

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-2-18-28

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ТЕРМОУПРУГОСТИ
ДЛЯ СИСТЕМЫ «ПОКРЫТИЕ–ПОДЛОЖКА» С ОТСЛОЕНИЕМ

Ватульян А. О., Нестеров С. А.

ON AN APPROACH TO SOLVING THE PROBLEM OF THERMOELASTICITY
FOR A COATING-SUBSTRATE SYSTEM WITH DELAMINATIONA. O. Vatulyan^{1,2}, S. A. Nesterov²¹ South Federal University, Rostov-on-Don, Russia² South Mathematical Institute – branch of Vladikavkazskiy Scientific Centre of RAS, Vladikavkaz,
Russia

e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Abstract. The equilibrium of the “heat-protective coating-substrate” system with an interface crack under the influence of a heat load localized at the upper boundary of the coating is considered. The coating-substrate system is modeled as a non-uniform band. The crack is modeled as a mathematical section, the banks of which are heat-insulated and stress-free; this leads to temperature and displacements jumps. The task is to find temperature jumps and displacements (opening functions) on the banks of the crack. Knowing the opening functions, you can calculate the stress-strain state at any point in the band. At the first stage, the problem of stationary thermal conductivity with a crack is solved. The solution is based on a combination of the Fourier transform and the targeting method. A hypersingular integral equation is obtained with respect to the temperature jump function on the separation. At the second stage, the problem of unbound thermoelasticity is solved. A system of hypersingular integral equations with respect to disclosure functions is obtained. The solution of integral equations is based on the collocation method, taking into account the behavior of transfer functions. The case of continuous change of material characteristics across the boundary of the “coating–substrate” section is considered. It was found that the value of the temperature jump is proportional to the amplitude of the heat flow; the temperature jump increases as the coating thickness decreases. In the case of a load that is located symmetrically relative to the center of separation, the temperature jump function and the opening function also have symmetry.

Keywords: heat-protective coating, strip, interface crack, functionally graded materials, hypersingular integral equations, Fourier transform, targeting method.

Введение

Для защиты металлических элементов конструкций, работающих в высокотемпературном окружении (до 1300 °С), широко применяются термобарьерные покрытия [1]. Основное свойство термобарьерных покрытий — низкий коэффициент теплопроводности, благодаря чему на поверхности металла температура снижается до 100–300 °С. В течение многих лет теплозащитные покрытия изготавливали из однородных материалов, что часто приводило к возникновению концентрации напряжений в области сопряжения покрытия

и подложки, обладающих разными термомеханическими свойствами. Для решения этой проблемы в настоящее время все чаще применяются покрытия из функционально-градиентных материалов (FGM). Отличительной особенностью таких покрытий является плавное изменение термомеханических свойств в области сопряжения материалов [2–5]. Функционально-градиентное покрытие обычно представляет собой композиционный материал, полученный путем перемешивания и спекания керамических и металлических составляющих. При этом неоднородность материала проявляется в зависимости коэффициентов

Ватульян Александр Ованесович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости Института математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru.

Нестеров Сергей Анатольевич, канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотр. отдела дифференциальных уравнений Южного математического института – филиала Владикавказского научного центра РАН; e-mail: 1079@list.ru.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (18-11-00069).

дифференциальных операторов термоупругости от координат.

В случае недостаточной адгезии на границе покрытия и подложки могут возникнуть трещины-отслоения. Исследованию напряженно-деформированного состояния (НДС) вблизи интерфейсных трещин-отслоений посвящено большое количество работ [6–27]. На начальном этапе исследования ограничивались определением НДС вблизи трещины на границе раздела однородных материалов только при механическом нагружении [6–8]. Но в связи с широким внедрением теплозащитных покрытий из FGM ученые стали исследовать НДС вблизи трещины на границе неоднородных материалов при тепловом и комбинированном нагружении [9–14, 17–24]. Однако в проведенных исследованиях термомеханические характеристики имели только экспоненциальные законы изменения в направлении, перпендикулярном плоскости трещины, а тепловая нагрузка моделировалась распределенной по всей верхней границе покрытия. Так, в [17] система «покрытие–подложка» моделируется слоистым полупространством. Подложка полагается однородной, а покрытие неоднородным. С помощью интегрального преобразования Фурье задачи теплопроводности и несвязанной термоупругости сводятся к сингулярным интегральным уравнениям относительно градиентов скачков температуры и перемещений, которые затем решаются численно. Построены графики распределения температуры, перемещений и напряжений вблизи трещины. В [22] система «покрытие–подложка» моделируется неоднородной полосой, причем и покрытие, и подложка состоят из FGM с разными параметрами экспоненциальных законов неоднородности. Решения получены на основе методики, изложенной в [17], с поправкой на конечную толщину и неоднородность подложки. Проведены исследования влияния толщины покрытия и значений параметра неоднородности на распределения температуры и перемещений вблизи интерфейсной трещины. Отметим также работы, посвященные задачам, касающимся отслоения покрытий, лежащих на упругом основании [15, 16].

В данной работе исследована задача нахождения функций раскрытия трещины, локализованной на границе сопряжения функционально-градиентного термозащитного покрытия с однородной подложкой. Система

«покрытие–подложка» моделируется неоднородной полосой, на верхней грани которой на конечном отрезке действует тепловая нагрузка. На первом этапе решается задача стационарной теплопроводности для полосы с интерфейсной трещиной. Решение основано на сочетании преобразования Фурье и метода пристрелки. Получено гиперсингулярное интегральное уравнение относительно функции скачка температуры на отслоении. На втором этапе решается задача несвязанной термоупругости. Сформулирована система гиперсингулярных интегральных уравнений относительно функций раскрытия. Гиперсингулярные интегральные уравнения решаются на основе метода коллокаций. Исследовано влияние изменения относительной толщины покрытия и разных типов теплового нагружения верхней грани полосы на характеристики функций раскрытия.

1. Постановка задачи термоупругости

Рассмотрим равновесие системы «функционально-градиентное покрытие–подложка», моделируемое в виде неоднородной полосы. Толщины подложки и покрытия равны соответственно h_1 и h_2 , общая толщина системы — $h = h_1 + h_2$. Нижняя граница системы «покрытие–подложка» $x_3 = 0$ жестко закреплена и поддерживается при нулевой температуре, а на верхней границе $x_3 = h$, свободной от напряжений, на конечном отрезке $[a, b]$ действует тепловой поток $q_0(x_1)$. Параметры Ламе λ и μ , коэффициент теплопроводности k и коэффициент температурных напряжений β являются кусочно-непрерывными функциями координаты x_3 . На границе покрытия и подложки $x_3 = h_1$ на небольшом отрезке $[-c, c]$ имеется трещина, моделируемая математическим разрезом. Берега трещины не взаимодействуют друг с другом, тепловое сопротивление там очень велико и тепловой поток на берегах равен нулю, что вызывает скачок температуры на берегах трещины. Считаем, что напряжения на берегах трещины обращаются в нуль, что вызывает на них скачок перемещений. Задача состоит в нахождении скачков температуры и перемещений (функций раскрытия) на берегах трещины. Зная функции раскрытия, можно рассчитать напряженно-деформированное состояние в любой точке полосы.

Поставленная задача является задачей стационарной термоупругости для систе-

мы «функционально-градиентное покрытие–подложка» с интерфейсной трещиной, находящейся в условиях плоской деформации ($u_1 = u_1(x_1, x_3)$, $u_2 = 0$, $u_3 = u_3(x_1, x_3)$, $T = T(x_1, x_3)$). Математическая постановка задачи имеет вид [22]:

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0, \quad \sigma_{31,1} + \sigma_{33,3} = 0, \quad (1.1)$$

$$(kT_{,1})_{,1} + (kT_{,3})_{,3} = 0, \quad (1.2)$$

$$\sigma_{11} = (\lambda + 2\mu)u_{1,1} + \lambda u_{3,3} - \beta T, \quad (1.3)$$

$$\sigma_{33} = (\lambda + 2\mu)u_{3,3} + \lambda u_{1,1} - \beta T, \quad (1.4)$$

$$\sigma_{31} = \mu(u_{3,1} + u_{1,3}), \quad (1.5)$$

$$T(x_1, 0) = u_1(x_1, 0) = u_3(x_1, 0) = 0, \quad (1.6)$$

$$x_1 \in (-\infty, \infty),$$

$$q(x_1, h) = q_0 f(x_1), \quad x_1 \in [a, b], \quad (1.7)$$

$$q(x_1, h) = 0, \quad x_1 \notin [a, b], \quad (1.8)$$

$$\sigma_{13}(x_1, h) = \sigma_{33}(x_1, h) = 0, \quad (1.9)$$

$$x_1 \in (-\infty, \infty).$$

На границе покрытия и подложки вне области отслоения выполняются условия сопряжения по перемещениям, напряжениям, температуре и тепловому потоку:

$$u_1^-(x_1, h_1) = u_1^+(x_1, h_1),$$

$$u_3^-(x_1, h_1) = u_3^+(x_1, h_1),$$

$$\sigma_{33}^-(x_1, h_1) = \sigma_{33}^+(x_1, h_1),$$

$$\sigma_{13}^-(x_1, h_1) = \sigma_{13}^+(x_1, h_1),$$

$$T^-(x_1, h_1) = T^+(x_1, h_1),$$

$$q^-(x_1, h_1) = q^+(x_1, h_1),$$

$$|x_1| > c.$$

Здесь к обозначениям температуры, теплового потока, перемещений и напряжений, в области подложки и покрытия добавлены сверху знаки «-» и «+» соответственно.

На отслоении должны выполняться условия:

$$q(x_1, h_1) = \sigma_{13}(x_1, h_1) = \sigma_{33}(x_1, h_1) = 0, \quad (1.10)$$

$$|x_1| \leq c.$$

Обезразмерим задачу (1.1)–(1.10), введя безразмерные параметры и функции следующим образом:

$$\xi = \frac{x_1}{h}, \quad \eta = \frac{x_3}{h}, \quad U_i = \frac{u_i}{h}, \quad \Omega_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\mu_0},$$

$$i, j = 1, 3,$$

$$W = \frac{k_0 T}{q_0 h}, \quad Q = \frac{q}{q_0},$$

$$\bar{k}(\eta) = \frac{k(x_3)}{k_0}, \quad \bar{\lambda}(\eta) = \frac{\lambda(x_3)}{\mu_0},$$

$$\bar{\mu}(\eta) = \frac{\mu(x_3)}{\mu_0}, \quad \bar{\beta}(\eta) = \frac{\beta(x_3)}{\beta_0},$$

$$\delta_0 = \frac{q_0 h \gamma_0}{k_0 \mu_0}, \quad \bar{h}_1 = \frac{h_1}{h}, \quad \bar{h}_2 = \frac{h_2}{h},$$

$$\bar{a} = \frac{a}{h}, \quad \bar{b} = \frac{b}{h}, \quad \bar{c} = \frac{c}{h},$$

$$k_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} k(x_3), \quad \mu_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \mu(x_3),$$

$$\beta_0 = \max_{x_3 \in [0, h]} \beta(x_3).$$

После обезразмеривания задача (1.1)–(1.10) примет вид:

$$\Omega_{11,1} + \Omega_{13,3} = 0, \quad \Omega_{31,1} + \Omega_{33,3} = 0, \quad (1.11)$$

$$(\bar{k}W_{,1})_{,1} + (\bar{k}W_{,3})_{,3} = 0, \quad (1.12)$$

$$\Omega_{11} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})U_{1,1} + \bar{\lambda}U_{3,3} - \delta_0 \bar{\beta}W, \quad (1.13)$$

$$\Omega_{33} = (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu})U_{3,3} + \bar{\lambda}U_{1,1} - \delta_0 \bar{\beta}W, \quad (1.14)$$

$$\Omega_{31} = \bar{\mu}(U_{3,1} + U_{1,3}), \quad (1.15)$$

$$W(\xi, 0) = U_1(\xi, 0) = U_3(\xi, 0) = 0, \quad (1.16)$$

$$\xi \in (-\infty, \infty),$$

$$Q(\xi, 1) = f(\xi), \quad \xi \in [\bar{a}, \bar{b}], \quad (1.17)$$

$$Q(\xi, 1) = 0, \quad \xi \notin [\bar{a}, \bar{b}] \quad (1.18)$$

$$\Omega_{13}(\xi, 1) = \Omega_{33}(\xi, 1) = 0, \quad (1.19)$$

$$\xi \in (-\infty, \infty).$$

Условия непрерывности перемещений, напряжений, температуры и теплового потока вне области отслоения в безразмерном виде:

$$U_1^-(\xi, \bar{h}_1) = U_1^+(\xi, \bar{h}_1),$$

$$U_3^-(\xi, \bar{h}_1) = U_3^+(\xi, \bar{h}_1),$$

$$\Omega_{33}^-(\xi, \bar{h}_1) = \Omega_{33}^+(\xi, \bar{h}_1),$$

$$\begin{aligned}\Omega_{13}^-(\xi, \bar{h}_1) &= \Omega_{13}^+(\xi, \bar{h}_1), \\ W^-(\xi, \bar{h}_1) &= W^+(\xi, \bar{h}_1), \\ Q^-(\xi, \bar{h}_1) &= Q^+(\xi, \bar{h}_1), \\ |\xi| &> \bar{c}.\end{aligned}$$

Условия на отслоении в безразмерном виде:

$$Q(\xi, \bar{h}_1) = \Omega_{13}(\xi, \bar{h}_1) = \Omega_{33}(\xi, \bar{h}_1) = 0, \quad (1.20)$$

$$|\xi| \leq \bar{c}.$$

Для решения задачи несвязанной термоупругости (1.11)–(1.20) необходимо сначала найти распределение температуры.

2. Решение задачи теплопроводности

Уравнение теплопроводности в безразмерном виде для полосы имеет вид (1.12). Сформулируем граничные условия для краевых задач в областях I ($\eta \in [0, \bar{h}_1]$) и II ($\eta \in [\bar{h}_1, 1]$). Область I:

$$W^-(\xi, 0) = 0, \quad Q^-(\xi, \bar{h}_1) = Q^*. \quad (2.1)$$

Область II:

$$Q^+(\xi, \bar{h}_1) = Q^*, \quad Q^+(\xi, 1) = f(\xi), \quad (2.2)$$

где Q^* — тепловой поток на границе раздела покрытия и подложки. Отметим, что в области отслоения ($|\xi| \leq \bar{c}$) $Q^* = 0$.

Применив к безразмерным задачам (1.12), (2.1) и (1.12), (2.2) преобразование Фурье по координате ξ , получим каноническую систему обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно трансформант температуры и теплового потока

$$\begin{aligned}X_1' &= -\frac{1}{k}X_2(\alpha, \eta), \\ X_2' &= \alpha^2 k X_1(\alpha, \eta),\end{aligned} \quad (2.3)$$

где введены следующие обозначения: α — параметр преобразования Фурье, $X_1 = \tilde{W}$, $X_2 = \tilde{Q}$.

Граничные условия (2.1), (2.2) в трансформантах Фурье будут иметь вид

$$X_1^-(\alpha, 0) = 0, \quad X_2^-(\alpha, \bar{h}_1) = \tilde{Q}^*. \quad (2.4)$$

$$X_2^+(\alpha, 1) = \tilde{f}(\alpha), \quad X_2^+(\alpha, \bar{h}_1) = \tilde{Q}^*. \quad (2.5)$$

Задачи (2.3), (2.4) и (2.3), (2.5) решим с помощью метода пристрелки.

Для области I сформулируем вспомогательную задачу Коши с начальными условиями $X_1^I(\alpha, 0) = 0$, $X_2^I(\alpha, 0) = 1$. Решение задачи в области I представим как $X^-(\alpha, \eta) = s_1 X^I(\alpha, \eta)$. Неизвестный коэффициент s_1 найдем из условия (2.4)

$$s_1 = \frac{\tilde{Q}^*}{X_2^I(\alpha, \bar{h}_1)}.$$

Для области II сформулируем две вспомогательные задачи Коши с начальными условиями: 1) $X_1^{II}(\alpha, 1) = 0$, $X_2^{II}(\alpha, 1) = 1$ и 2) $X_1^{III}(\alpha, 1) = 1$, $X_2^{III}(\alpha, 1) = 0$. Решение задачи в области II будем искать в виде: $X^+(\alpha, \eta) = \tilde{f}(\alpha)X^{II}(\alpha, \eta) + s_2 X^{III}(\alpha, \eta)$. Удовлетворив начальным условиям (2.5), найдём коэффициент

$$s_2 = \frac{\tilde{Q}^* - \tilde{f}(\alpha)X_2^{II}(\alpha, \bar{h}_1)}{X_2^{III}(\alpha, \bar{h}_1)}.$$

Введём в рассмотрение функцию γ , характеризующую скачок температуры в области отслоения и определяемую выражением $\gamma(\xi) = W^+(\xi, \bar{h}_1) - W^-(\xi, \bar{h}_1)$. Выразив трансформанту теплового потока на берегах отслоения через трансформанты функции скачка температуры $\tilde{\gamma}(\alpha)$ и нагрузки $\tilde{f}(\alpha)$, получим

$$\tilde{Q}^* = K_0(\alpha)\tilde{f}(\alpha) + K_1(\alpha)\tilde{\gamma}(\alpha), \quad (2.6)$$

где

$$K_0(\alpha) = X_2^I \frac{X_2^{II} X_1^{III} - X_1^{II} X_2^{III}}{X_2^I X_1^{III} - X_1^I X_2^{III}},$$

$$K_1(\alpha) = \frac{X_2^{III} X_2^I}{X_1^{III} X_2^I - X_1^I X_2^{III}}$$

— передаточные функции.

Далее найдём обратное преобразование Фурье в (2.6) и потребуем равенства нулю теплового потока на берегах отслоения. Учитывая представление для трансформант функции скачка температуры и меняя порядок интегрирования в двойном интеграле, получим гиперсингулярное интегральное уравнение с разностным ядром относительно функ-

ции скачка температуры $\gamma(\xi)$

$$\int_{-\bar{c}}^{\bar{c}} R_1(\varsigma - \xi) \gamma(\varsigma) d\varsigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_0(\alpha) \tilde{f}(\alpha) e^{-i\alpha\xi} d\alpha, \quad (2.7)$$

где ядра R_j определяются формулами

$$R_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_j(\alpha) e^{i\alpha\tau} d\alpha, \quad \tau = \varsigma - \xi.$$

3. Решение задачи термоупругости

После нахождения трансформанты температуры в покрытии и подложке и распределения скачка температуры на берегах трещины решается задача термоупругости.

Уравнения равновесия и определяющие соотношения для полосы в безразмерном виде имеют вид (1.11), (1.13)–(1.15).

По аналогии с задачей теплопроводности сформулируем граничные условия для краевых задач в областях I и II:

$$U_1^-(\xi, 0) = U_3^-(\xi, 0) = 0,$$

$$\Omega_{13}^-(\xi, \bar{h}_1) = \Omega_{13}^*, \quad \Omega_{33}^-(\xi, \bar{h}_1) = \Omega_{33}^*. \quad (3.1)$$

$$\Omega_{13}^+(\xi, \bar{h}_1) = \Omega_{13}^*, \quad \Omega_{33}^+(\xi, \bar{h}_1) = \Omega_{33}^*,$$

$$\Omega_{13}^+(\xi, 1) = 0, \quad \Omega_{33}^+(\xi, 1) = 0. \quad (3.2)$$

Здесь Ω_{13}^* , Ω_{33}^* — напряжения на границе раздела покрытия и подложки. Отметим, что в области отслоения ($|\xi| \leq \bar{c}$) $\Omega_{33}^* = \Omega_{13}^* = 0$.

Применив к безразмерным уравнениям (1.11), (1.13)–(1.15) преобразование Фурье по координате ξ , после некоторых преобразований получим каноническую систему четырех дифференциальных уравнений 1-го порядка относительно трансформант перемещений и напряжений

$$Y_1' = \frac{1}{\bar{\mu}} Y_3 - \alpha Y_2, \quad (3.3)$$

$$Y_2' = \frac{1}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \left(Y_4 + \alpha \bar{\lambda} Y_1 + \delta_0 \bar{\beta} \tilde{W} \right), \quad (3.4)$$

$$Y_3' = \frac{1}{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}} \left(4\bar{\mu} \alpha^2 Y_1 - \alpha \bar{\lambda} Y_4 + 2\alpha \delta_0 \bar{\beta} \tilde{W} \right), \quad (3.5)$$

$$Y_4' = \alpha Y_3. \quad (3.6)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$Y_1 = i\tilde{U}_1, \quad Y_2 = \tilde{U}_3, \quad Y_3 = i\tilde{\Omega}_{13}, \quad Y_4 = \tilde{\Omega}_{33}.$$

Граничные условия (3.1), (3.2) в трансформантах Фурье будут иметь вид

$$Y_1^-(\alpha, 0) = 0, \quad Y_2^-(\alpha, 0) = 0,$$

$$Y_3^-(\alpha, \bar{h}_1) = i\tilde{\Omega}_{13}^*, \quad Y_4^-(\alpha, \bar{h}_1) = \tilde{\Omega}_{33}^*. \quad (3.7)$$

$$Y_3^+(\alpha, \bar{h}_1) = i\tilde{\Omega}_{13}^*, \quad Y_4^+(\alpha, \bar{h}_1) = \tilde{\Omega}_{33}^*,$$

$$Y_4^+(\alpha, 1) = 0, \quad Y_4^+(\alpha, 1) = 0. \quad (3.8)$$

Как и в случае задачи теплопроводности, краевые задачи в областях I и II для системы дифференциальных уравнений (3.3)–(3.6) решим с помощью метода пристрелки.

Для области I сформулируем две вспомогательные однородные задачи Коши (3.3)–(3.6) со следующими начальными условиями: 1) $Y_1^I(\alpha, 0) = 0$, $Y_2^I(\alpha, 0) = 0$, $Y_3^I(\alpha, 0) = 1$, $Y_4^I(\alpha, 0) = 0$; 2) $Y_1^{II}(\alpha, 0) = 0$, $Y_2^{II}(\alpha, 0) = 0$, $Y_3^{II}(\alpha, 0) = 0$, $Y_4^{II}(\alpha, 0) = 1$.

Решение в области I представим в виде суммы частного решения $Y^0(\alpha, \eta)$ неоднородной задачи Коши (3.3)–(3.6) с нулевыми начальными условиями на нижней границе $Y^0(\alpha, 0) = (0, 0, 0, 0)$ и линейной комбинации решений $Y^I(\alpha, \eta)$ и $Y^{II}(\alpha, \eta)$ однородной задачи Коши

$$Y^- = Y^0 + p_1 Y^I + p_2 Y^{II}. \quad (3.9)$$

Коэффициенты p_1 , p_2 находят из условий (3.7).

Аналогичным образом сформулируем две вспомогательные однородные задачи Коши для области II: 1) $Y_1^{III}(\alpha, 1) = 1$, $Y_2^{III}(\alpha, 1) = 0$, $Y_3^{III}(\alpha, 0) = 0$, $Y_4^{III}(\alpha, 0) = 0$; 2) $Y_1^{IV}(\alpha, 1) = 0$, $Y_2^{IV}(\alpha, 1) = 1$, $Y_3^{IV}(\alpha, 0) = 0$, $Y_4^{IV}(\alpha, 0) = 0$. Решение задачи в области II будем искать в виде

$$Y^+ = Y^0 + p_3 Y^{III} + p_4 Y^{IV}. \quad (3.10)$$

Удовлетворив условиям (3.8), найдём параметры p_3 , p_4 .

Введём в рассмотрение функции раскрытия χ_1 и χ_3 , характеризующие скачок перемещений в области отслоения и определяемые выражениями $\chi_j = U_j^+(\xi, \bar{h}_1) - U_j^-(\xi, \bar{h}_1)$,

$j = 1, 3$. Выразив трансформанты напряжений на берегах отслоения через трансформанты скачков перемещений и компонент частного решения неоднородной задачи Коши, получим

$$\tilde{\Omega}_{13}^* = M_{10}Y_3^0(\alpha, \bar{h}_1) + M_{11}\tilde{\chi}_1 + M_{13}\tilde{\chi}_3, \quad (3.11)$$

$$\tilde{\Omega}_{33}^* = M_{30}Y_4^0(\alpha, \bar{h}_1) + M_{31}\tilde{\chi}_1 + M_{33}\tilde{\chi}_3. \quad (3.12)$$

Найдём обратное преобразование Фурье для напряжений $\tilde{\Omega}_{13}^*$, $\tilde{\Omega}_{33}^*$ и потребуем равенства их нулю на берегах отслоения. Учитывая представление для трансформант функций раскрытия и меняя порядок интегрирования, получим следующую систему гиперсингулярных интегральных уравнений с разностными ядрами относительно скачков перемещений χ_1 и χ_3 :

$$\int_{-\bar{c}}^{\bar{c}} m_{11}(\varsigma - \xi)\chi_1(\varsigma)d\varsigma + \int_{-\bar{c}}^{\bar{c}} m_{13}(\varsigma - \xi)\chi_3(\varsigma)d\varsigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m_{10}(\alpha)Y_3^0(\alpha, \bar{h}_1)e^{-i\alpha\xi}d\alpha, \quad (3.13)$$

$$\int_{-\bar{c}}^{\bar{c}} m_{31}(\varsigma - \xi)\chi_1(\varsigma)d\varsigma + \int_{-\bar{c}}^{\bar{c}} m_{33}(\varsigma - \xi)\chi_3(\varsigma)d\varsigma = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m_{30}(\alpha)Y_4^0(\alpha, \bar{h}_1)e^{-i\alpha\xi}d\alpha, \quad (3.14)$$

где ядра m_{rj} определяются по формулам

$$m_{rj}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} M_{rj}(\alpha)e^{i\alpha\tau}d\alpha.$$

4. Результаты вычислительных экспериментов

В этом параграфе представлены результаты вычислительных экспериментов по нахождению распределения функций раскрытия на берегах трещины. Система «функционально-градиентное покрытие – подложка» находится под действием локализованной на отрезке $[\bar{a}, \bar{b}]$ тепловой нагрузки, определяемой формулой,

$$f(\xi) = A \left(\frac{1}{4} (\bar{a} - \bar{b})^2 - \left(\xi + \frac{\bar{a} + \bar{b}}{2} \right)^2 \right). \quad (4.1)$$

Здесь A – амплитуда теплового потока.

Рассмотрим случай непрерывного изменения материальных характеристик через границу раздела «покрытие–подложка». Обозначим через P_M, P_c – материальные свойства металлической и керамической составляющих композиционного материала покрытия соответственно. Тогда согласно [5] для нахождения термомеханических характеристик системы «покрытие–подложка», например, коэффициента теплопроводности, в безразмерном виде будем иметь выражение

$$\bar{k}(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{при } \eta \in [0, \bar{h}_1]; \\ 1 + \left(\frac{P_c}{P_M} - 1 \right) \left(\frac{\eta}{\bar{h}_2} - \frac{\bar{h}_1}{\bar{h}_2} \right), & \\ \text{при } \eta \in [\bar{h}_1, 1]. \end{cases} \quad (4.2)$$

В расчетах полагаем, что металлическая подложка изготовлена из Ni , а функционально-градиентное покрытие получено на основе композиции Ni/TiC . Пусть $\bar{h}_1 = 0,9, \bar{h}_2 = 0,1$. В этом случае формула (4.2) имеет вид

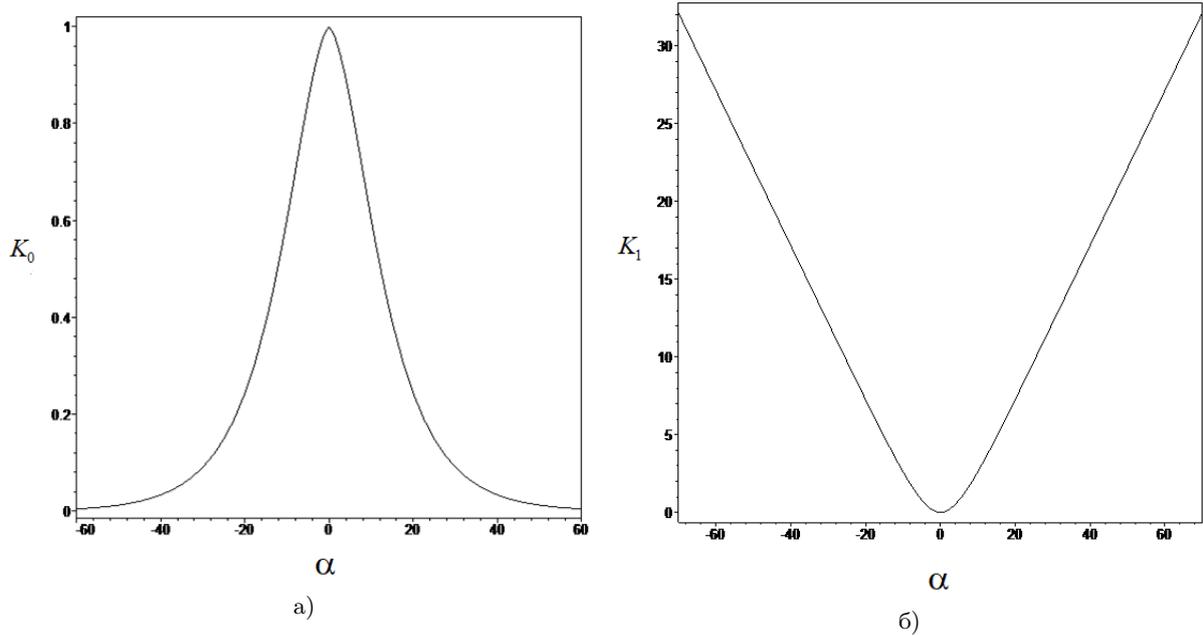
$$\bar{k}(\eta) = \begin{cases} 1, & \text{при } \eta \in [0, 0,9]; \\ 1 - 0,72(10\eta - 9), & \\ \text{при } \eta \in [0,9, 1]. \end{cases} \quad (4.3)$$

На первом этапе рассмотрим построение функции скачка температуры $\gamma(\xi)$ для закона неоднородности (4.3) путем численного решения уравнения (2.7). Способ решения уравнения (2.7) во многом зависит от характера поведения передаточных функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$. На рис. 1 показаны графики передаточных функций $K_0(\alpha)$ (рис. 1а) и $K_1(\alpha)$ (рис. 1б).

Из анализа рис. 1 следует, что функция $K_0(\alpha)$ ограничена на бесконечности, а функция $K_1(\alpha)$ является неограниченной ($K_1 \sim C_1|\alpha|$).

Интегральное уравнение (2.7) решаем численно с помощью метода коллокаций, аналогично схеме, описанной в [27]. Для этого разобьём отрезок интегрирования $[-\bar{c}, \bar{c}]$ на N отрезков $\Delta_n = [\omega_n, \omega_{n+1}]$, считая на каждом Δ_n функцию $\gamma(\xi)$ постоянной величиной. Потребуем выполнения уравнения (2.7) в точках ξ_n , причём, $\xi_n = (\omega_n + \omega_{n+1})/2$. Получим систему N линейных алгебраических уравнений относительно постоянных $\gamma_m, m = 1, \dots, N$:

$$\sum_{m=1}^N \gamma_m d_{mn} = b_n, \quad n = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

Рис. 1. Графики передаточных функций: $K_0(\alpha)$ (а), $K_1(\alpha)$ (б)

Здесь коэффициенты d_{mn} и b_n определяются выражениями

$$d_{mn} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1(\alpha)}{i\alpha} Z(\alpha, \omega_m, \omega_{m+1}, \xi_n) d\alpha,$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(\alpha) Q_0(\alpha) e^{-i\alpha\xi_n} d\alpha,$$

где

$$Z(\alpha, \omega_m, \omega_{m+1}, \xi_n) = e^{i\alpha(\omega_{m+1}-\xi_n)} - e^{i\alpha(\omega_m-\xi_n)}.$$

Т.к. передаточная функция $K_1(\alpha)$ не ограничена на бесконечности, то интегралы d_{mn} , вообще говоря, расходятся. Для решения этой проблемы в интегралах d_{mn} выделим растущую часть $C_1|\alpha|$ и вычислим отдельно. Введём функцию $K_1^*(\alpha) = K_1(\alpha) - C_1|\alpha|$, ограниченную на бесконечности, и представим коэффициенты d_{mn} в виде $d_{mn} = C_1 J_{mn} + d_{mn}^*$. Далее вычисляем интегралы от ограниченных функций

$$d_{mn}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K_1^*(\alpha)}{i\alpha} Z(\alpha, \omega_m, \omega_{m+1}, \xi_n) d\alpha,$$

где

$$J_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn} \alpha Z(\alpha, \omega_m, \omega_{m+1}, \xi_n) d\alpha.$$

путём прямого численного интегрирования с помощью квадратурных формул Гаусса для 8 узлов. Решение интегрального уравнения (2.7) позволяет найти узловые значения функции скачка температуры на отслоении.

Проведено исследование точности полученного решения на основе выполнения условия $\gamma(\pm\bar{c}) = 0$ в зависимости от выбора N в методе коллокаций. Примем $A = 0,5$, $\bar{a} = -2$, $\bar{b} = 2$, $\bar{c} = 1$. При $N = 60$ наблюдается практически полное выполнение условия $\gamma(\pm\bar{c}) = 0$, однако при этом требуются большие затраты машинного времени. Вне окрестностей точек $\xi = \pm\bar{c}$ значение функции $\gamma(\xi)$, вычисленные при $N = 30$ и $N = 60$ соответственно, отличаются не более, чем на 1 %, что позволило при расчетах ограничиться $N = 30$.

Расчеты показали, что в случае нагрузки, расположенной симметрично относительно центра отслоения, функция скачка температура тоже является симметричной. Максимальное изменение температуры достигается в середине трещины. По мере приближения к вершинам трещины прирост температуры уменьшается, обращаясь в нуль на концах.

Исследовано влияние на величину скачка температуры амплитуды теплового потока A , относительной толщины покрытия \bar{h}_2 , локализации нагрузки на отрезке $[\bar{a}, \bar{b}]$. Скачок температуры увеличивается при уменьшении

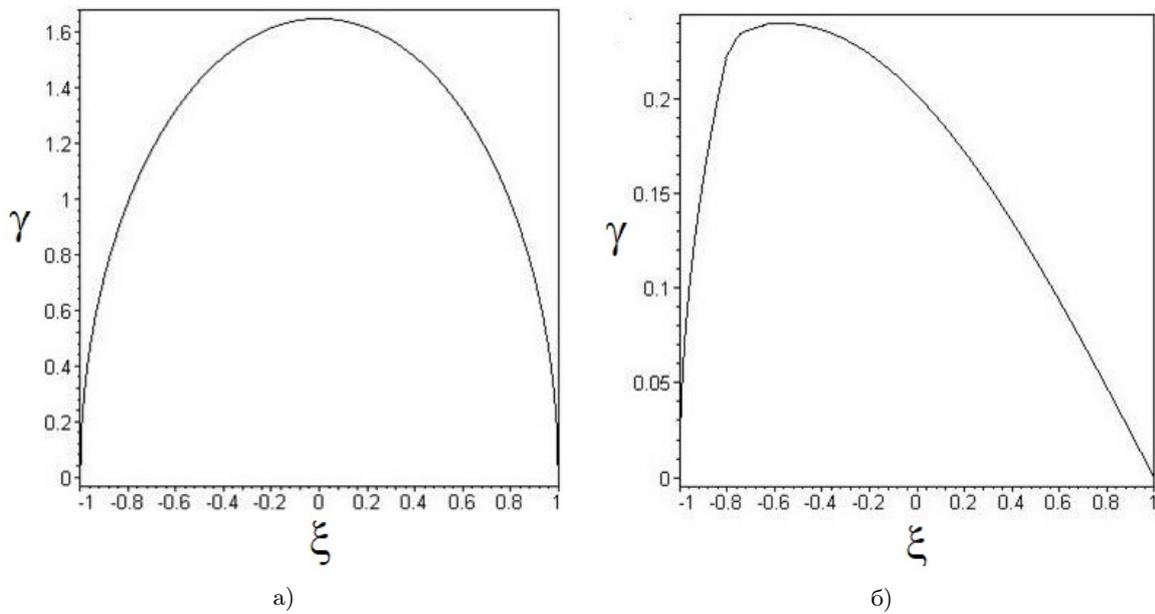


Рис. 2. Распределение функции $\gamma(\xi)$: а) симметричная нагрузка; б) несимметричная нагрузка

толщины покрытия и увеличении амплитуды тепловой нагрузки. Вид функции $\gamma(\xi)$ зависит от области приложения внешней нагрузки. На рис. 2 представлен график распределения функции $\gamma(\xi)$ как при симметричном относительно отслоения нагружении на отрезке $[-2, 2]$ (рис. 2а), так и при несимметричном нагружении на отрезке $[-4, -2]$ (рис. 2б).

Из анализа рис. 2 следует, что по мере удаления источника тепла от трещины величина скачка температуры значительно уменьшается.

На втором этапе рассмотрим построение функций χ_1 и χ_3 путем численного решения системы уравнений (3.13), (3.14) при $\delta_0 = 0,05$. Исследовано поведение передаточных функций при $|\alpha| \rightarrow \infty$. Выяснено, что передаточные функции M_{10} , M_{30} убывают на бесконечности, а остальные передаточные функции, входящие в уравнения (3.13), (3.14), являются неограниченными.

Систему интегральных уравнений (3.13), (3.14) решаем численно с помощью метода коллокаций на основе подхода, изложенного в [27], с учетом особенностей поведения передаточных функций. Решение системы интегральных уравнений (3.13), (3.14) позволяет найти узловые значения функций раскрытия, которые должны удовлетворять условиям: $\chi_1(\pm\bar{c}) = 0$, $\chi_3(\pm\bar{c}) = 0$. Проверка точности решения позволила в расчетах ограничиться $N = 30$.

На рис. 3 представлены графики распределения функций раскрытия: $\chi_1(\xi)$ (рис. 3а) и $\chi_3(\xi)$ (рис. 3б) вдоль берегов трещины при симметричной нагрузке, локализованной на отрезке $[-2, 2]$.

Из анализа рис. 3 следует, что в случае нагрузки, расположенной симметрично относительно центра отслоения, функция раскрытия тоже обладают симметрией. Максимальное изменение перемещения u_3 достигается в середине трещины. По мере приближения к вершинам трещины прирост перемещения уменьшается, обращаясь в нуль на концах.

Заключение

Рассмотрена задача нахождения скачка температуры и функций раскрытия трещины, находящейся на границе раздела функционально-градиентного покрытия с однородной подложкой. Система «покрытие-подложка» моделируется неоднородной полосою, на верхней грани которой на конечном отрезке локализована тепловая нагрузка. Получено гиперсингулярное интегральное уравнение относительно функции скачка температуры на отслоении. Выяснено, что величина температурного скачка пропорциональна амплитуде теплового потока. Скачок температуры увеличивается при уменьшении толщины покрытия. Сформулирована система гиперсингулярных интегральных уравнений относительно функций раскрытия. Построенные

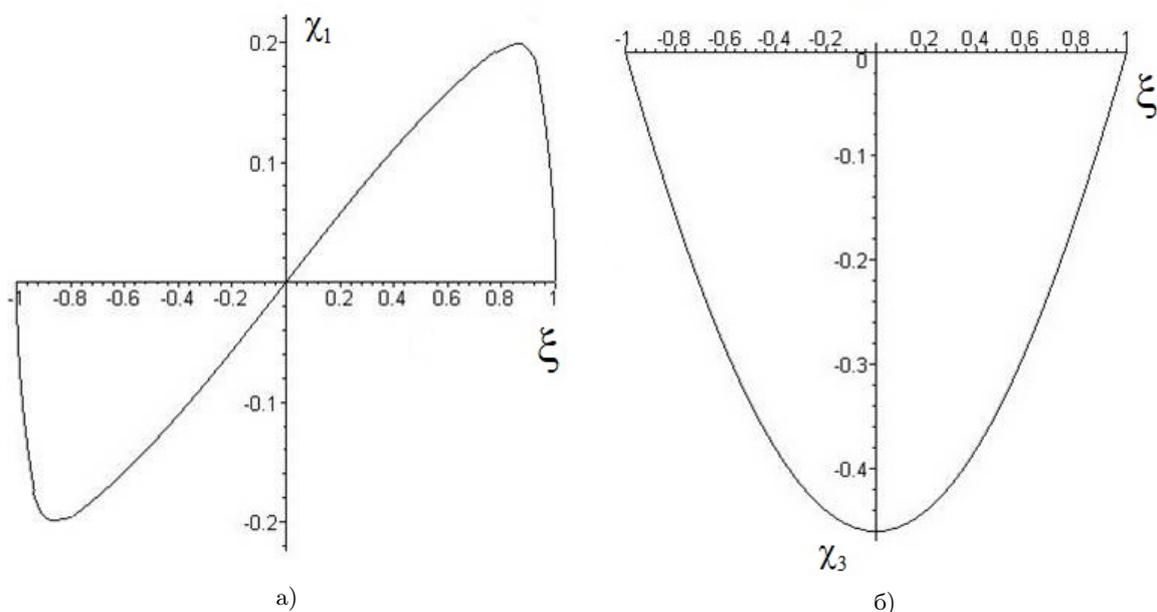


Рис. 3. Распределение функций раскрытия: $\chi_1(\xi)$ (а) и $\chi_3(\xi)$ (б) при симметричной нагрузке

функции скачка температуры и функции раскрытия могут быть использованы для нахождения температуры и перемещений верхней границы покрытия и дальнейшего исследования задач о диагностике отслоений.

Литература

1. *Padture N.R., Gell M., Jordan E.H.* Thermal barrier coatings for gas-turbine engine applications // *Science*. 2002. Vol. 296. P. 280–284.
2. *Bialas M.* Finite Element Analysis of stress distribution in thermal barrier coatings // *J. Surf. Coat. Tech.* 2008. Vol. 202. P. 6002–6010.
3. *Lee W.Y., Stinton D.P., Bernardt C.C., Erdogan F., Lee Y.D., Mutasin Z.* Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications // *J. Amer. Ceram. Soc.* 1996. Vol. 19. Iss. 3. P. 3003–3012.
4. *Lee Y.-D., Erdogan F.* Residual/thermal stresses in FGM and laminated thermal barrier coatings // *Int J Fract.* 1995. Vol. 69. P. 145–165.
5. *Raddy J.N., Chin C.D.* Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders and plates // *J. Thermal Stresses*. 1998. Vol. 21. P. 593–626.
6. *England A.H.* A crack between dissimilar media // *J. Appl. Mech.* 1965. Vol. 32. P. 400–402.
7. *Comninou M.* The interface crack // *J. Appl. Mech.* 1977. Vol. 44. P. 631–636.
8. *Suo Z., Hutchinson J.W.* Interface Crack Between Two Elastic Layers // *Int. J. Fracture*. 1990. Vol. 43. P. 1–18.
9. *Noda N., Jin Z.H.* Steady thermal stress in an infinite nonhomogeneous elastic solid containing a crack // *J. Therm. Stress*. 1993. Vol. 16. P. 181–196.
10. *Lee K.Y., Park S.J.* Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow // *Eng. Fract. Mech.* 1995. Vol. 50. P. 475–482.
11. *Erdogan F., Wu B.H.* Crack problems in FGM layers under thermal stresses // *J. Thermal. Stress*. 1996. Vol. 19. P. 237–265.
12. *Bao G., Cai H.* Delamination cracking in functionally graded coating/metal substrate systems // *Acta Mater.* 1997. Vol. 45. P. 1055–1066.
13. *Choi S.R., Hutchinson J.W., Evans A.G.* Delamination of multilayer thermal barrier coatings // *Mechanics of materials*. 1999. Vol. 31. P. 431–447.
14. *Гольдштейн Р.В., Осипенко Н.М.* Отслоение покрытий под действием температурных напряжений (балочное приближение) // *Вестник СамГУ. Естественно-научная серия*. 2007. № 4. С. 66–83.
15. *Ватульян А.О., Морозов К.Л.* Об отслоении покрытия, лежащего на упругом основании // *ПМТФ*. 2020. № 1. С. 133–143.
16. *Ватульян А.О., Морозов К.Л.* Об исследовании отслоения от упругого основания на основе модели с двумя коэффициентами постели // *Известия РАН. МТТ*. 2020. № 2. С. 64–76.
17. *EI-Borgi S., Erdogan F., Hatira F.B.* Stresses intensity factors for an interface crack between a functionally graded coating and a homogeneous substrate // *Int. J. Fract.* 2003. Vol. 123. P. 139–162.
18. *Veljkovic J.M., Nikolic R.R.* Application of the

- interface crack concept to the problem of a crack between a thin layer and a substrate // *Facta Universitates*. 2003. Vol. 3. P. 573–581.
19. Petrova V., Herrmann K. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects // *International Journal of Fracture*. 2004. Vol. 128. P. 49–63.
 20. Chen J. Determination of thermal stress intensity factors for an interface crack in a graded orthotropic coating-substrate structure // *Int. J. Fract.* 2005. Vol. 133. P. 303–328.
 21. Djokovic J.M., Nikolic R.R., Tadic S.S. Influence of temperature on behavior of the interfacial crack between the two layers // *Thermal Science*. 2010. Vol. 14. P. 259–268.
 22. Sheng-Hu Ding, Xing Li. Thermal stress intensity factors for an interface crack in a functionally graded layered structures // *Arch. Appl. Mech.* 2011. Vol. 81. P. 943–955.
 23. Ding S.H., Zhou Y.T., Xing L. Interface crack problem in layered orthotropic materials under thermo-mechanical loading // *Int. J. Solids Struc.* 2014. Vol. 51. P. 25–26.
 24. Lee G.H., Beom H.G. Interfacial edge crack between dissimilar orthotropic thermoelastic materials under uniform heat flow // *J. Mech. Sci. Technol.* 2014. Vol. 28(8). P. 3041–3050.
 25. Wang Xu., Zhou K., Wu M.S. Interface cracks with surface elasticity in anisotropic biomaterials // *Int. J. Solids. Struc.* 2015. Vol. 59. P. 110–120.
 26. Wang J., Ming D., Cun-Fa G. The effect of interfacial thermal resistance on interface crack subjected to remote heat flux // *Z. Angew. Math. Phys.* 2020. Vol. 71(12). P. 1–21.
 27. Ватульян А.О., Плотников Д.К. Моделирование отслоений в слоистых структурах // Актуальные проблемы механики сплошных сред: Труды XV Междунар. конф. Ереван: Изд-во Института механики НАН РА, 2019. С. 94–98.
- References**
1. Padture, N.R., Gell, M., Jordan, E.H. Thermal barrier coatings for gas-turbine engine applications. *Science*, 2002, vol. 296, pp. 280–284.
 2. Bialas, M. Finite Element Analysis of stress distribution in thermal barrier coatings. *J. Surf. Coat. Tech.*, 2008, vol. 202, pp. 6002–6010.
 3. Lee, W.Y., Stinton, D.P., Bernardt, C.C., Erdogan, F., Lee, Y.D., Mutasin, Z. Concept of functionally graded materials for advanced thermal barrier coatings applications. *J. Amer. Ceram. Soc.*, 1996, vol. 19, iss. 3, pp. 3003–3012.
 4. Lee, Y-D., Erdogan, F. Residual/thermal stresses in FGM and laminated thermal barrier coatings. *Int J Fract*, 1995, vol. 69, pp. 145–165.
 5. Raddy, J.N., Chin, C.D. Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders and plates. *J. Thermal Stresses*, 1998, vol. 21, pp. 593–626.
 6. England, A.H. A crack between dissimilar media. *J. Appl. Mech.*, 1965, vol. 32, pp. 400–402.
 7. Comninou, M. The interface crack. *J. Appl. Mech.*, 1977, vol. 44, pp. 631–636.
 8. Suo, Z., Hutchinson, J.W. Interface Crack Between Two Elastic Layers. *Int. J. Fracture*, 1990, vol. 43, pp. 1–18.
 9. Noda, N., Jin, Z.H. Steady thermal stress in an infinite nonhomogeneous elastic solid containing a crack. *J. Therm. Stress*, 1993, vol. 16, pp. 181–196.
 10. Lee, K.Y., Park, S.J. Thermal stress intensity factors for partially insulated interface crack under uniform heat flow. *Eng. Fract. Mech.*, 1995, vol. 50, pp. 475–482.
 11. Erdogan, F, Wu, B.H. Crack problems in FGM layers under thermal stresses. *J Thermal Stress*. 1996, vol. 19, pp. 237–265.
 12. Bao, G., Cai, H. Delamination cracking in functionally graded coating/metal substrate systems. *Acta Mater.*, 1997, vol. 45, pp. 1055–1066.
 13. Choi, S.R., Hutchinson, J.W., Evans, A.G. Delamination of multilayer thermal barrier coatings. *Mechanics of materials*, 1999, vol. 31, pp. 431–447.
 14. Gol'dshtejn, R.V., Osipenko, N.M. Otsloenie pokrytij pod dejstviem temperaturnyh naprazhenij (balochnoe priblizhenie) [Detachment of coatings under the influence of temperature stresses (beam approximation)]. *Vestnik SamGU. Estestvenno-nauchnaja serija* [Bulletin of Samara State University. Natural Science Series], 2007, no. 4, pp. 66–83. (In Russian)
 15. Vatul'yan, A.O., Morozov, K.L. Ob otsloenii pokrytiya, lezhashchego na uprugom osnovanii [Delamination of a Coating Lying on an Elastic Base]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika* [Applied Mechanics and Technical Physics], 2020, no. 1, pp. 133–143. (In Russian)
 16. Vatul'yan, A.O., Morozov, K.L. Ob issledovanii otsloeniya ot uprugogo osnovaniya na osnove modeli s dvumya koeffitsiyentami posteli [On the study of separation from an elastic base based on a model with two coefficients]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics], 2020, no. 2, pp. 64–76. (In Russian)
 17. EI-Borgi, S., Erdogan, F., Hatira, F.B. Stresses intensity factors for an interface crack between a functionally graded coating and a homogeneous substrate. *Int. J. Fract.* 2003, vol. 123, pp. 139–162.
 18. Veljkovic, J.M., Nikolic, R.R. Application of the interface crack concept to the problem of a crack between a thin layer and a substrate. *Facta Universitates*, 2003, vol. 3, pp. 573–581.
 19. Petrova, V., Herrmann, K. Thermal crack problems for a bimaterial with an interface crack and internal defects. *Int. J. Fract.*, 2004, vol. 128,

- pp. 49–63.
20. Chen, J. Determination of thermal stress intensity factors for an interface crack in a graded orthotropic coating-substrate structure. *Int. J. Fract.*, 2005, vol. 133, pp. 303–328.
 21. Djokovic, J.M., Nikolic, R.R., Tadic, S.S. Influence of temperature on behavior of the interfacial crack between the two layers. *Thermal Science*, 2010, vol. 14, pp. 259–268.
 22. Sheng-Hu, Ding, Xing, Li. Thermal stress intensity factors for an interface crack in a functionally graded layered structures. *Arch Appl Mech.*, 2011, vol. 81, pp. 943–955.
 23. Ding, S.H., Zhou, Y.T., Xing, L. Interface crack problem in layered orthotropic materials under thermo-mechanical loading. *Int J Solids Struct.*, 2014, vol. 51, pp. 25–26.
 24. Lee, G.H., Beom, H.G. Interfacial edge crack between dissimilar orthotropic thermoelastic materials under uniform heat flow. *J. Mech. Sci. Technol.*, 2014, vol. 28(8), pp. 3041–3050.
 25. Wang, Xu., Zhou, K., Wu, M.S. Interface cracks with surface elasticity in anisotropic biomaterials. *Int J Solids Struct.*, 2015, vol. 59, pp. 110–120.
 26. Wang, J., Ming, D., Cun-Fa, G. The effect of interfacial thermal resistance on interface crack subjected to remote heat flux. *Z. Angew. Math. Phys.*, 2020, vol. 71(12), pp. 1–21.
 27. Vatulyan, A.O., Plotnikov, D.K. Modelirovaniye otsloenyiy v sloistykh strukturakh [Modeling of delaminations in layered structures]. *Aktual'nyye problemy mekhaniki sploshnykh sred: Trudy XV Mezhdunar. konf.* [Actual problems of continuum mechanics: Proceedings of the XV Intern. conf.]. Yerevan, Publishing House of the Institute of Mechanics of NAS RA, 2019, pp. 94–98. (In Russian)