

МЕХАНИКА

УДК 593.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-2-57-65

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО СТЕРЖНЯ

Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д. В.

NON-STATIONARY LONGITUDINAL VIBRATIONS
OF AN ELECTROMAGNETOELASTIC RODThong D. Pham¹, D. V. Tarlakovskii^{1,2}¹ Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993, Russia² Institute of Mechanics Lomonosov Moscow University, Moscow, 119192, Russia
e-mail: dtstudio.pro@gmail.com

Abstract. The coupled non-stationary longitudinal vibrations of electromagnetoelastic rods are investigated. It is assumed that the material of the rod is a homogeneous isotropic conductor. The equations used take into account the initial electromagnetic field, the Lorentz force, Maxwell's equations and the generalized Ohm's law. They are obtained as a special case of the corresponding relations for thin electromagnetoelastic shells under the assumption that the desired functions depend only on the longitudinal coordinate.

Two variants of the rods are considered: the infinite rod under the condition that the desired functions are limited and the finite rod with fixed and isolated end cross sections. In the initial electromagnetic field, only the magnetic field strength differs from zero. The solution is presented in integral form with kernels in the form of Green functions. To determine the kernels, the Laplace transform in time and the Fourier transform or trigonometric series in the longitudinal coordinate are used. Explicit forms of solutions are obtained when the transverse compression is ignored and under the conditions of a quasi-static perturbed electromagnetic field. Examples of calculations are provided.

Keywords: coupled non-stationary electromagnetoelasticity, rod, longitudinal vibrations, Green functions, Laplace transforms, Fourier transforms, trigonometric series.

Введение

Исследованию продольных колебаний стержней посвящена обширная литература, например [1–6]. Однако в этих работах, в основном, рассматриваются гармонические процессы, и они направлены на исследование неоднородности материала и переменной геометрии. В то же время учету связанности деформаций с полями другой физической природы, тем более в нестационарной постановке, посвящено ограниченное число статей. Например, результаты исследования некоторых аспектов связанных задач электромагнитоупругости приведены в статьях [7–9]. В работе [7] поставлена и решена задача о колебаниях упругого электропроводного стержня

с учетом продольной составляющей магнитной силы. В статье [8] рассмотрены задачи о вынужденных продольных колебаниях продольно поляризованного пьезокерамического стержня при двух вариантах условий на боковых поверхностях: они являются свободными или на них заданы условия стесненного деформирования в поперечных направлениях. В [9] показано, что уравнения движения, управляющие свободными продольными колебаниями неоднородного пьезоэлектрического стержня, для двух специальных вариаций площади поперечного сечения могут быть сведены к тем, которые могут быть решены аналитически с помощью подходящих переменных подстановок. Получены точные аналитические

Фам Дык Тхонг, аспирант кафедры «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института (национальный исследовательский университет); e-mail: dtstudio.pro@gmail.com.

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний, научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, заведующий кафедрой «Сопrotивление материалов, динамика и прочность машин» Московского авиационного института (национальный исследовательский университет); e-mail: tdvhome@mail.ru.

ческие решения для определения продольных собственных частот и форм мод для неоднородного стержня.

В данной работе рассматривается задача о нестационарных связанных продольных колебаниях электромагнитоупругого стержня.

1. Постановка задачи

В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ рассматривается нестационарное продольное движение прямолинейного с осью Ox однородного изотропного электромагнитоупругого стержня при отсутствии начального электрического поля. Начальные условия полагаются нулевыми. Соответствующие уравнения записываются в пространстве преобразований Лапласа [11] по времени (верхний индекс « L » указывает на изображение; s — параметр) как частный случай построенных в [10] общих уравнений для тонкой оболочки

$$\begin{aligned} s^2 u^L &= \frac{\partial^2 u^L}{\partial x^2} + \zeta \frac{\partial \psi_3^L}{\partial x} - \alpha \gamma H_0 (H_0 u^L + e_3^L) + q_{*1}^L, \\ s^2 \psi_3^L &= \eta^{-2} \frac{\partial^2 \psi_3^L}{\partial x^2} - r^{-2} \left(\zeta \frac{\partial u^L}{\partial x} + \psi_3^L \right) + \\ &+ \alpha \frac{H_0^2 \gamma s}{s + \gamma} \left(\frac{\partial \psi_3^L}{\partial x} - s \psi_3^L \right) + m_*^L, \quad (1.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_2^L}{\partial x} &= \eta_e^2 [(s + \gamma) e_3^L + \gamma s H_0 u^L], \\ \frac{\partial e_3^L}{\partial x} &= s h_2^L + \frac{\gamma s}{s + \gamma} H_0 \psi_3^L, \quad (1.2) \end{aligned}$$

где u — продольное перемещение; ψ_3 — обжатие (деформация в направлении Oz); e_3 — изменение напряженности электрического и магнитного полей на оси стержня в направлении Oz ; H_0 и h_2 — напряженность начального магнитного поля и ее изменение на оси вдоль Oy ; q_{*1} и m_* — внешние погонные нагрузка и дополнительная моментная характеристика в плоскости Oxy .

К замкнутой системе уравнений (1.1)–(1.2) добавляются соотношения для дополнительных характеристик возмущенного элек-

тромагнитного поля на оси стержня

$$\begin{aligned} \chi_1^L &= \frac{\gamma s}{s + \gamma} H_0 \psi_3^L, \quad y_3^L = e_3^L + s H_0 u^L, \\ v_1^L &= -\frac{s^2}{s + \gamma} H_0 \psi_3^L, \\ \lambda_e^L &= H_0 \frac{\gamma s}{s + \gamma} \frac{\partial \psi_3^L}{\partial x}, \quad (1.3) \end{aligned}$$

где y_3 — плотность тока в направлении оси Oz ; χ_1 , v_1 и λ_e — значения производных по координате z от напряженности электрического поля, плотности тока в направлении оси Ox и плотности зарядов.

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины (при одинаковом начертании штрихом обозначены размерные параметры):

$$\begin{aligned} x &= \frac{x'}{L}, \quad \tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \\ q_{*1} &= \frac{q'_{*1} L}{(\lambda + 2\mu) h}, \quad m_* = \frac{m'_{*} L^2}{(\lambda + 2\mu) I}, \\ I &= \frac{h^3}{12}, \quad r^2 = \frac{I}{L^2 h}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \\ \zeta &= \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} = 1 - \frac{2}{\eta^2}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu}{\rho}, \\ e_3 &= \frac{e'_3}{E_*}, \quad h_2 = \frac{h'_2 \mu_e c_1}{c E_*}, \quad H_0 = \frac{H'_0 \mu_e c_1}{c E_*}, \\ \eta_e &= \frac{c_1}{c_e}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon_e E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \\ \gamma &= \frac{4\pi\sigma L}{\varepsilon_e c_1}, \quad c_e^2 = \frac{c^2}{\mu_e \varepsilon_e}, \quad y_3 = \frac{y'_3}{\sigma E_*}, \\ \chi_1 &= \frac{\chi'_1 L}{E_*}, \quad v_1 = \frac{v'_1 L}{\sigma E_*}, \quad \lambda'_e = \frac{4\pi \lambda_e L^2}{\varepsilon_e E_*}, \end{aligned}$$

где t — время; L и E_* — некоторые характерные линейный размер и напряженность электрического поля; λ , μ — упругие постоянные Ламе; h — высота поперечного сечения стержня; ρ — плотность материала; σ , ε_e и μ_e — коэффициенты электропроводности, диэлектрической и магнитной проницаемости материала.

Для выделения единственного решения уравнений (1.1)–(1.2) необходимо добавить дополнительные условия, которые существенно связаны протяженностью стержня. Далее рассмотрим два варианта: бесконечный и конечный стержни.

2. Бесконечный электромагнитоупругий стержень

В этом случае дополнительным является условие ограниченности искомых функций. Для построения решения к системе уравнений (1.1), (1.2) применяем преобразование Фурье [11] по координате x (верхний индекс « F » указывает на изображение; q — соответствующий параметр):

$$(k_1^2 + \alpha\gamma H_0^2 s) u^{FL} + iq\zeta\psi_3^{FL} + \alpha\gamma H_0 e_3^{FL} = q_{*1}^{FL},$$

$$\begin{aligned} & [(k_2^2 + \eta^2 r^{-2})(s + \gamma) + \\ & \quad + \alpha H_0^2 \eta^2 \gamma s (iq + s)] \psi_3^{FL} - \\ & \quad - iq\zeta\eta^2 r^{-2} (s + \gamma) u^{FL} = \eta^2 (s + \gamma) m_*^L, \end{aligned}$$

$$\eta_e^2 \gamma s H_0 u^{FL} + \eta_e^2 (s + \gamma) e_3^{FL} + iq h_2^{FL} = 0,$$

$$\gamma s H_0 \psi_3^{FL} + iq (s + \gamma) e_3^{FL} + s_e^2 h_2^{FL} = 0,$$

где

$$k_1 = \sqrt{q^2 + s^2}, \quad k_2 = \sqrt{q^2 + \eta^2 s^2},$$

$$s_e = \sqrt{s(s + \gamma)}, \quad \text{Re } \sqrt{\cdot} > 0.$$

Исключая из этой системы уравнений функции e_3^{FL} и h_2^{FL} , получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$a_{11}(q, s) u^{FL} + a_{12}(q, s) \psi_3^{FL} = (s + \gamma) k_e^2 q_{*1}^{FL},$$

$$\begin{aligned} a_{21}(q, s) u^{FL} + a_{22}(q, s) \psi_3^{FL} = \\ = \eta^2 (s + \gamma) m_*^{FL}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(q, s) = a_{11}(q, s) = \\ = (s + \gamma) [k_1^2 k_e^2 + \alpha\gamma s H_0^2 (q^2 + \eta_e^2 s_e^2 - \gamma\eta_e^2 s)], \end{aligned}$$

$$a_{12}(q, s) = iq [\zeta (s + \gamma) k_e^2 + \alpha\gamma^2 H_0^2 s],$$

$$a_{21}(q, s) = -ir^{-2} \zeta \eta^2 (s + \gamma) q,$$

$$\begin{aligned} a_{22}(q, s) = (s + \gamma) (k_2^2 + \eta^2 r^{-2}) + \\ + \alpha\eta^2 H_0^2 \gamma s (iq + s). \end{aligned}$$

Ее решение записываем в виде

$$u^{FL} = G_{uq}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + G_{um}^{FL}(q, s) m_*^{FL},$$

$$\begin{aligned} \psi_3^{FL} = \\ = G_{\psi_3q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + G_{\psi_3m}^{FL}(q, s) m_*^{FL}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где

$$G_{uq}^{FL}(q, s) = \frac{(s + \gamma) k_e^2 a_{22}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$G_{um}^{FL}(q, s) = -\frac{\eta^2 (s + \gamma) a_{12}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$G_{\psi_3q}^{FL}(q, s) = -\frac{(s + \gamma) k_e^2 a_{21}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$G_{\psi_3m}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 (s + \gamma) a_{11}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$D(q, s) = a_{11}(q, s) a_{22}(q, s) - a_{12}(q, s) a_{21}(q, s).$$

Аналогичным образом можно представить остальные искомые функции:

$$e_3^{FL} = G_{e_3q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + G_{e_3m}^{FL}(q, s) m_*^{FL},$$

$$h_2^{FL} = G_{h_2q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + G_{h_2m}^{FL}(q, s) m_*^{FL},$$

$$\begin{aligned} \chi_1^{FL} = G_{\chi_1q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + \\ + G_{\chi_1m}^{FL}(q, s) m_*^{FL}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$y_3^{FL} = G_{y_3q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + G_{y_3m}^{FL}(q, s) m_*^{FL},$$

$$v_1^{FL} = G_{v_1q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + G_{v_1m}^{FL}(q, s) m_{*1}^{FL},$$

$$\lambda_e^{FL} = G_{\lambda_eq}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL} + G_{\lambda_em}^{FL}(q, s) m_*^{FL},$$

где

$$\begin{aligned} G_{e_3q}^{FL}(q, s) = \\ = -\frac{\gamma s H_0}{D(q, s)} [\eta_e^2 s_e^2 a_{22}(q, s) + iq a_{21}(q, s)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{e_3m}^{FL}(q, s) = \\ = \frac{\eta_e^2 \gamma s H_0}{k_e^2 D(q, s)} [\eta_e^2 s_e^2 a_{12}(q, s) + iq a_{11}(q, s)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{h_2q}^{FL}(q, s) = \\ = \frac{\eta_e^2 \gamma s_e^2 H_0}{D(q, s)} [a_{21}(q, s) + iq a_{22}(q, s)], \end{aligned}$$

$$G_{h_2m}^{FL}(q, s) = -\frac{\eta^2 \eta_e^2 \gamma s_e^2 H_0}{k_e^2 D(q, s)} [a_{11}(q, s) + iqa_{12}(q, s)],$$

$$G_{\chi_1q}^{FL}(q, s) = -\frac{\gamma H_0 s k_e^2 a_{21}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$G_{\chi_1m}^{FL}(q, s) = \frac{\eta^2 \gamma s H_0 a_{11}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$G_{v_1q}^{FL}(q, s) = \frac{H_0 s^2 k_e^2 a_{21}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$G_{v_1m}^{FL}(q, s) = -H_0 \frac{\eta^2 s^2 a_{11}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$G_{\lambda_e q}^{FL}(q, s) = \frac{iH_0 q \gamma s k_e^2 a_{21}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$G_{\lambda_e m}^{FL}(q, s) = -\frac{iH_0 q \gamma s \eta^2 a_{11}(q, s)}{D(q, s)},$$

$$G_{y_3q}^{FL}(q, s) = \frac{sH_0}{D(q, s)} \times [(s + \gamma)(q^2 + s^2 \eta_e^2) a_{22}(q, s) - \gamma iqa_{21}(q, s)],$$

$$G_{y_3m}^{FL}(q, s) = \frac{sH_0 \eta^2}{k_e^2 D(q, s)} \times [\gamma iqa_{11}(q, s) - (s + \gamma)(q^2 + s^2 \eta_e^2) a_{12}(q, s)].$$

Здесь $G_{aq}^{FL}(q, s)$ и $G_{am}^{FL}(q, s)$, ($a = u, \psi_3, e_3, h_2, \chi_1, v_1, y_3, \lambda_e$) — изображения функций влияния.

Оригиналы преобразования Лапласа находятся достаточно просто, поскольку изображения функций влияния являются рациональными функциями параметра s . Однако аналитическое обращение преобразования Фурье при этом невозможно. Попытка численного обращения не приводит к удовлетворительному результату из-за наличия быстро осциллирующих функций. Поэтому далее используем упрощенную модель стержня. А именно, аналогично [15] полагаем, что электромагнитное поле является квазистационарным, т.е.

$$\eta_e^2 = 0. \quad (2.3)$$

Кроме того, пренебрегаем обжатием стержня, что эквивалентно равенству

$$\psi_3 = 0. \quad (2.4)$$

Соответствующий результат проще получить, если с использованием (2.3) и (2.4) исключить из (2.1), (2.2) величину m_*^{FL} ,

$$u^{FL} = \Gamma_{uq}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL},$$

$$\Gamma_{uq}^{FL}(q, s) = \frac{1}{k_1^2 + \beta_0 s}, \quad (2.5)$$

$$\beta_0 = \alpha \gamma H_0^2,$$

$$y_3^{FL} = \Gamma_{y_3q}^{FL}(q, s) q_{*1}^{FL}, \Gamma_{y_3q}^{FL}(q, s) = sH_0 \Gamma_{uq}^{FL}(q, s),$$

$$e_3^{FL} = h_2^{FL} = \chi_1^{FL} = v_1^{FL} = \lambda_e^{FL} = 0.$$

Здесь $\Gamma_{uq}^{FL}(q, s)$ и $\Gamma_{y_3q}^{FL}(q, s)$ — изображения функций влияния для упрощенной модели. Соответствующий оригиналы находим последовательным обращением преобразований Фурье и Лапласа [11–13]:

$$\Gamma_{uq}(x, \tau) = \frac{1}{2} e^{-\beta_0 \tau / 2} I_0 \times \left[\frac{\beta_0}{2} \sqrt{\tau^2 - x^2} \right] H(\tau - |x|), \quad (2.6)$$

$$\Gamma_{y_3q}(x, \tau) = \Gamma_{y_3qr}(x, \tau) + \frac{H_0}{2} e^{-\beta_0 |x|/2} \delta(\tau - |x|),$$

$$\Gamma_{y_3qr}(x, \tau) = \frac{\beta_0 H_0}{4} e^{-\beta_0 \tau / 2} \times \left[\frac{\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}} I_1 \left(\frac{\beta_0}{2} \sqrt{\tau^2 - x^2} \right) - I_0 \left(\frac{\beta_0}{2} \sqrt{\tau^2 - x^2} \right) \right],$$

где $I_\nu(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка ν [11], $H(\tau)$ — функция Хевисайда, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака.

Оригинал нетривиальных функций согласно (2.5) записывается следующим образом (звездочки обозначают свертки по времени и координате):

$$u(x, \tau) = \Gamma_{uq}(x, \tau) * * q_{*1}(x, \tau),$$

$$y_3(x, \tau) = \Gamma_{y_3q}(x, \tau) * * q_{*1}(x, \tau).$$

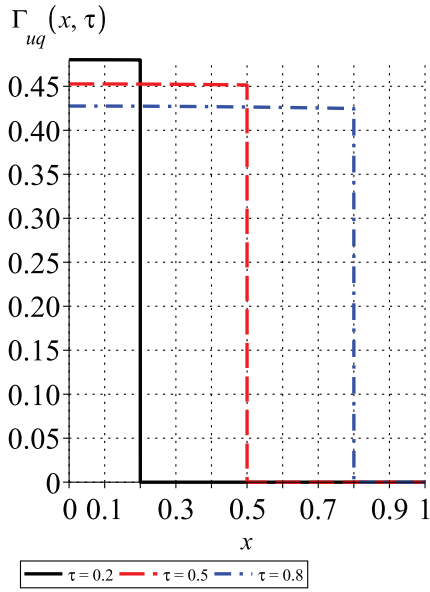


Рис. 1. Зависимости $\Gamma_{uq}(x, \tau)$ от x

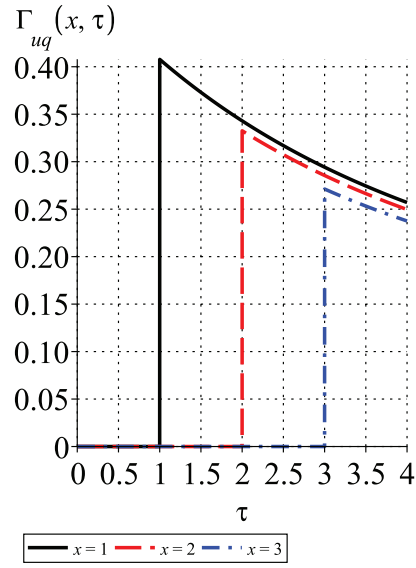


Рис. 2. Зависимости $\Gamma_{uq}(x, \tau)$ от τ

3. Конечный электромагнитоупругий стержень

Здесь рассматриваем стержень единичной длины с закрепленными концевыми сечениями, что соответствует следующим граничным условиям:

$$u|_{x=0} = u|_{x=1} = 0.$$

При этом используем предположения (2.3) и (2.4).

Для решения этой задачи раскладываем искомые функции и внешнюю нагрузку в тригонометрические ряды Фурье:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\tau) \sin \lambda_n x, \\ y_3(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n(\tau) \sin \lambda_n x, \\ q_{*1}(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} q_n(\tau) \sin \lambda_n x, \\ \lambda_n &= \pi n. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Подставляя ряды (3.1) в (1.1), (1.2), (1.3), с учетом (2.3) и (2.4) получаем

$$u_n^L = \Lambda_{un}^L(s) q_n^L, \quad \Lambda_{un}^L(s) = \frac{1}{k_{1n}^2 + \beta_0 s},$$

$$k_{1n}^2 = k_1^2 (\lambda_n^2, s^2),$$

$$y_n^L = \Lambda_{yn}^L(s) q_n^L, \quad \Lambda_{yn}^L(s) = s H_0 \Lambda_{un}^L(s). \quad (3.2)$$

Коэффициенты рядов (3.1) в соответствии с (3.2) определяются в виде

$$\begin{aligned} u_n(\tau) &= \Lambda_{un}(\tau) * q_n(\tau), \\ y_n(\tau) &= \Lambda_{yn}(\tau) * q_n(\tau). \end{aligned}$$

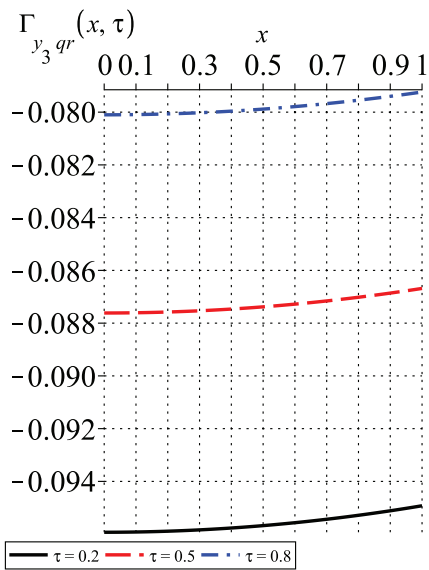
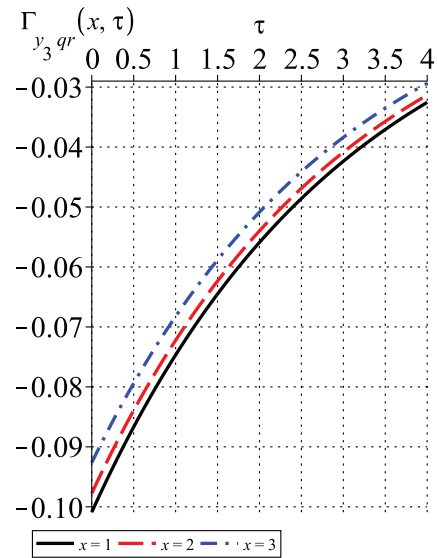
Оригинал ядра этой свертки находится достаточно просто [13],

$$\begin{aligned} \Lambda_{un}(\tau) &= \frac{\sin \mu_n \tau}{\mu_n} e^{-\beta_0 \tau / 2} H(\tau), \\ \mu_n &= \sqrt{\lambda_n^2 - \beta_0^2 / 4}, \\ \Lambda_{yn}(\tau) &= H_0 \left(\cos \mu_n \tau - \beta_0 \frac{\sin \mu_n \tau}{2\mu_n} \right) \times \\ &\quad \times e^{-\beta_0 \tau / 2} H(\tau). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь учтено, что для реальных материалов при любых $n \geq 1$ выполняется неравенство $\lambda_n > \beta_0$.

Подставляя равенства (3.3) в (3.1), получаем искомые оригиналы:

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{un}(\tau) * q_n(\tau) \sin \lambda_n x, \\ y_3(x, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{yn}(\tau) * q_n(\tau) \sin \lambda_n x. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рис. 3. Зависимости $\Gamma_{y_3qr}(x, \tau)$ от x Рис. 4. Зависимости $\Gamma_{y_3qr}(x, \tau)$ от τ

4. Примеры расчетов

В качестве примера рассмотрим алюминиевый стержень, материал которого характеризуется следующими величинами [15]:

$$\eta = 2,04; \quad \zeta = 0,519; \quad \gamma = 5,06; \quad \alpha = 0,0806.$$

Здесь принято $E_* = 100$ в/м и $L = 1$ м. Полагаем также, что $H_0 = 1$ и стержень имеет квадратное поперечное сечения со следующими геометрическими параметрами: $h = 0,05$ м; $r^2 = h^2 / (12L^2) = 0,208 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 1–4 приведены полученные с помощью (2.6) зависимости от координаты и времени функций влияния $\Gamma_{uq}(x, \tau)$ и $\Gamma_{y_3qr}(x, \tau)$ для бесконечного стержня при различных значениях τ и x .

Для конечного стержня рассматриваем сосредоточенную нагрузку

$$q_{*1}(x, \tau) = f(\tau) \delta(x - a), \quad 0 < a < 1.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} q_n(\tau) &= 2f(\tau) \int_0^1 \delta(x - a) \sin \lambda_n x dx = \\ &= 2f(\tau) \sin \lambda_n a. \end{aligned}$$

Подставляя эти равенства в (3.4), получаем

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{un}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n a \sin \lambda_n x, \\ y_3(x, \tau) &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_{yn}(\tau) * f(\tau) \sin \lambda_n a \sin \lambda_n x. \end{aligned}$$

Для примера положим, что нагрузка изменяется по закону $f(\tau) = H(\tau)$. В результате

$$\begin{aligned} \Lambda_{un}(\tau) * H(\tau) &= \\ &= \frac{1}{\lambda_n^2} \left[1 - \left(\frac{\beta_0}{2\mu_n} \sin \mu_n \tau + \cos \mu_n \tau \right) e^{-\beta_0 \tau / 2} \right] \times \\ &\quad \times H(\tau), \end{aligned}$$

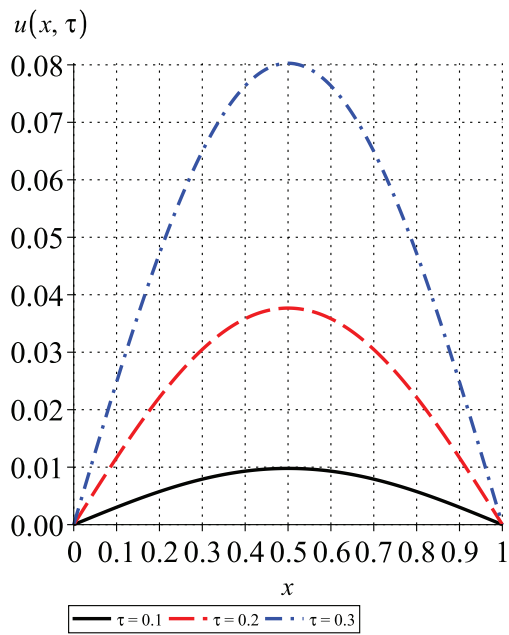
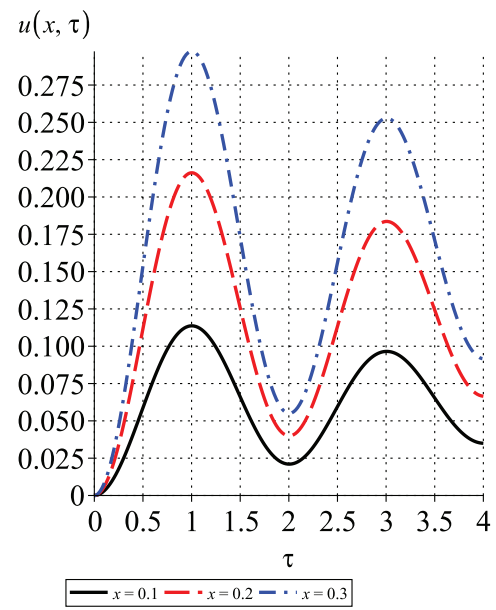
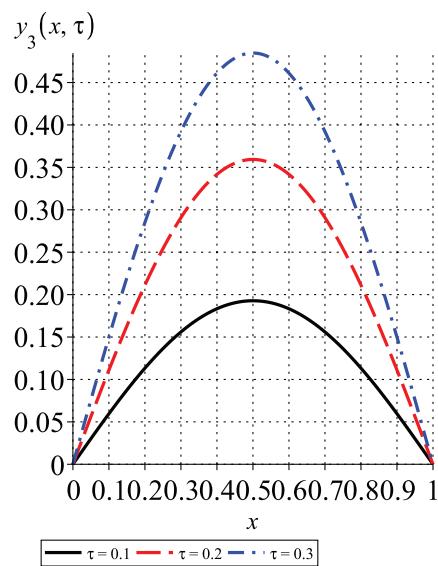
$$\Lambda_{yn}(\tau) * H(\tau) = H_0 \Lambda_{un}(\tau).$$

На рис. 5–7 изображены графики зависимости функций $u(x, \tau)$ и $y_3(x, \tau)$ от координаты и времени соответственно при различных значениях τ и x , сосредоточенной в центре стержня нагрузки ($a = 1/2$).

Отметим, что отличие результатов от чисто упругого решения в обоих вариантах имеет порядок коэффициента α , который для рассмотренного материала малый. Поэтому графики для упругого решения не приведены.

Заключение

Получено решение связанной задачи о нестационарных продольных колебаниях электромагнитоупругого стержня. Показано, что аналитическое решение возможно только при пренебрежении поперечным обжатием использованием квазистатического варианта электромагнитного поля. Установлено, что для известных материалов связанность электромагнитного и механического полей вносит в решение только качественное отличие.

Рис. 5. Зависимости $u(x, \tau)$ от x Рис. 6. Зависимости $u(x, \tau)$ от τ Рис. 7. Зависимости $y_3(x, \tau)$ от x

Литература

1. Чиркунов Ю. А. Нелинейные продольные колебания вязкоупругого стержня в модели кельвина // Прикладная математика и механика, 2015, Т. 79. № 5, С. 717–727.
2. Жуков И. А. Продольные колебания стержней применительно к ударным системам технологического назначения // Машиностроение и инженерное образование, 2016, № 1, С. 40–49.
3. Zhu X., Li L. Longitudinal and torsional vibrations of size-dependent rods via nonlocal integral elasticity // International Journal of Mechanical Sciences, 2017, vol. 133. pp. 639–650.
4. Мардонов Б. М., Рахматов Р., Рахманов А., Тангиоров А. Продольные колебания физически нелинейных стержневых систем // Знание, 2016, № 1 (30), С. 57–60.
5. Soleimani Roody B., Fotuhi A. R., Jalili M. M. Nonlinear longitudinal forced vibration of a rod undergoing finite strain // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science, 2018, vol. 232. № 12, pp. 2229–2243.
6. Пожалостин А. А., Панишина А. В. Продольные и крутильные колебания однородных стержней и валов. М.: Методические указания МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2016, 36 с.
7. Томилин А. К., Прокопенко Е. В. Продольные колебания упругого электропроводного стержня в неоднородном магнитном поле // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика, 2013, № 1 (21), С. 104–111.
8. Сдобников А. Н., Сдобников С. А. Продольные колебания пьезокерамического стержня при возбуждении электрическим полем // Инженерный вестник, 2014. № 12, С. 38.
9. Chen W. Q., Zhang C. L. Exact analysis of longitudinal vibration of a nonuniform piezoelectric rod // Second International Conference on Smart Materials and Nanotechnology in Engineering 2009, pp. 749307–7, DOI:10.1117/12.840398
10. Vestyak V. A., Tarlakovskii D. V. The model of thin electromagnetoelastic shells dynamics // Proceedings of the second international conference on theoretical, Applied and Experimental Mechanics. Structural Integrity. Springer, Nature Switzerland AG, 2019, pp. 254–258.
11. Горшков А. Г., Медведский А. Л., Рабинский Л. Н., Тарлаковский Д. В. Волны в сплошных средах. М.: Физматлит, 2004, 472 с.
12. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981 800 с.
13. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. М.: «Высшая школа», 1965, 467 с.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979, 832 с.
15. Вестяк В. А., Гачкевич А. Р., Мусий Р. С., Тарлаковский Д. В., Федотенков Г. В. Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругих телах. М.: Физматлит, 2019, 288 с.

References

1. Chirkunov, Y. A. Nelinejnye prodolnye kolebaniya vyzkoupругogo sterzhnya v modeli kelvina [Nonlinear longitudinal vibrations of a viscoelastic rod in the kelvin model]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 2015, vol. 79, no. 5, pp. 717–727. (In Russian)
2. Zhukov, I. A. Prodolnye kolebaniya sterzhnej primenitelno k udarnym sistemam tekhnologicheskogo naznacheniya [Longitudinal vibrations of the rods as applied to shock systems for technological purposes]. *Mashinostroenie i inzhenernoe obrazovanie* [Mechanical Engineering and Engineering Education], 2016, no. 1, pp. 40–49. (In Russian)
3. Zhu, X., Li, L. Longitudinal and torsional vibrations of size-dependent rods via nonlocal integral elasticity *International Journal of Mechanical Sciences*, 2017, vol. 133, pp. 639–650.
4. Mardonov, B. M., Rakhmatov, R., Rakhmanov, A., Tangirov, A. Prodolnye kolebaniya fizicheski nelinejnyh sterzhnevyyh sistem [Longitudinal vibrations of physically non-linear rod systems]. *Znanie* [Knowledge], 2016, no. 1-1 (30), pp. 57–60. (In Russian)
5. Soleimani, Roody B., Fotuhi, A. R., Jalili, M. M. Nonlinear longitudinal forced vibration of a rod undergoing finite strain. *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2018, vol. 232, no. 12, pp. 2229–2243.
6. Pozhalostin, A. A., Panshina, A. V. *Prodolnye i krutilnye kolebaniya odnorodnyh sterzhnej i valov* [Longitudinal and torsional vibrations of homogeneous rods and shafts]. MSTU named N.E. Bauman, Moscow, 2016, 36 p. (In Russian)
7. Tomilin, A. K., Prokopenko, E. V. Prodolnye kolebaniya uprugogo elektroprovodnogo sterzhnya v neodnorodnom magnitnom pole [Longitudinal vibrations of an elastic conductive rod in an inhomogeneous magnetic field]. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika* [Bulletin of Tomsk State University. Mathematics and mechanics], 2013, no. 1 (21), pp. 104–111. (In Russian)
8. Sdobnikov, A. N., Sdobnikov, S. A. Prodolnye kolebaniya pezoeramicheskogo sterzhnya pri vzbuzhdenii elektricheskim polem [Longitudi-

- nal oscillations of a piezoceramic rod when excited by an electric field]. *Inzhenernyy vestnik* [Engineering Bulletin], 2014, no. 12. p. 38. (In Russian)
9. Chen, W. Q., Zhang, C. L. Exact analysis of longitudinal vibration of a nonuniform piezoelectric rod. *Second International Conference on Smart Materials and Nanotechnology in Engineering*, 2009, pp. 749307–7. DOI: 10.1117/12.840398
 10. Vestyak, V. A., Tarlakovskii, D. V. The model of thin electromagnetoelastic shells dynamics. *Proceedings of the second international conference on theoretical, Applied and Experimental Mechanics. Structural Integrity. Springer, Nature Switzerland AG*, 2019, pp 254–258.
 11. Gorshkov, A. G., Medvedskii, A. L., Rabinskii, L. N., Tarlakovskii, D. V. *Volny v sploshnyh sredah* [Waves in continuous media]. Fizmatlit, Moscow, 2004, 472 p. (In Russian)
 12. Prudnikov, A. P., Brychkov, Y. A., Marichev, O. I. *Integraly i ryady* [Integrals and series]. Nauka, Moscow, 1981, 800 p. (In Russian)
 13. Ditkin, V. A., Prudnikov, A. P. *Spravochnik po operacionnomu ischisleniyu*. [Reference on operational calculus]. Vysshaya shkola, Moscow, 1965, 467 p. (In Russian)
 14. Abramovits, M., Stigan, I. *Spravochnik po specialnym funkciyam* [Handbook of special functions]. Nauka, Moscow, 1979, 832 p. (In Russian)
 15. Vestyak, V. A., Gachkevich, A. R., Musii, R. S., Tarlakovskii, D. V., Fedotenkov, G. V. *Dvumernye nestacionarnye volny v elektromanitouprugih telah* [Two-dimensional unsteady waves in electromagnetoelastic bodies]. Fizmatlit, Moscow, 2019, 288 p. (In Russian)

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2020

© Фам Дык Тхонг, Тарлаковский Д. В., 2020

Статья поступила 15 мая 2020 г.