

МЕХАНИКА

УДК 539.3:534.1

DOI: 10.31429/vestnik-17-2-49-56

РЕАЛИЗАЦИЯ ГИБРИДНОГО ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ПОДХОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДИФРАКЦИИ SH-ВОЛН НА ПРЕПЯТСТВИЯХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

Новиков О. И., Евдокимов А. А.

IMPLEMENTATION OF A HYBRID NUMERICAL-ANALYTICAL APPROACH FOR SOLVING THE PROBLEMS OF SH-WAVE DIFFRACTION BY ARBITRARY-SHAPED OBSTACLES

O. I. Novikov, A. A. Evdokimov

Kuban State University, Krasnodar, 350040, Russia
e-mail: n0v0leg@ya.ru

Abstract. Guided waves propagation and diffraction are considered in elastic waveguides with arbitrary shaped local inhomogeneities. Both analytical and numerical approaches are widely used to calculate and analyze displacement fields. This paper presents the implementation of a hybrid numerical-analytical approach. A numerical approach is utilized in the internal domain containing local inhomogeneity. It is based on the decomposition by the set of basic solutions obtained by the finite element method. Meanwhile, the solution in the outer semi-infinite domains has an analytical form and is based on the decomposition by the normal modes. Unknown decomposition coefficients are derived from the imposed interface conditions between the domains. The numerical computation of the basis finite-element solutions can be carried out on a specialized software. Nevertheless, a more efficient implementation is proposed based on the fact that multiple basic finite element problems share a single global stiffness matrix, which can be inverted once. The algorithm is tested by comparison with the COMSOL model which utilises perfectly matched layers. The developed package allows not only to calculate the displacement fields in the local domain containing the inhomogeneity, but also to obtain analytical representations of the waves travelling to infinity, which yield a physically descriptive representation of the solution. In addition, the presented package allows a parametric analysis of the dependence of the wave field characteristics on various medium properties and inhomogeneity geometry.

Keywords: guided waves, unbounded waveguide, arbitrary local inhomogeneities, finite element method, modal decomposition, local-global solution, wave energy.

Введение

Рассматриваются распространение и дифракция SH-волн на локальных препятствиях. Актуальность подобных исследований обусловлена многочисленными приложениями в различных областях науки и техники, таких как инженерная практика, геофизика, физическая акустика, дефектоскопия, материаловедение, медицинская томография, приборостроение [1], где возникает необходимость в разработке математических и компьютерных моделей, описывающих как процесс возбуждения и распространения бегущих волн, так и их дальнейшее взаимодействие с произвольными препятствиями. При-

менение таких моделей позволяет обнаруживать и идентифицировать дефекты в тонкостенных конструкциях (обшивка авиалайнера, стенки реакторов и химических емкостей и т.п.). Данная техника волнового контроля в последнее время выделяется в самостоятельное научно-техническое направление — мониторинг дефектов конструкций (SHM — Structural Health Monitoring) [2].

При построении моделей зачастую используются методы, основанные на разложении искомым функций (волновых полей) по фундаментальным решениям (МФР). Данные решения тождественно удовлетворяют рассматриваемым уравнениям, поэтому неизвестные

Новиков Олег Игоревич, младший научный сотрудник Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: n0v0leg@ya.ru.

Евдокимов Александр Александрович, младший научный сотрудник Института математики, механики и информатики Кубанского государственного университета; e-mail: evdokimovmail27@gmail.com.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01191).

коэффициенты разложения определяются исходя из граничных условий. Здесь можно выделить два различных подхода к использованию разложений по фундаментальным решениям. В рамках первого подхода решение исходной задачи строится в виде линейной комбинации фундаментальных решений с центрами (источниками), расставленными снаружи вдоль границы рассматриваемой области (метод фундаментальных решений) [3]. Альтернативный подход состоит в использовании ядер граничных интегральных уравнений (ГИУ) или базиса метода граничных элементов (МГЭ), который можно рассматривать как результат дискретизации ГИУ [4]. К недостаткам данных подходов относится сложность их применения при стыковке значительного числа разнородных областей.

Для преодоления указанного недостатка был предложен метод слоистых элементов (МСЭ) [5]. В отличие от классического МГЭ, слоистые элементы являются фундаментальными решениями для рассматриваемой многослойной структуры в целом и поэтому автоматически удовлетворяют граничным условиям на всех ее внешних и внутренних скопараллельных границах.

Также особую популярность получили коммерческие пакеты, реализующие сеточные методы, такие как метод конечных элементов (МКЭ) или метод конечных разностей (МКР). Данные методы обладают универсальностью в отношении геометрии и неоднородности материала рассматриваемого образца, а реализующие их пакеты зачастую обладают дружественным интерфейсом, включающим возможности визуализации, экспорта и последующей обработки данных. Однако применение таких пакетов для решения волновых задач, в частности при моделировании распространения и дифракции бегущей волны в бесконечных волноводах с локальными неоднородностями, связано с рядом трудностей. Во-первых, возникает необходимость сужать рассматриваемую бесконечную область до конечных размеров в связи с ограничениями данных методов. Для моделирования оттока волновой энергии на бесконечность добавляются специальные неотражающие и поглощающие граничные условия [6], среди которых особую популярность получили условия идеально согласованных слоёв (ИСС) [7, 8]. Но использование данных условий может со-

провождаться возникновением ряда лишних спектральных точек, присущих ограниченным областям, которых нет в исходной задаче для бесконечной области. В случае расположения некоторых из них вблизи вещественной оси решение МКЭ-ИСС может существенно отличаться от искомого решения. Во-вторых, возникает необходимость расчёта поля смещений на всей протяжённости волновода от источника колебаний до локальной неоднородности, что может привести к значительным вычислительным затратам при увеличении расстояния между источником и неоднородностью или/и при повышении частоты колебаний.

Для разрешения вышеупомянутых проблем естественным образом возникает подход, основанный на сопряжении явного аналитического представления волнового поля во внешней области волновода с численным решением для внутренней области, содержащей препятствие или источник. Такой гибридный подход (МКЭ-Ан), реализованный на базе пакета Comsol, был предложен ранее в работе [9]. Он основан на предварительном построении набора МКЭ-решений с граничными условиями, наводимыми каждой нормальной модой на искусственных границах локальной области. Эти МКЭ-решения играют роль базиса при сшивании с явным представлением решения во внешней области в виде разложения по нормальным модам. Данное разложение, содержащее несколько неизвестных коэффициентов, фактически является многомодовым бесконечным элементом, позволяющим корректно описывать отток волновой энергии на бесконечность без введения искусственных поглощающих граничных условий. Поскольку для конечного пользователя коммерческие конечно-элементные пакеты представляют из себя «черный ящик», практическая реализация данного подхода зачастую сопровождается дополнительными трудностями.

В настоящей работе приводится аналогичная гибридная схема, но уже основанная на собственной реализации конечно-элементного пакета для скалярного случая. Приводится описание особенности численного расчёта конечно-элементных решений. Достоверность алгоритма проверяется сопоставлением с результатами, полученными при помощи пакета COMSOL. Демонстрируются возможности пакета для расчёта волновых полей и

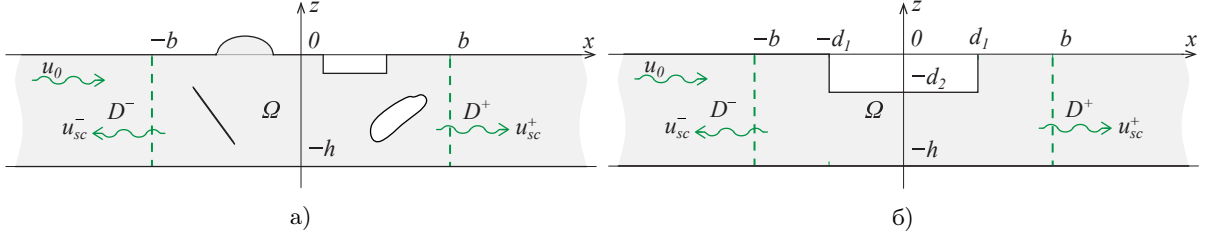


Рис. 1. Геометрия задачи: а) общая постановка; б) рассматриваемый пример

их характеристик, а также для проведения параметрического анализа.

Постановка задачи

Рассматриваются антиплоские установившиеся гармонические колебания $\mathbf{u}e^{-i\omega t}$, $\mathbf{u} = (0, u_y, 0)$, волновод D толщины h , содержащий некоторые локальные неоднородности, расположенные в области $\Omega = \{(x, z), -b \leq x \leq b, -h \leq z \leq 0\}$ (рис. 1а). Множитель $e^{-i\omega t}$ в дальнейшем в силу линейности задачи опущен. Смещения точек волновода D удовлетворяют уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0, \quad (1)$$

где $\kappa = \omega/c$, ω — круговая частота, c — скорость распространения поперечных волн. На верхней границе волновода предполагается условие отсутствия напряжений, а на нижней границе — условие жесткого закрепления:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. u \right|_{z=-h} = 0. \quad (2)$$

На бесконечности требуется выполнение условий излучения, вытекающих из принципа предельного поглощения. Смещения вызваны бегущей волной $u_0 = r_n(z)e^{i\zeta_n x}$ с некоторым заданным номером моды $n = p$. Здесь $r_n = \frac{i}{h\zeta_n} \cos(a_n z)$ — амплитуды бегущих волн, $\zeta_n = \sqrt{\kappa^2 - a_n^2}$ — волновые числа, $a_n = \pi \frac{n-0,5}{h}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$).

Описание гибридной схемы

Следуя общей схеме гибридного подхода [9], область D разбивается на три подобласти $D = D^- \cup \Omega \cup D^+$ с помощью двух вертикальных сечений вдоль прямых $x = \mp b$ (рис. 1а). В подобластях D^- и D^+ решение представляется аналитически, а в подобласти

Ω — в виде конечно-элементного разложения:

$$u = \begin{cases} u_{sc}^- + u_0, & x \in D^-, \\ u_F, & x \in \Omega, \\ u_{sc}^+, & x \in D^+. \end{cases}$$

Аналитические представления рассеянных волновых полей u_{sc}^\mp , а также конечно-элементное представление u_F волнового поля имеют вид разложения по базисным волновым полям $u_{sc,n}^\mp$ и $u_{F,n}^\mp$, взвешенным неизвестными коэффициентами c_n^\mp :

$$u_{sc}^\mp = \sum_{n=1}^N c_n^\mp u_{sc,n}^\mp, \\ u_F = \sum_{n=1}^N (c_n^- u_{F,n}^- + c_n^+ u_{F,n}^+) + u_F^0.$$

Рассеянные базисные волновые поля $u_{sc,n}^\mp$ имеют вид нормальных мод с соответствующим номером

$$u_{sc,n}^\mp = r_n^\mp e^{\mp i\zeta_n(x \pm b)}, \quad n = \overline{1, N}.$$

Для расчёта базисных конечно-элементных полей $u_{F,n}^\mp$ и u_F^0 в подобласти Ω , в дополнение к граничным условиям (2), требуются условия на вертикальных границах стыка с подобластями D^- и D^+ :

$$\begin{cases} u_{F,n}^- = u_{sc,n}^-, & x = -b, \\ u_{F,n}^- = 0, & x = b, \\ u_{F,n}^+ = 0, & x = -b, \\ u_{F,n}^+ = u_{sc,n}^+, & x = b, \\ u_F^0 = u_0, & x = -b, \\ u_F^0 = 0, & x = b, \end{cases} \quad n = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Для нахождения $2N$ неизвестных коэффициентов c_n^\mp , $n = \overline{1, N}$ накладываются дополни-

тельные граничные условия:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_F}{\partial x} = \frac{\partial u_{sc}^-}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x}, & x = -b, \\ \frac{\partial u_F}{\partial x} = \frac{\partial u_{sc}^+}{\partial x}, & x = b. \end{cases} \quad (4)$$

При подстановке в эти условия разложений u_{sc} и u_F получаются следующие соотношения:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^N \left[c_n^- \left(\frac{\partial u_{F,n}^-}{\partial x} - \frac{\cos(a_n z)}{h} \right) + c_n^+ \frac{\partial u_{F,n}^+}{\partial x} \right] = \\ = -\frac{\partial u_F^0}{\partial x} - \frac{\cos(a_p z) e^{i\zeta_p x}}{h}, & x = -b, \\ \sum_{n=1}^N \left[c_n^- \frac{\partial u_{F,n}^-}{\partial x} + c_n^+ \left(\frac{\partial u_{F,n}^+}{\partial x} + \frac{\cos(a_n z)}{h} \right) \right] = \\ = -\frac{\partial u_F^0}{\partial x}, & x = b. \end{cases}$$

Для дискретизации этих соотношений удобно воспользоваться методом Галёркина, используя в качестве проекторов части амплитуд нормальных мод $\cos(a_m z)$, $m = \overline{1, N}$, обладающие свойством ортогональности относительно скалярного произведения в L_2 :

$$\left(\cos(a_m z), \cos(a_n z) \right) \Big|_{L_2} = \delta_{mn} \frac{h}{2},$$

здесь δ_{mn} — символ Кронекера.

В результате дискретизации получим систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных коэффициентов $\mathbf{c} = (c_1^-, c_2^-, \dots, c_N^-, c_1^+, c_2^+, \dots, c_N^+)^T$:

$$A\mathbf{c} = \mathbf{f}. \quad (5)$$

Матрица A этой системы имеет вид $A = B + D$, где

$$B = \begin{pmatrix} B_1^- & B_1^+ \\ B_2^- & B_2^+ \end{pmatrix}, \quad D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$B_{1,mn}^\mp = \left(\cos(a_m z), \frac{\partial u_{F,n}^\mp}{\partial x} \right) \Big|_{x=-b},$$

$$B_{2,mn}^\mp = \left(\cos(a_m z), \frac{\partial u_{F,n}^\mp}{\partial x} \right) \Big|_{x=b},$$

E — единичная матрица порядка N . Правая часть \mathbf{f} системы (5) имеет следующий вид:

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^1, \quad \mathbf{f}^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1^0 \\ \mathbf{f}_2^0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_{1,m}^0 = - \left(\cos(a_m z), \frac{\partial u_F^0}{\partial x} \right) \Big|_{x=-b},$$

$$\mathbf{f}_{2,m}^0 = - \left(\cos(a_m z), \frac{\partial u_F^0}{\partial x} \right) \Big|_{x=b},$$

а в векторе \mathbf{f}^1 ненулевым является только элемент с индексом p , совпадающим с номером набегающей волны u_0 . Ненулевой элемент в таком случае равен $\mathbf{f}_p^1 = -e^{-i\zeta_p b}/2$.

Нахождение базисных конечно-элементных решений

Область Ω разбивается на треугольные подобласти с помощью заданной сетки из N_F узлов (x_j, z_j) , $j = \overline{1, N_F}$. Обозначим левую, нижнюю, правую и оставшуюся верхнюю границу области Ω через Γ_W , Γ_S , Γ_E и Γ_N соответственно. Каждое отдельно взятое конечно-элементное решение \hat{u}_F из набора $u_{F,n}^\mp$ и u_F^0 удовлетворяет уравнению (1) внутри области Ω , граничным условиям (2) на верхней и нижней границах Γ_N и Γ_S , а также граничным условиям (3) на левой и правой границах Γ_W и Γ_E . Решение представляется в виде разложения по N_F глобальным базисным функциям $\phi_j(x, z)$, имеющим вид линейного многочлена, значения которого равно единице в узле с индексом j и нулю — во всех остальных узлах расчётной области

$$\hat{u}_F = \sum_{j=1}^{N_F} u_j \phi_j(x, z).$$

При подстановке приближённого решения \hat{u}_F в исходное уравнение (1) получается следующая функциональная невязка внутри области Ω :

$$R_\Omega = \Delta \hat{u}_F + \kappa^2 \hat{u}_F.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов u_j проводится дискретизация с помощью метода Галёркина:

$$(R_\Omega, \phi_k) = 0, \quad k = \overline{1, N_F}.$$

При подстановке в это выражение невязки R_Ω и последующем ослаблении гладкости подынтегральных функций с помощью первой фор-

мулы Грина, получаются следующие соотношения:

$$\sum_{j=1}^{N_F} u_j \left[- \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \phi_j}{\partial x} \frac{\partial \phi_k}{\partial x} + \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \frac{\partial \phi_k}{\partial z} \right) d\Omega + \right. \\ \left. + \kappa^2 \iint_{\Omega} \phi_j \phi_k d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi_j}{\partial \mathbf{n}} \phi_k d\Gamma \right] = 0. \quad (6)$$

Данные соотношения порождают систему N_F линейных алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{N_F})^T$

$$\mathbf{S}\mathbf{u} = \mathbf{b}. \quad (7)$$

При учёте граничных условий интеграл по границе Γ в выражениях (6) равен нулю на верхней границе Γ_N , на остальных же границах его вклад в систему (7) не учитывается, поскольку смещения u_j заданы явно условиями (3). Для учёта этих условий все элементы s_{kj} строк матрицы \mathbf{S} с теми индексами k , узлы сетки которых (x_k, z_k) выходят на границы Γ_W , Γ_S и Γ_E , заменяются на

$$s_{kj} = \delta_{kj},$$

а соответствующие им элементы правой части b_k выбираются равными заданным значениям на границе в соответствии с условиями (3). Поскольку у всех отдельно взятых конечно-элементных решений \hat{u}_F глобальные матрицы жёсткости равны между собой, для решения системы (7) достаточно обратить глобальную матрицу жёсткости \mathbf{S} один раз, например с помощью метода ортогонализации Грама–Шмидта.

Верификация схемы и численные примеры

Для верификации работы гибридной схемы проведено сопоставление результатов, полученных в рамках описываемого подхода (МКЭ-Ан) и при помощи конечно-элементного пакета COMSOL (МКЭ-ИСС), где бесконечная область волновода ограничена с помощью метода идеально согласованных слоев, а базисные функции имеют вид квадратичного многочлена.

В качестве примера локальной неоднородности рассматривается выемка полуширины

d_1 и глубины d_2 (рис. 1б). Все численные результаты приводятся в безразмерном виде в базовых единицах, выраженных через длину $l_0 = h$ и скорость $v_0 = c$. В этих единицах безразмерная круговая частота $\omega = 2\pi f l_0 / v_0$, где f — размерная частота в герцах. Расчёты проведены для волновода со следующими безразмерными параметрами: толщина слоя $h = 1$, полуширина области Ω $b = 1$, полуширина выемки $d_1 = 0,5$, глубина выемки $d_2 = 0,3$, скорость распространения волн $c = 1$. Для набегающей волны u_0 выбран номер моды $p = 1$, а разложение производилось по $N = 6$ модам. Конечно-элементная сетка строилась с помощью пакета COMSOL.

Уменьшение размера конечного элемента для подходов МКЭ-ИСС и МКЭ-Ан способствует повышению точности решений, но существенно увеличивает время расчёта. Однако точность решения МКЭ-Ан можно заметно повысить, если дополнительно измельчить сетку на вертикальных границах $x = \mp b$ стыка подобластей Ω и D^+ (рис. 2). Это обусловлено необходимостью вычисления большого количества интегралов по этим границам при построении матрицы \mathbf{A} системы (5), возникающих в связи с условиями (3).

Сопоставление результатов, полученных в рамках МКЭ-Ан и МКЭ-ИСС, иллюстрируется графиком зависимости коэффициента прохождения энергии $\kappa^+ = E^+ / E_0$ от частоты ω (рис. 2а), где E^+ — усредненное за период колебаний количество волновой энергии, проходящее через поперечное сечение волновода правее препятствия, а E_0 — энергия набегающей волны. Решение, полученное в рамках подхода МКЭ-Ан с измельчением сетки на вертикальных границах $x = \mp b$ (сплошная линия), хорошо согласуется с МКЭ-ИСС решением (маркеры). Однако решение МКЭ-Ан без дополнительного измельчения сетки (пунктирная линия) расходится с МКЭ-ИСС решением с ростом частоты ω . Например, расхождение заметно на частоте $\omega = 3,25\pi$, для которой на рис. 2б приводятся сопоставление графиков модуля комплексной амплитуды колебаний $|u|$, построенных вдоль прямой $z = -0,5$. Как и в предыдущем случае, решение МКЭ-Ан для измельчённой сетки согласуется с решением МКЭ-ИСС лучше, чем МКЭ-Ан без измельчения, что заметно не только вблизи вертикальных границ $x = \mp b$ области Ω , но и практически на всей её протяжённости.

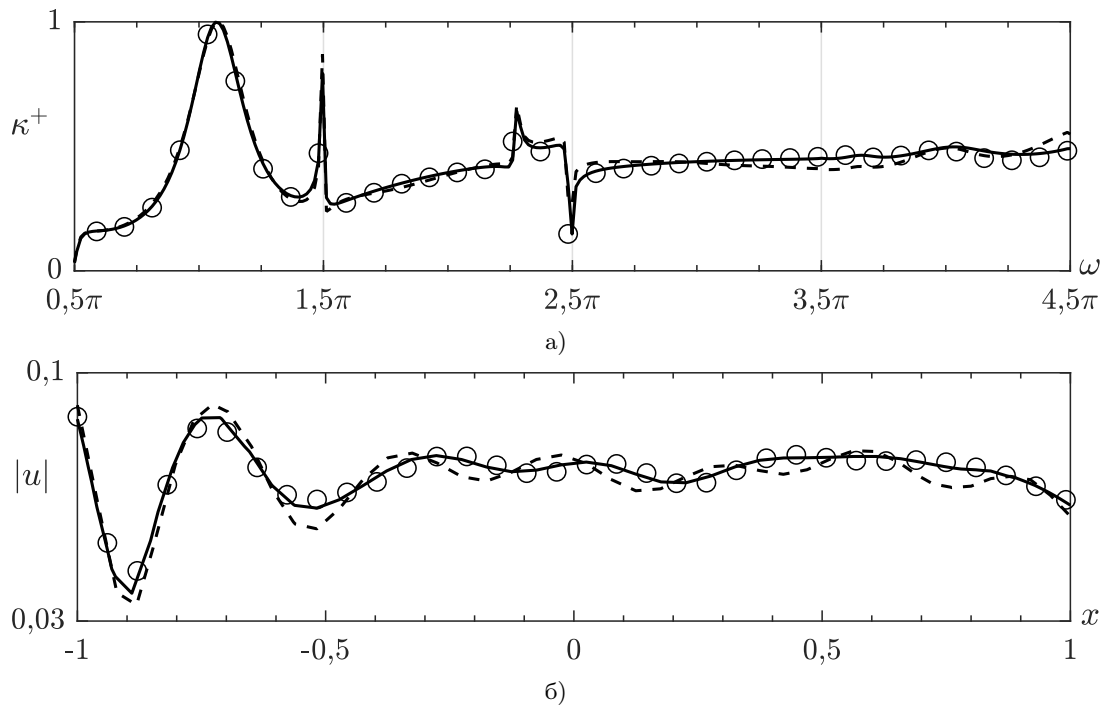


Рис. 2. а) Частотный спектр коэффициента прохождения κ^+ ; б) амплитуда колебаний $|u|$ при круговой частоте $\omega = 3,25\pi$ вдоль прямой $z = -0,5$. Маркерами показаны результаты МКЭ-ИСС, сплошной линией — МКЭ-Ан с измельчённой сеткой на вертикальных границах $x = \mp b$, пунктирной линией — МКЭ-Ан без измельчения. Вертикальными линиями показаны частоты отсечки

Реализованный МКЭ-Ан пакет позволяет проводить параметрический анализ зависимости характеристик волнового поля, таких как коэффициент прохождения энергии κ^+ , от различных свойств среды и геометрии препятствия. Пример такого анализа для различных глубин d_2 прямоугольной выемки приводится на рис. 3. С углублением препятствия снижается количество энергии, проходящей через зону неоднородности. Это особенно характерно в одномодовом режиме $0,5\pi < \omega < 1,5\pi$, где наблюдается практически полное заграждение волновода при достижении глубиной

выемки значений, превышающих половину его толщины $d_2 > h/2$. Но исключением являются резкие скачки амплитудной кривой, соответствующие резонансным частотам, на которых энергия бегущей волны проходит область с препятствием Ω , практически не отражаясь. Несмотря на то, что установившиеся колебания — не реализуемая на практике абстракция, подобный эффект был экспериментально подтвержден [10, 11]. Самый ярко выраженный скачок находится в районе резонансной частоты $\omega = \pi$, растущей с углублением выемки d_2 . Менее выраженный

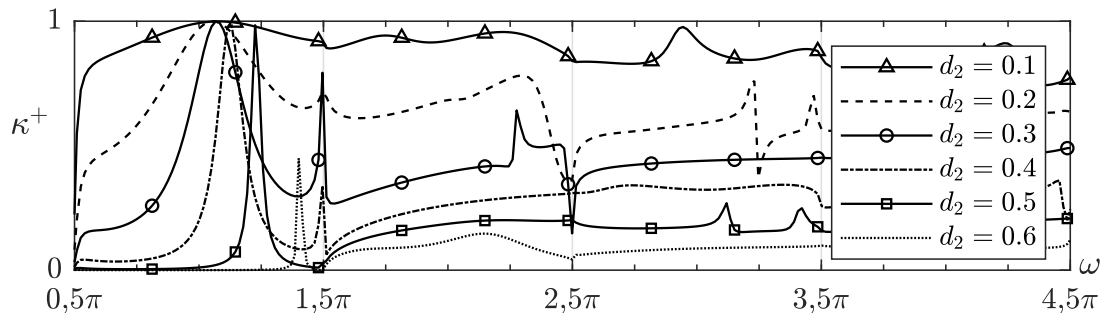


Рис. 3. Зависимость коэффициента прохождения κ^+ от круговой частоты ω , параметризованная по глубине d_2 прямоугольной выемки. Вертикальными линиями обозначены частоты отсечки

скачок, не зависящий от глубины d_2 , находится в районе второй частоты отсечки $\omega = 1,5\pi$. В многомодовом диапазоне резонансные частоты присущи лишь некоторым глубинам d_2 , а соответствующие им скачки малы по амплитуде и встречаются парами. Например, два таких скачка расположены перед четвёртой частотой отсечки $\omega = 3,5\pi$ на глубине $d_2 = 0,2$ (пунктир), однако на соседних глубинах $d_2 = 0,2 \mp 0,1$ (сплошные линии с треугольными и круглыми маркерами) они уже отсутствуют.

Заключение

Собственная реализация гибридной схемы без использования коммерческих пакетов предполагает большую предварительную работу, но позволяет избежать дополнительных вычислительных затрат. Так, в представленной ранее гибридной схеме [9], основанной на коммерческих МКЭ-пакетах, конечно-элементные поля $u_{F,n}^\mp$ и u_F^0 необходимо рассчитывать независимо, обращаясь к МКЭ-пакету $2N + 1$ раз для расчёта базисных волновых полей.

Корректность работы алгоритма подтверждена тестовыми сравнениями. Проиллюстрировано использование пакета для расчёта как волновых полей, так и их характеристик, таких как коэффициент прохождения энергии. Также продемонстрирована возможность проведения параметрического анализа зависимости характеристик волнового поля от различных свойств среды и геометрии неоднородности.

Авторы благодарят проф. Е. В. Глушкова за руководство и ценные замечания.

Литература

1. Боголюбов А. Н., Боголюбов Н. А., Свешников А. Г. Математическое моделирование волноведущих систем методом конечных разностей и конечных элементов // Физические основы приборостроения. 2013. Т. 2. № 1. С. 10–17.
2. Giurgiutiu V. Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors (2nd Edition). Elsevier Academic Press, 2014.
3. Atluri S. N., Shen Sh. The meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method: a simple and less costly alternative to the finite element and boundary element methods // Comput Model. Eng. Sci. 2002. Vol. 3. № 1. P. 11–51.

4. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
5. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Еремин А. А., Михасьжив В. В. Метод слоистых элементов в динамической теории упругости // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 4. С. 622–634.
6. Shen Y., Giurgiutiu V. Effective non-reflective boundary for Lamb waves: Theory, finite element implementation, and applications // Wave Motion. 2015. Vol. 58. P. 22–41.
7. Berenger J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves // J. Computational Physics. 1994. Vol. 114(2). P. 185–200.
8. Joly P. An elementary introduction to the construction and the analysis of perfectly matched layers for time domain wave propagation // SeMA J. 2012. Vol. 57. P. 5–48.
9. Глушков Е. В., Глушкова Н. В., Евдокимов А. А. Гибридная численно-аналитическая схема для расчёта дифракции упругих волн в локально неоднородных волноводах // Акустический журнал. 2018. Т. 64. № 1. С. 3–12.
10. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Golub M. V., Moll J., Fritzen C.-P. Wave energy trapping and localization in a plate with a delamination // Smart Materials and Structures J. 2012. Vol. 21. № 12.
11. Glushkov E. V., Glushkova N. V., Eremin A. A., Lammering R. Trapped mode effects in notched plate-like structures // Sound and Vibration J. 2015. Vol. 358. P. 142–151.

References

1. Bogolyubov, A. N., Bogolyubov, N. A., Sveshnikov, A. G. Matematicheskoye modelirovaniye volnovvedushchikh sistem metodom konechnykh raznostey i konechnykh elementov [Mathematical modeling of waveguide systems by the method of finite differences and finite elements]. Fizicheskiye osnovy priborostroyeniya [Physical Foundations of Instrument Making], 2013, vol. 2, no. 1. pp. 10–17. DOI: 10.25210/jfop-1301-010017 (In Russian)
2. Giurgiutiu, V. Structural Health Monitoring with Piezoelectric Wafer Active Sensors (2nd Edition). Elsevier Academic Press, 2014. DOI: 10.1016/C2013-0-00155-7
3. Atluri, S. N., Shen, Sh. The meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method: a simple and less costly alternative to the finite element and boundary element methods. Comput Model. Eng. Sci., 2002, vol. 3, no. 1, pp. 11–51. DOI: 10.3970/cmcs.2002.003.011
4. Brebbia, C. A., Telles, J. C. F., Wrobel, L. C. Boundary Element Techniques: Theory and Applications in Engineering. Berlin etc.: Springer, 1984. DOI: 10.1007/978-3-642-48860-3

5. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V., Eremin, A. A., Mikhaskiv, V. V. The layered element method in the dynamic theory of elasticity. *J. Applied Mathematics and Mechanics*, 2009, vol. 73, iss. 4, pp. 449–456. DOI: 10.1016/j.jappmathmech.2009.08.005
6. Shen, Y., Giurgiutiu, V. Effective non-reflective boundary for Lamb waves: Theory, finite element implementation, and applications. *Wave Motion*, 2015, vol. 58, pp. 22–41. DOI: 10.1016/j.wavemoti.2015.05.009
7. Berenger, J.-P. A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves. *J. Computational Physics*, 1994, vol. 114(2), pp. 185–200. DOI: 10.1006/jcph.1994.1159
8. Joly, P. An elementary introduction to the construction and the analysis of perfectly matched layers for time domain wave propagation. *SeMA J.*, 2012, vol. 57, pp. 5–48. DOI: 10.1007/BF03322599
9. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V., Evdokimov, A. A. Gibrinaya chislenno-analiticheskaya skhema dlya rascheta difraktsii uprugikh voln v lokal'no neodnorodnykh volnovodakh [Hybrid numerical-analytical scheme for calculating the diffraction of elastic waves in locally inhomogeneous waveguides]. *Akusticheskiy zhurnal* [Acoustic journal], 2018, vol. 64, no. 1, pp. 3–12. DOI: 10.7868/S0320791918010082
10. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V., Golub, M. V., Moll, J., Fritzen, C.-P. Wave energy trapping and localization in a plate with a delamination. *Smart Materials and Structures J.*, 2012, vol. 21, no. 12. DOI: 10.1088/0964-1726/21/12/125001
11. Glushkov, E. V., Glushkova, N. V., Eremin, A. A., Lammering, R. Trapped mode effects in notched plate-like structures. *Sound and Vibration J.*, 2015, vol. 358, pp. 142–151. DOI: 10.1016/j.jsv.2015.08.007

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2020

© Новиков О. И., Евдокимов А. А., 2020

Статья поступила 31 мая 2020 г.