\alpha_2u_1(0,\alpha_2)]+\\+i[(\lambda+2\mu)\alpha_2u_2(\alpha_1,0)+\mu\alpha_1u_1(\alpha_1,0)];$$

$$s_1(\alpha_1,\alpha_2)-s_1(\alpha_{11+},\alpha_2)=\\=i(\lambda+2\mu)[\alpha_1u_1(0,\alpha_2)-\alpha_{11+}u_1(0,\alpha_2)]+\\+i\mu[\alpha_2u_1(\alpha_1,0)-\alpha_2u_1(\alpha_{11+},0)]+\\+\lambda[\alpha_1u_2(\alpha_1,0)-\alpha_{11+}u_2(\alpha_{11+},0)];$$

$$s_2(\alpha_1,\alpha_{22+})-s_2(\alpha_{12+},\alpha_{22+})=\\=\mu[\alpha_1u_2(0,\alpha_{22+})-\alpha_{12+}u_2(0,\alpha_{22+})]+\\+i\mu[\alpha_1u_1(\alpha_1,0)\neg\alpha_{12+}u_1(\alpha_{12+},0)]+\\+(\lambda+2\mu)[\alpha_{22+}u_2(\alpha_1,0)\neg\alpha_{22+}u_2(\alpha_{12+},0)].$$

Выводы

В построенные решения входят задаваемые на границе квадранта Ω компоненты вектора перемещений. С целью решения граничных задач для дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами необходимо ввести сетку с размерами, в которых коэффициенты дифференциальных уравнений можно считать постоянным. Объединение блочных элементов получается путем построения соответствующих фактор-топологий векторных топологических пространств. С помощью этого подхода оказывается возможным проектирование материалов с переменными свойствами, изучение волновых процессов в неоднородных средах, исследование поведения конструкций блочного строения с неоднородными блоками.

Литература

1. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* Применение метода блочного элемента в одной граничной задаче академика И.И.Воровича // ДАН. 2020. Т. 494. № 4. С. 427–431.
2. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стадиях преобразования блочных элементов // ДАН. 2016. Т. 468. № 2. С. 154–158.
3. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М., Рядчиков И.В.* Метод проектирования неоднородных материалов и блочных конструкций // ДАН. 2018. Т. 482. № 4. С. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014
4. *Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М.* О стартовых землетрясениях при горизонтальных воздействиях // ДАН. 2017. Т. 474. № 4. С. 427–431.
5. *Бабешко В.А., Бабешко О.М., Евдокимова О.В.* Об интегральном и дифференциальном методах факторизации // ДАН. 2006. Т. 410. № 2. С. 168–172.
6. *Александров В.М., Копасенко В.В.* Контактная задача для упругого клина с жестко защемленной гранью // Прикладная механика. 1968. Т. 4, № 7. С. 75–82.
7. *Бабич В.М.* О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Математический сборник. 1964. Т. 65. С. 577–630.
8. *Бабич В.М., Булдырев В.С.* Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972. 256 с.
9. *Мухина И.В.* Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // ПММ. 1972. Т. 36. С. 667–671.
10. *Молотков Л.А.* Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. С.-Пб.: Наука, 2001. 348 с.
11. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
12. *Новацкий В.* Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986. 160 с.
13. *Улитко А.Ф.* Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев: Наукова Думка, 1979. 262 с.
14. *Гринченко В.Т., Мелешко В.В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. Киев: Наукова Думка, 1981. 284 с.

References

1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. Primenenie metoda blochnogo elementa v odnoy granichnoy zadache akademika I.I. Vorovicha [Application of the block element method in one boundary problem of academician I.I. Vorovich]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2020, vol. 494, no. 4, pp. 427–431. (In Russian)
2. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. O stadiyakh preobrazovaniya blochnykh elementov [About the stages of transforming block elements]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2016, vol. 468, no. 2, pp. 154–158. (In Russian)
3. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M., Ryadchikov, I.V. Metod proektirovaniya neodnorodnykh materialov i blochnykh konstruktsiy [The method of designing heterogeneous materials and block structures]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2018, vol. 482, no. 4, pp. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014 (In Russian)
4. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. O startovykh zemletryaseniyakh pri gorizontal'nykh vozdeystviyakh [On starting earthquakes with horizontal impacts]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2017, vol. 474, no. 4, pp. 427–431. (In Russian)
5. Babeshko, V.A., Babeshko, O.M., Evdokimova, O.V. Ob integral'nom i differentsial'nom metodakh faktorizatsii [Integral and differential factorization methods]. *Doklady Akademii nauk* [Rep. of the Academy of Sciences], 2006, vol. 410, no. 2, pp. 168–172. (In Russian)
6. Aleksandrov, V.M., Kopasenko, V.V. Kontaktnaya zadacha dlya uprugogo klina s zhestko zashchemlennoy gran'yu [Contact problem for an elastic wedge with a rigidly clamped face]. *Prikladnaya mekhanika* [Applied Mechanics], 1968, vol. 4, no. 7, pp. 75–82. (In Russian)
7. Babich, V.M. O korotkovolnovoy asimptotike funktsii Grina dlya uravneniya Gel'mgol'tsa [On the short-wave asymptotics of the Green's function for the Helmholtz equation]. *Matematicheskiy sbornik* [Mathematical collection], 1964, vol. 65, pp. 577–630. (In Russian)
8. Babich, V.M., Buldyrev, V.S. *Asimptoticheskie metody v probleme difraktsii korotkikh voln* [Asymptotic methods in the problem of short-wave diffraction]. Nauka, Moscow, 1972. (In Russian)
9. Mukhina, I.V. Priblizhennoe svedenie k uravneniyam Gel'mgol'tsa uravneniy teorii uprugosti i elektrodinamiki dlya neodnorodnykh sred [Approximate reduction to the Helmholtz equations of the equations of the theory of elasticity and electrodynamics for inhomogeneous media]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 1972, vol. 36, pp. 667–671. (In Russian)
10. Molotkov, L.A. Issledovanie rasprostraneniya voln v poristykh i treshchinovatykh sredakh na osnove effektivnykh modeley Bio i sloistykh sred [The study of wave propagation in porous and

fractured media based on effective models of Bio and layered media]. Nauka, S.-Pb., 2001. (In Russian)
11. Novatskiy, V. *Teoriya uprugosti* [Elasticity theory]. Mir, Moscow, 1975. (In Russian)
12. Novatskiy, V. *Elektromagnitnye effekty v tverdykh telakh* [Electromagnetic effects in solids]. Mir, Mpscow, 1986. (In Russian)
13. Ulitko, A.F. *Metod sobstvennykh vektornykh funktsiy v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti* [The method of eigenvector functions in spatial problems of the theory of elasticity]. Naukova Dumka, Kiev, 1979. (In Russian)
14. Grinchenko, V.T., Meleshko, V.V. *Garmonicheskie kolebaniya i volny v uprugikh telakh* [Harmonic vibrations and waves in elastic bodies]. Naukova Dumka, Kiev, 1981. (In Russian)

Статья поступила 23 мая 2020 г.