УДК 534.516

О ДВУСТОРОННИХ ВАРИАЦИОННЫХ ОЦЕНКАХ ПРИСОЕДИНЕННЫХ МАСС И МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ[1]

В. И. Юдович[2]

TWO-SIDED VARIATIONAL ESTIMATES OF VIRTUAL MASSES AND MOMENTS OF INERTIA

Yudovich V. I.

We present upper and lower estimates for the Dirichlet integral of the solution of the mixed Dirichlet-Neumann boundary value problem. These two-sided estimates make it possible to construct efficient methods for calculating virtual masses and moments of inertia in the hydrodynamic impact problem.

Введение

В работе даны оценки сверху и снизу (обобщенного) интеграла Дирихле для решения смешанной задачи Дирихле–Неймана для уравнения эллиптического типа $\operatorname{div} \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} \varphi = 0$, возникающего в теории удара твердого тела о неоднородную несжимаемую жидкость [1, 2]. В частности, эти двусторонние оценки представляют собой основу весьма эффективных численных методов вычисления присоединенных масс и моментов инерции. Жидкость предполагается идеальной, однако это не является ограничением, поскольку в задаче удара вязкость не влияет на ведущее асимптотическое приближение скорости течения [3]. Область течения здесь предполагается ограниченной, но результаты непринужденно распространяются и на многие задачи для неограниченных областей.

В п. 1 дана постановка задачи и выведены две оценки интеграла Дирихле снизу. В п. 2 показано, что обе эти оценки являются частными случаями общих оценок энергетической нормы решения уравнения $Au = f$ в гильбертовом пространстве H в случае положительно определенного оператора A. Здесь дано также расширение этих оценок, связанное с применением высших приближений метода Ритца–Галеркина. В п. 3 при помощи обобщенного принципа Томсона выведена оценка интеграла Дирихле сверху. В п. 4 рассмотрен случай, когда пробные функции в предыдущих оценках удовлетворяют основному уравнению задачи — являются ρ–гармоническими. В п. 5 выведены уравнения движения инерционно-анизотропной жидкости, к которой также применима предыдущая теория.

Метод двусторонних оценок был применен в работах Полиа и Сеге [4] для решения различных изопериметрических задач о таких величинах как электрическая емкость, крутильная жесткость стержня, присоединенная масса и т. д. Вместе с тем, на основе двусторонних вариационных оценок строятся мощные вычислительные методы. Нужно лишь подбирать надлежащие пробные функции и векторные поля. Изложенные здесь вариационные оценки точны в том смысле, что превращаются в равенства лишь в том случае, когда пробная функция совпадает с точным решением. Поэтому их можно применять, решая смешанную краевую задачу тем или иным приближенным методом. При этом

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (02-01-00337), гранта Президента РФ (НШ-1768.2003.1).

[2]Юдович Виктор Иосифович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и математической физики Ростовского государственного университета.

хорошая точность вычисления интеграла Дирихле достигается при довольно малом числе координатных функций в методе Ритца, когда само решение, возможно, аппроксимируется еще неудовлетворительно. Существенно, что знание присоединенных масс необходимо не только в задачах удара, но также и при исследовании высокочастотных вибраций твердых тел в жидкости [1, 2, 4–7].

Достоинством метода двусторонних оценок является и то, что нет необходимости в дополнительных обоснованиях и оценках погрешности. Метод хорошо работает также при выводе различных асимптотик по малым или большим геометрическим параметрам задачи. Даже в докомпьютерные времена удавалось вычислять этим методом присоединенные массы в задаче удара пластины о горизонтальную свободную границу жидкости в цилиндре или параллелепипеде. Такие расчеты были проведены в дипломной работе Ю. П. Подладчикова (1958 г.), выполненной под руководством автора. К сожалению, результаты не были опубликованы.

В настоящее время вычисление присоединенных масс и моментов инерции при помощи метода двусторонних оценок проводится С. М. Зеньковской, В. А. Новосядлым и И. В. Островской. Результаты этих исследований будут представлены в других публикациях.

1. Постановка задачи. Оценка интеграла Дирихле снизу

Рассмотрим смешанную краевую задачу Дирихле–Неймана, возникающую в теории гидродинамического удара твердого тела, граница которого или ее часть соприкасается с несжимаемой жидкостью

$$\Delta_\rho \varphi = 0, \tag{1.1}$$

$$\varphi\big|_{S_f} = 0, \tag{1.2}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{S_b} = 0, \tag{1.3}$$

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_{S_r} = -\rho V_n. \tag{1.4}$$

Неизвестная функция φ — потенциал течения жидкости, создаваемого ударом и имеющего поле скорости $\mathbf{v} = -\operatorname{grad}\varphi$. Функция φ имеет смысл импульсного давления, она определена в области $D \subset R^3$, занятой жидкостью. Пока будем считать, что область D ограничена. Обобщенный лапласиан Δ_ρ определяется равенством

$$\Delta_\rho(\ ) = \operatorname{div}\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}(\ ).$$

Здесь $\rho(x)$, $x \in \overline{D}$, — плотность жидкости. Предполагается, что ρ — гладкая, всюду положительная функция: существует константа $\rho_0 > 0$ такая, что $\rho(x) \geqslant \rho_0$ для всех $x \in \overline{D}$. Через S_f, S_b, S_r обозначены соответственно свободная граница и смоченная часть границы твердого тела. Свободная граница S_f может и отсутствовать. Тогда получается задача Неймана, в этом случае предполагается, что выполнено необходимое условие ее разрешимости — поток поля $\mathbf{V}$ через границу S_r равен нулю. V_n — компонента скорости точки твердого тела вдоль внешней нормали к S_r. Скорость $\mathbf{V}$ точки x твердого тела определяется равенством

$$\mathbf{V} = \mathbf{U} + \boldsymbol{\omega} \times x,$$

где $\mathbf{U}$ — поступательная скорость, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость. Впрочем, конкретный вид правой части в уравнении (1.4) в изложенной дальше общей теории значения не имеет.

Перейдем к оценке (обобщенного) интеграла Дирихле

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi) = \int\limits_D \frac{1}{\rho}(\nabla\varphi)^2 dx \tag{1.5}$$

сверху и снизу. Как известно [1], кинетическая энергия жидкости, а также присоединенные массы и моменты инерции выражаются интегралом Дирихле (1.5) при надлежащем выборе поля $\mathbf{V}$. Заметим также, что в задаче удара при наличии свободной границы присоединенные массы и моменты инерции имеют адекватный смысл лишь в случае, когда всюду $\varphi(x) \geqslant 0$. Это условие отпадает, если вся граница области течения D твердая.

Первая оценка интеграла Дирихле снизу. Имеется два вариационных принципа для задачи (1.1)–(1.4), приводящих к нижней оценке интеграла Дирихле. Оказывается, что один из них (второй в нашем изложении) всегда дает лучшую оценку.

Дальше систематически используются две формулы Грина для оператора Δ_ρ

$$\int\limits_D \Delta_\rho \varphi \theta \, dx = \\ = -\int\limits_D \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \theta}{\partial x_i} dx + \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\theta \, dS, \quad (1.6)$$

$$\int\limits_D (\theta \Delta_\rho \varphi - \varphi \Delta_\rho \theta) \, dx = \\ = \int\limits_{\partial D} \left(\theta \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) dS.$$

Обе формулы применимы при известных условиях регулярности функций φ и θ, а также границы ∂D.

Рассмотрим функционал

$$I(\varphi) = \frac{1}{2}\int\limits_D \frac{1}{\rho}(\nabla \varphi)^2 dx + \int\limits_{S_r} \varphi V_n \, ds, \quad (1.7)$$

определенный на функциях φ из $W_2^{(1)}(D)$, удовлетворяющих условию на свободной границе S_f. Такие функции образуют гильбертово пространство H со скалярным произведением

$$(\varphi, \theta)_H = \int\limits_D \frac{1}{\rho}\nabla \varphi \nabla \theta \, dx.$$

На решении φ_* краевой задачи (1.1)–(1.4) функционал $I(\varphi)$ достигает строгого минимума, что приводит к теоремам существования и единственности решения [1]. Применяя первую формулу Грина (1.6), интегрируя по частям и учитывая, что функция $\eta \in H$ удовлетворяет условию $\eta\Big|_{S_f} = 0$, приходим к равенству

$$I(\varphi_* + \eta) = I(\varphi_*) + \frac{1}{2}\|\eta\|_H^2,$$

которое справедливо для любой функции $\varphi = \varphi_* + \eta$ из H. Это и есть *вариационный принцип*:

$$I(\varphi) \geqslant I(\varphi_*), \quad (1.8)$$

причем равенство достигается лишь при $\varphi = \varphi_*$.

Из формулы (1.6), полагая в ней $\varphi = \theta = \varphi_*$, выводим

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) = -\int\limits_{S_r} \varphi_* V_n dS.$$

Подстановка в выражение (1.7) для $I(\varphi)$ дает равенство

$$I(\varphi_*) = \frac{1}{2}\int\limits_{S_r} \varphi_* V_n dS = -\frac{1}{2}\mathcal{D}_\rho(\varphi_*).$$

Подставим это выражение в (1.8). В результате получается *первая оценка интеграла Дирихле* $\mathcal{D}_\rho(\varphi_*)$ *снизу*

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \geqslant -2I(\varphi) \quad (1.9)$$

для любой функции $\varphi \in H$, *причем равенство достигается лишь при* $\varphi = \varphi_*$.

Вторая оценка снизу. Теперь рассмотрим скалярное произведение (φ_*, φ) в H. Для любой функции $\varphi \in H$ его можно вычислить, не зная решения φ_*,

$$(\varphi_*, \varphi) = \int\limits_D \frac{1}{\rho}\nabla \varphi_* \nabla \varphi dx = \\ \int\limits_{\partial D} \varphi \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi_*}{\partial n} dS = -\int\limits_{S_r} \varphi V_n dS. \quad (1.10)$$

С другой стороны, неравенство Коши–Буняковского для данного скалярного произведения имеет вид

$$(\varphi_*, \varphi) \leqslant \mathcal{D}_\rho(\varphi_*)\mathcal{D}_\rho(\varphi). \quad (1.11)$$

И здесь равенство имеет место в том и только в том случае, когда $\varphi \parallel \varphi_*$. Из (1.10) и (1.11) вытекает *вторая оценка* интеграла Дирихле снизу

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \geqslant \frac{\left(\int\limits_{S_r} \varphi V_n dS\right)^2}{\mathcal{D}_\rho(\varphi)}, \quad (1.12)$$

которая тоже точна — превращается в равенство при $\varphi \parallel \varphi_*$, и только в этом случае. Фактически мы пришли к новому вариационному принципу — функционал в правой части (1.12) достигает максимума (на пространстве H с выброшенной точкой нуль) на прямой $\varphi = \gamma\varphi_*$. При этом, ввиду однородности, его значение от постоянной γ не зависит.

Заметим, что для любой ненулевой функции $\varphi \in H$ оценка (1.12) лучше, чем оценка (1.9). Действительно, вводя обозначения

$$\int\limits_{S_r} \varphi V_n dS = a, \qquad \mathcal{D}_\rho(\varphi) = b,$$

получаем, что правая часть в (1.12) есть $\frac{a^2}{b}$, а правая часть в (1.9) есть $-b-2a$, но при $b>0$ всегда

$$\frac{a^2}{b} \geqslant -b-2a.$$

Равенство здесь имеет место лишь при $a=-b$, то есть при $\varphi=\varphi_*$.

Использовать вариационный принцип, выраженный неравенством (1.12), для разыскания потенциала φ_* представляется излишне сложным. Поэтому практически можно рекомендовать строить приближенное решение методом Ритца–Галеркина, основанным на вариационном принципе для функционала $I(\varphi)$, но для оценки интеграла Дирихле подставлять приближенное решение φ в неравенство (1.12). Оценка (1.12) получается, если действовать методом Ритца с одной координатной функцией φ. Дальше этот результат обобщается на случай нескольких координатных функций и на общее операторное уравнение с положительно определенным оператором в гильбертовом пространстве.

2. Общая оценка энергетической нормы

Рассмотрим уравнение в гильбертовом пространстве H

$$A\,u = f \tag{2.1}$$

с положительно определенным оператором A. Его область определения $D(A)$ предполагается плотной в H, а ее замыкание по энергетической норме $\|u\|^2_{H_1} = (Au,u)$, определенное первоначально на $D(A)$, приводит к *энергетическому пространству* H_1 оператора A [9].

Обобщенное решение уравнения (2.1) определяется как элемент $u_* \in H_1$ такой, что выполнено равенство

$$(u_*, v)_{H_1} = (f,v)_H \tag{2.2}$$

для любого $v \in H_1$. Как известно, обобщенное решение u_* есть точка строгого минимума функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H_1} - (f,u) \tag{2.3}$$

на пространстве H_1. Существование и единственность обобщенного решения сразу получаются посредством применения к равенству (2.2) теоремы Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве. Заметим, что второе слагаемое справа в (2.3) можно понимать как значение некоторого линейного ограниченного функционала на H_1, реализованного как «обобщенная функция» f посредством скалярного произведения в H. Поэтому функционал $I(\varphi)$ (1.7) является частным случаем функционала (2.3). Таким образом, задача об ударе есть частный случай рассматриваемой сейчас общей задачи.

В приложениях значительный интерес представляют вычисление, а также оценки величины $\|u_*\|^2_{H_1}$. В теории упругости это внутренняя потенциальная энергия, в задачах о вязкой жидкости — скорость диссипации энергии. Полагая в (2.2) $v=u_*$, получим

$$\|u_*\|^2_{H_1} = (f,u_*). \tag{2.4}$$

Отсюда следует, что $J(u_*) = -\dfrac{1}{2}\|u_*\|^2_{H_1}$. Применяя вариационный принцип $J(u) \geq J(u_*)$, приходим к оценке

$$\|u_*\|^2_{H_1} \geq -2J(u) \tag{2.5}$$

для любого $u \in H_1$. При этом равенство достигается лишь при $u=u_*$. В этом смысле вариационное неравенство (2.5) является точным. Тем не менее, его можно усилить.

Согласно неравенству Коши – Буняковского, для любого $u \in H_1$ имеем

$$(u_*,u)^2_{H_1} \leq \|u_*\|^2_{H_1}\|u\|^2_{H_1}. \tag{2.6}$$

В соответствии с (2.2) $(u_*,u)^2_{H_1} = (f,u)^2_H$. Подстановка в (2.6) дает неравенство

$$\|u_*\|^2_{H_1} \geq \frac{(f,u)^2_H}{\|u\|^2_{H_1}}. \tag{2.7}$$

Это неравенство также, по существу, является точным. Действительно, неравенство Коши–Буняковского (2.6) может стать равенством лишь при $u=\gamma u_*$. Но правая часть (2.7) однородна относительно u и от γ не зависит. Разумеется, предполагается, что $u \neq 0$.

Таким образом, вариационное неравенство (2.7) выражает новый вариационный принцип. Вряд ли на нем следует основывать

приближенное вычисление решения, скажем, методом Ритца. Однако, получив приближенное решение u уравнения (2.1) тем или иным способом, следует использовать для оценки его энергетической нормы неравенство (2.7), а не неравенство (2.5). Действительно, так же, как и выше, устанавливаем, что правая часть в (2.7) всегда больше, чем в (2.5).

Идея вывода оценки (2.7) становится яснее при некотором обобщении. Пусть E_n — подпространство в H_1, порождаемое базисом $u_1, \ldots, u_n$, так что $E_n = \mathrm{Lin}\{u_1, \ldots, u_n\}$. Очевидно, справедливо неравенство

$$\min_{H_1} J(u) \le \min_{E_n} J(u).$$

Учитывая, что $\|u_*\|^2_{H_1} = -2J(u_*)$, приходим к оценке

$$\|u_*\|^2_{H_1} \ge -2 \min_{E_n} J(u). \tag{2.8}$$

В частности, при $n = 1$ получается оценка (2.7), где u_1 заменено на u.

При $n = 2$, вычисляя правую часть (2.8) для пространства E_2, порожденного парой линейно независимых векторов u и v, приходим к оценке

$$\|u_*\|^2_1 \le \frac{\Delta_0}{(u,u)_1(v,v)_1 - (u,v)^2_1}, \tag{2.9}$$

$$\Delta_0 = (f,u)^2(v,v)_1 - 2(f,u)(f,v)(u,v)_1 + \\ + (f,v)^2(u,u)_1.$$

Правую часть можно записать в более элегантной форме, используя операции во внешнем квадрате $H_1^{\wedge 2}$ гильбертова пространства H_1. Для этого введем оператор $K = f \otimes f$, действующий в H_1 по правилу $Ku = (f,u)f$. Затем определим внешнюю сумму $S = S^{\wedge 2}(K)$ — сужение тензорной суммы $I \otimes K + K \otimes I$ на внешний квадрат $H_1^{\wedge 2}$ пространства H_1. Тогда неравенство (2.9) запишется в виде

$$\|u_*\|^2_1 \le \frac{(S(u \wedge v), (u \wedge v))_{H_1^{\wedge 2}}}{\|u \wedge v\|^2_{H_1^{\wedge 2}}}.$$

В общем случае, при заданной линейно независимой системе $u_1, \ldots, u_n$ строим внешнюю сумму n-го порядка оператора K

$$S^{\wedge n}(K) = K \otimes I \otimes \cdots \otimes I + \ldots \\ \ldots + I \otimes I \otimes \cdots \otimes K \Big|_{H_1^{\wedge n}}$$

на внешней n-й степени $H_1^{\wedge n}$ гильбертова пространства H_1. Неравенство (2.8) переписывается в форме

$$\|u_*\|^2_{H_1} \ge \frac{(S^{\wedge n}(u_1 \wedge \cdots \wedge u_n), u_1 \wedge \cdots \wedge u_n)_{H_1^{\wedge n}}}{\|u_1 \wedge \cdots \wedge u_n\|^2_{H_1^{\wedge n}}}.$$

3. Обобщенный принцип Томсона (Кельвина). Оценка интеграла Дирихле сверху

Теперь получим оценку интеграла Дирихле сверху. Она основывается на некотором обобщении вариационного принципа Томсона. На сей раз пробные функции должны удовлетворять условиям Неймана как на неподвижном дне, так и на границе подвижного тела. При этом условие на свободной границе может быть нарушено.

При заданных полях плотности ρ и скорости $\mathbf{v}$ кинетическая энергия определяется равенством

$$T(\mathbf{v}) = \int_D \frac{\rho v^2}{2} dx.$$

Следующее утверждение обобщает принцип Томсона [10] на случай, когда жидкость неоднородна, и имеется свободная граница.

Предложение 1. Среди всех течений жидкости, которые соленоидальны ($\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$) и удовлетворяют условию на твердых стенках, подвижных и неподвижных, наименьшую кинетическую энергию имеет ρ-потенциальное течение с полем скорости

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho}\nabla\varphi_*,$$

причем потенциал φ является решением краевой задачи (1.1)–(1.4).

Доказательство. Пусть $\mathbf{v}$ — произвольное соленоидальное поле, удовлетворяющее условиям предложения, так что

$$\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0, \\ v_n\Big|_{S_b} = 0, \quad v_n\Big|_{S_r} = V_n. \tag{3.1}$$

Положим $\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\varphi_* + \mathbf{u}$, тогда поле $\mathbf{u}$ удовлетворяет условиям

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0,$$

$$u_n\Big|_{S_b\cup S_r} = 0.$$

Имеем

$$T(\mathbf{v}) = T\left(-\frac{1}{\rho}\nabla\varphi_* + \mathbf{u}\right) = \\ = \frac{1}{2}\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) + T(\mathbf{u}) + \int\limits_D \mathbf{u}\nabla\varphi_*\,dx.$$

Преобразуя последнее слагаемое посредством интегрирования по частям, получаем

$$\int\limits_D \mathbf{u}\nabla\varphi_*\,dx = \\ = -\int\limits_D \varphi_*\operatorname{div}\mathbf{u}\,dx + \int\limits_{\partial D}\varphi_* u_n\,dS = 0.$$

Объемный интеграл исчезает потому, что $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$, а поверхностный интеграл исчезает, поскольку $\varphi_* = 0$ на S_f, а $u_n = 0$ на остальной твердой части границы.

Таким образом,

$$T\left(-\frac{1}{\rho}\nabla\varphi_* + \mathbf{u}\right) = \\ = \frac{1}{2}\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) + T(\mathbf{u}) \geqslant \frac{1}{2}\mathcal{D}_\rho(\varphi_*).$$

Равенство здесь, очевидно, имеет место при $\mathbf{u} = 0$, $\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\varphi_*$, и только в этом случае. Таким образом, предложение доказано.

Из него следует точная оценка сверху обобщенного интеграла Дирихле

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \leqslant 2T(\mathbf{v}) \tag{3.2}$$

для произвольного поля $\mathbf{v}$, удовлетворяющего условиям (3.1). Равенство имеет место при $\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\varphi_*$, и лишь в этом случае.

4. Оценка сверху с ρ-гармоническим пробным полем

При использовании вариационного метода нередко возникает дилемма — использовать ли координатные функции, удовлетворяющие лишь минимально необходимым условиям, или стараться построить наилучшие возможные координатные функции. Понятно, что в последнем случае само это построение усложняется, но зато можно ожидать, что ответ с нужной точностью будет получен при небольшом числе координатных функций. Вряд ли здесь можно выдать рекомендацию, пригодную на все случаи жизни, так что дилемма разрешается по-разному в различных конкретных случаях. Нередко лучшим оказывается некоторый компромиссный вариант. Разумно рассматривать различные варианты координатных и пробных функций и векторных полей.

Наша цель — описать построение лучших возможных пробных функций для использования принципа Кельвина. Посмотрим, как работает оценка вида (3.2), когда поле скорости ρ-потенциально и удовлетворяет всем условиям Неймана — на дне S_b и на границе твердого тела S_r. В этом случае лишь условие на свободной границе S_f остается выполненным приближенно, в противном случае получили бы точное решение.

Итак, пусть $\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\varphi$, причем функция φ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\varphi\right) = 0 \tag{4.1}$$

и краевым условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_b} = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_r} = -\rho V_n. \tag{4.2}$$

Добавим к этим условиям граничное условие

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{S_f} = -\rho g(x), \tag{4.3}$$

где функция $g(x)$ есть некоторое приближение неизвестной заранее нормальной скорости на границе. Если она как-то задана, то возникает задача Неймана (4.1) – (4.3). Функция g не произвольна, так как должно выполняться условие разрешимости задачи Неймана

$$\int\limits_{S_f} g\,dS + \int\limits_{S_r} V_n\,dS = 0. \tag{4.4}$$

Может случиться, что выполнено равенство

$$\int\limits_{S_r} V_n\,dS = 0. \tag{4.5}$$

Так бывает, например, когда движение тела является вращательным. То же верно и в случае, когда вообще нет свободной границы, и твердое тело со всех сторон окружено жидкостью. Но этот случай здесь не рассматриваем.

Тогда функция g должна удовлетворять условию

$$\int\limits_{S_f} g\,dS = 0. \tag{4.6}$$

Выбрав некоторый набор координатных функций g_1, g_2, $\ldots$, g_n, имеет смысл разыскивать функцию g в виде

$$g = \sum_{k=1}^{n} \beta_k g_k, \tag{4.7}$$

и определять константы β_k посредством минимизации функционала

$$D_\rho(\varphi) = D_\rho(\varphi_0 + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \varphi_k).$$

Здесь φ_0 — решение задачи (4.1)–(4.3) при $g = 0$, а φ_k — решение той же задачи при $g = g_k$ и $V_n = 0$. Например, в случае $n = 1$

$$D_\rho(\varphi) = D_\rho(\varphi_0 + \beta_1\varphi_1) = \\ = D_\rho(\varphi_0) - 2\beta_1 \int\limits_{S_r} \varphi_1 V_n\,dS + \beta_1^2 D_\rho(\varphi_1). \tag{4.8}$$

Константа β_1 определяется условием минимума

$$\beta_1 = \frac{\int\limits_{S_r} \varphi_1 V_n\,dS}{D_\rho(\varphi_1)}.$$

Подставив это значение в (4.8), приходим к оценке

$$D_\rho(\varphi_*) \le D_\rho(\varphi) = D_\rho(\varphi_0) - \frac{\left(\int\limits_{S_r} \varphi_1 V_n\,dS\right)^2}{D_\rho(\varphi_1)}.$$

Эта оценка относится к случаю, когда выполнено условие (4.5). Здесь φ_1 — решение краевой задачи

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\varphi_1\right) = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{S_b\cup S_r} = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\right|_{S_f} = -\rho g_1(x),$$

причем для $g_1(x)$ выполняется условие разрешимости (4.6).

Рассмотрим случай $\int\limits_{S_r} V_n\,dS \neq 0$. Попрежнему воспользуемся аппроксимацией (4.7). Необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\int\limits_{S_f} g_1\,dS \neq 0,$$

тогда константа β_1 будет определяться из условия разрешимости (4.4)

$$\beta_1 = -\frac{\int\limits_{S_r} V_n\,dS}{\int\limits_{S_f} g_1\,dS}. \tag{4.9}$$

Таким образом, если $n = 1$, так что $g = \beta_1 g_1$, уже не остается свободных параметров, и для пробной функции φ_0 получается краевая задача

$$\Delta\varphi_0 = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right|_{S_b} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right|_{S_r} = -\rho V_n,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_0}{\partial n}\right|_{S_f} = -\beta_1\rho g_1,$$

где β_1 дается формулой (4.9).

При этом решение φ_0 определяется с точностью до аддитивной постоянной, которую можно выбрать произвольно, так как $D_\rho(\varphi_0)$ от нее не зависит.

Выражая $D_\rho(\varphi_0)$ через граничные интегралы посредством формулы Грина, приходим к оценке

$$D_\rho(\varphi_*) \le D_\rho(\varphi_0) = \\ = \frac{\int\limits_{S_r} V_n\,dS}{\int\limits_{S_f} g_1\,dS} \int\limits_{S_f} \varphi_0 g_1\,dS - \int\limits_{S_r} \varphi_0 V_n\,dS. \tag{4.10}$$

В данном случае пробная функция φ определяется однозначно, вместе с константой β_1 из условия для потока (4.4). Посмотрим, как уточняется оценка (4.10) при улучшении аппроксимации (4.7). Координатные функции g_2, g_3, $\ldots$ подчиним условию

$$\int\limits_{S_f} g_k\,dS = 0, \quad k = 2, 3, \ldots,$$

чтобы не испортить уже удовлетворенное условие разрешимости (4.4). Поясним дальнейший ход выкладок на простейшем случае

$n = 2$. Будем теперь строить пробную функцию φ в виде

$$\varphi = \varphi_0 + \beta_2\varphi_2,$$

где φ_0 — функция, определенная выше как решение краевой задачи (4.1)–(4.3) при $g = 0$. Функция φ_2 — решение краевой задачи Неймана

$$\Delta_\rho\varphi_2 = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{S_b\cup S_r} = 0, \quad \left.\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\right|_{S_f} = -\rho g_2.$$

Эта функция удовлетворяет условиям принципа Томсона при любых значениях β_2. Наилучшее значение константы β_2 находим, минимизируя интеграл Дирихле $D_\rho(\varphi_0 + \beta_2\varphi_2)$. Имеем

$$D_\rho(\varphi_0 + \beta_2\varphi_2) = D_\rho(\varphi_0) + \beta_2^2 D_\rho(\varphi_2) + \\ + 2\beta_2 \int\limits_{S_b\cup S_r\cup S_f} \frac{1}{\rho}\varphi_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\, dS.$$

Константа β_2 определяется из условия минимума

$$\beta_2 = \frac{\int\limits_{S_f} \varphi_0 g_2\, dS}{D_\rho(\varphi_2)}.$$

Согласно обобщенному принципу Томсона, получаем оценку

$$D_\rho(\varphi_*) \le D_\rho(\varphi_0 + \beta_2\varphi_2) = \\ = D_\rho(\varphi_0) - \frac{\left(\int\limits_{S_f} \varphi_0 g_2\, dS\right)^2}{D_\rho(\varphi_2)}.$$

Отметим, что вычислять на практике придется лишь последнее вычитаемое, так как $D_\rho(\varphi_0)$ можно предполагать уже найденным. Заметим еще, что при вычислении интеграла Дирихле может оказаться полезной формула

$$D_\rho(\varphi_2) = \int\limits_D \frac{1}{\rho}\left(\nabla\varphi_2\right)^2\, dx = \\ = \int\limits_{\partial D} \frac{1}{\rho}\varphi_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\, dS = -\int\limits_{S_f} \varphi_2 g_2\, dS.$$

Подведем итог. Для интеграла Дирихле $\mathcal{D}_\rho(\varphi_*)$ от решения краевой задачи (1.1)–(1.4) справедлива оценка снизу (1.12), где пробная функция φ, помимо обычных условий регулярности, должна удовлетворять условию $\varphi\Big|_{S_f} = 0$ на свободной границе S_f. Если функция φ дополнительно удовлетворяет уравнению $\Delta_\rho\varphi = 0$ и краевому условию $\frac{\partial\varphi}{\partial n}\big|_{S_b} = 0$, то неравенство (1.12) принимает вид

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \geqslant \frac{\left(\int\limits_{S_r} \varphi V_n dS\right)^2}{\int\limits_{S_r} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} dS}. \tag{4.11}$$

Если пробная функция φ не удовлетворяет краевому условию на S_b (но удовлетворяет остальным условиям), то в знаменателе добавляется интеграл от $\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ по S_b.

Для интеграла Дирихле $\mathcal{D}_\rho(\varphi)$ справедлива также оценка сверху (3.2), где векторное поле $\boldsymbol{v}$ должно быть соленоидальным и удовлетворять краевым условиям (3.1) на S_b и на S_r. Если дополнительно предположить, что поле $\boldsymbol{v}$ — ρ–потенциально, то есть $\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla\varphi$, то оценка (3.2) может быть переписана в форме

$$\mathcal{D}_\rho(\varphi_*) \leqslant \int\limits_{S_f} \frac{1}{\rho}\,\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n} dS - \int\limits_{S_r} \varphi V_n dS. \tag{4.12}$$

Заметим, что иногда, даже в тех случаях, когда оценки (4.11) и (4.12) справедливы, для вычислений все же удобнее бывает использовать общие формулы (1.12) и (3.2).

Приложение к задаче удара. Кинетическая энергия, приобретенная жидкостью в результате удара, выражается через интеграл Дирихле от потенциала скорости жидкости φ_*. Она представляет собой квадратичную форму от линейной скорости $\mathbf{U}$ твердого тела и его угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$. Если имеется несколько твердых тел, то соответственно возникает квадратичная форма от их линейных и угловых скоростей. Коэффициенты квадратичной формы $2T$ — суть элементы тензора инерции. В частности, коэффициент m_{jj} при U_j^2 есть присоединенная масса, соответствующая поступательному движению в направлении j-й оси. Коэффициент J_{jj} при ω_j^2 есть присоединенный момент инерции данного тела, отвечающий вращению вокруг j-ой оси.

Приведенные выше общие оценки интеграла Дирихле приводят, в частности, к оценкам присоединенных масс m_{jj} и моментов инерции I_{jj}, для чего достаточно рассмотреть случай чисто поступательного движения вдоль j-оси и случай чистого вращения вокруг j-й оси.

Разумеется, можно также получать и оценки различных инвариантов кинетической энергии относительно ортогональных преобразований, например, средней присоединенной массы $m = \frac{1}{3}(m_{11} + m_{22} + m_{33})$.

5. Замечание об анизотропной модели жидкости

Нетрудно заметить, что конкретная форма оператора Δ_ρ играет весьма малую роль в предыдущих рассмотрениях. Кое-что допускает обобщение на операторные уравнения в гильбертовом пространстве, надо лишь привести краевую задачу к неоднородному уравнению с однородными краевыми условиями, чтобы это стало очевидно. Все без исключения предыдущие результаты переносятся на задачу с эллиптическим оператором второго порядка общего вида. Это наводит на мысль рассмотреть общую анизотропную модель жидкости, в которой кинетическая энергия жидкости определяется для каждой частицы заданием не скалярной функции — плотности, а полем положительно определенных операторов. Рассмотрим эту модель. Возможно, она найдет применение при описании динамики суспензии — жидкости с плавающими в ней частицами неправильной формы.

Пусть несжимаемая сплошная среда, которую будем называть *инерционно-анизотропной жидкостью*, заполняет область $D \subset R^3$. Будем считать, что вязкость отсутствует, так что уравнение движения можно вывести из принципа Гамильтона. Границу области D будем считать непроницаемой для данной жидкости. Тогда, очевидно, будет выполняться закон сохранения энергии. Кинетическую энергию зададим в виде

$$T = \frac{1}{2}\int\limits_D m_{ik}(a)\dot{x}_i(a,t)\dot{x}_k(a,t)da = \\ = \frac{1}{2}\int\limits_D (M(a)\dot{x},\dot{x})da.$$

Как обычно, $x(a,t)$ означает положение частицы в момент времени t, занимавшей положение $a \in D$ в начальный момент $t = 0$. При этом $\dot{x}(a,t)$ — скорость. Оператор $M(a)$ назовем оператором масс и предположим, что он положительно определен, через $m_{ik}(a)$ обозначим его матричные элементы в стандартном базисе пространства R^3. Если потенциальная энергия отсутствует, действие по Гамильтону определяется равенством

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} T dt$$

для любых $t_1 < t_2$. Принцип Гамильтона с учетом связи

$$\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial a_k}\right) = 1 \tag{5.1}$$

приводит к уравнению движения

$$M\ddot{x} = -\nabla_x p. \tag{5.2}$$

В стандартной модели неоднородной жидкости оператор M — скалярного типа

$$M(a) = \rho(a)I,$$

где ρ — плотность жидкости.

Заметим, что можно рассматривать оператор M, зависящий от времени, тогда уравнение движения (5.2) примет вид

$$\frac{d}{dt}M(a,t)\frac{d}{dt}x(a,t) = -\nabla_x p. \tag{5.3}$$

Вместе с уравнением связи (5.1) уравнение движения (5.2) или (5.3) приводит к замкнутой системе уравнений в лагранжевой форме. Можно, конечно, выписать и соответствующие эйлеровы уравнения.

В задаче удара для приобретенной жидкостью скорости $\mathbf{u}(x)$ стандартный вывод дает равенство

$$M(x)\mathbf{u}(x) = -\nabla\varphi(x),$$

где φ — импульсивное давление. Из этого уравнения следует, что $\mathbf{u} = -M^{-1}\nabla\varphi$. Правая часть здесь — не что иное, как градиент функции φ в M-метрике: $\mathbf{u} = -\operatorname{grad}_M \varphi$. Такие векторные поля будем называть M-потенциальными. Подстановка в уравнение несжимаемости (5.1) дает для потенциала φ эллиптическое уравнение

$$\operatorname{div}(M^{-1}\nabla\varphi) = 0.$$

Если в стандартном базисе матрица M^{-1} имеет вид $M^{-1}(x) = (m^{ik}(x))$, то это уравнение записывается в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_i} m^{ik}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = 0.$$

Рассмотренная модель является одной из реализаций абстрактного уравнения Эйлера–Арнольда [6], когда метрика в алгебре Ли группы $S\,\mathrm{diff}\,D$ задается оператором M.

Литература

1. *Юдович В. И.* Гидродинамический удар в неоднородной несжимаемой жидкости / Ростовский государственный университет. Ростов-на-Дону, 2004. 51 с. Деп. в ВИНИТИ 13.07.2004, № 1208-В2004.
2. *Yudovich V. I.* Hydrodynamical Impact in Nonhomogeneous Incompressible Fluid // Preprint HIMSA, University of Hull. 2005. № 15.
3. *Юдович В.И.* Об асимптотическом интегрировании системы Навье-Стокса при ударных воздействиях на жидкость // Изв. вузов. Сев.-Кавказ. регион. Естеств. науки. 2004. Спецвыпуск. С. 126–132.
4. *Полиа Г., Сеге Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике. М.: Физматгиз, 1962. 336 с.
5. *Юдович В.И.* Вибродинамика и виброгеометрия механических систем со связями / Ростовский государственный университет. Ростов-на-Дону, 2003. Деп. в ВИНИТИ 17.07.2003, № 1407-В2003.
6. *Arnold V. I.* Sur la géometry differéntielle des groupes de Lie de dimension infinite et ses applications ‘a l’hidrodynamique des fluides parfaits // Annales de l’Institut Fourier. 1966. Т. 16. № 1. P. 319–361.
7. *Vladimirov V. A.* On vibrodynamics of pendulum and submerged solid // Preprint HIMSA, University of Hull. 2005. № 14.
8. *Vladimirov V. A.* On vibrodynamics of pendulum and submerged solid // Journal of Mathematical Fluid Mechanics. 2005. Vol. 7. Supp. 3. P. 397–412.
9. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М., 1952. 217 с.
10. *Ламб Г.* Гидродинамика. М., Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1947. 928 с.

Статья поступила 10 июня 2005 г.
Ростовский государственный университет
© Юдович В. И., 2005