ISSN 1729-5459. ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ВЕСТНИК НАУЧНЫХ ЦЕНТРОВ ЧЭС. 2020. Т. 17. № 2. С. 66–73

## Физика

УДК 530.145.81 DOI: 10.31429/vestnik-17-2-66-73

# СТРУКТУРА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

**Лебедев К. А., Тумаев Е. Н.**

STRUCTURE OF QUANTUM MECHANICS

K. A. Lebedev, E. N. Tumaev

Kuban State University, Krasnodar, Russia
e-mail: klebedev.ya@yandex.ru

*Abstract.* Interest in quantum mechanics is growing in connection with new experiments with quantum particles and a deeper knowledge of nano- and subatomic principles. The practical use of quantum mechanic methods goes in parallel with the constant rethinking of its foundations, its ideological and epistemological role. A rigorous exposition of the mathematical foundations of quantum mechanics in abstract-Hilbert spaces was given in the book of J. Von Neumann in 1932. It is the first and only experiment that has been brought to the end, the presentation of the apparatus of quantum mechanics with the sequence and rigor which usually presented in a purely mathematical theory. Later in 1949 the group of French mathematicians under the pseudonym N. Bourbaki introduced the concept of "mathematical structure" into mathematics. To date, there is no narration of quantum mechanics, where mathematical rigor is combined with the concept of "mathematical structure". In the framework of the approach formulated by the group of N. Bourbaki, quantum mechanics is a composite structure consisting of three simple mathematical structures: the Hilbert space of complex-valued vectors, the space of linear self-adjoint operators and the structure of classical mechanics are showed in this article. The work explains the construction of a physical theory based on a general mathematical approach and elucidates the minimum assumptions necessary for the development of nonrelativistic quantum mechanics by axiomatic methods.

*Keywords:* quantum mechanics, axiomatic method, mathematical structure, Hilbert space.

### Введение

Интерес к квантовой механике (КМ) растёт в связи с развитием нанотехнологий, достижений в области создания квантового компьютера, новых экспериментов с квантовыми частицами в запутанном состоянии. Развиваются исследования трансмембранного переноса квантовых частиц вдоль молекулярной цепочки [1], описания явлений конфайнмента кольца, такие как потенциалы Хилла [2]. В частности имеется важная и трудная задача Волкано, решённая пока для единственного электрона [3], хотя больший интерес представляет задача с парой частиц: электрон-дырка, электрон-электрон.

Практическое использование методов КМ идёт параллельно с постоянным переосмыслением её основ, её мировоззренческой и гносеологической роли. Известно девять интерпретаций КМ [4]. Проблема квантовых измерений остаётся труднейшей областью как с теоретической, так и практической точек зрений [5]. Тем не менее, наиболее современные и фундаментальные руководства по КМ являются сплавом формулировок на основе исторически первых интерпретаций — с акцентом на волновую функцию и матричный формализм.

Ясное, точное и глубокое понимание физических основ КМ и её интерпретаций возможно только на основе аксиоматического метода. Тонкость и глубина современных физико-математических теорий делают существенным изучение их логической и математической структуры. Строгое изложение математических основ КМ в абстрактно-гильбертовых пространствах было дано в книге Дж. Фон Неймана [6]. Оно является первым и до сих пор единственным доведённым до конца опытом изложения аппарата КМ с последовательностью и строгостью, которой обычно требуют от чисто математиче-

Лебедев Константин Андреевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры интеллектуальных и информационных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: klebedev.ya@yandex.ru.

Тумаев Евгений Николаевич, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры теоретической физики и компьютерных технологий Кубанского государственного университета; e-mail: tumaeva@bk.ru.

ских теорий. Вместе с тем, позднее группой французских математиков под псевдонимом Н. Бурбаки было введено в математику понятие «математическая структура» [7]. До настоящего времени нет изложения КМ, где математическая строгость соединяется с математическим понятием структуры, однако это очень важно, потому что обнаруживается глубинная связь свойств структур с физической сутью исследуемых явлений и это особенно важно, когда удаётся построить иерархию вложенных структур [8]. Например, хорошо известна цепочка вложений числовых структур в общепринятых обозначениях [9]

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}. \qquad (1)$$

Менее известны продолжения иерархических цепочек на алгебраические структуры [9, 10] и структуры топологии, алгебры, функционального анализа [11, 12]. Построение иерархии классов, объектов с их принципами функционирования (свойства, методы, наследование, инкапсуляция, полиморфизм), в современных языках программирования, концептуально есть иерархии математических структур и являют собой яркий пример дальнейшего развития и обобщения этого важнейшего понятия на современном историческом этапе.

Для понимания математических основ КМ требуются понятия разных математических дисциплин: теории множеств и меры, функционального анализа, абстрактной алгебры, элементов топологии и теории групп, спектральной теории операторов, дифференцируемых многообразий, численного и приближённого анализа. Аксиоматический метод позволяет, при минимальных предположениях, коротким дедуктивным путём получить все нетривиальные и основополагающие результаты КМ.

Книг, учебников, излагающих КМ чисто математическим способом, в литературе встречается немного за время её существования. Это уже упомянутая книга Дж. Фон Неймана [6], Макки [13]. Имеется и российское издание — работа Фаддеева, Якубовского [14], отличающаяся от [13] только несколько иным и урезанным выбором материала. В работах [13, 14] под термином структура понимается не математическая структура в смысле, который в него вкладывала группа Бурбаки, а понятие, которое объединяет в себе математические объекты такие как: группа, группы преобразований, векторные пространства, дифференцируемые многообразия, риманова метрика с кинетической и потенциальной энергией и т.п. Изложение КМ в изданиях, написанных крупными физиками, таких как Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц [15] и во многих других добротных фундаментальных учебных изданиях, например [16–18], вовсе не содержится упоминания о математических структурах, на основе которых строится теория квантово-механических систем. В то же время и в работах математиков, например [19, 20], совсем не упоминается о том, что важным приложением теории операторов является КМ.

В этой заметке мы ставим цель показать, как математическое понятие «структура» в смысле, который в него вкладывала группа Бурбаки, может быть увязана с богатством математических представлений, используемых при математическом изложении нерелятивистской КМ.

### Аксиоматика квантовой механики

Структура (простая структура), согласно [7], есть набор, состоящий из основного множества-носителя (их может быть несколько, одно основное и другие дополнительные), числовых множеств и отображений, заданных на этих множествах, подчиняющихся конечному набору аксиом. В частности, элементарная математика [9, 10] и ряд математических структур [10–12] (топология, линейное нормированное пространство, гильбертово и банахово пространства, поля, кольца, группы и т.п.) рассматриваются как математические структуры и при этом возникает иерархия структур.

Покажем, что квантовую механику $\boldsymbol{KM}$ можно рассматривать как математическую структуру, содержащую набор из трёх структур (составная структура) и перечислим все отображения в ней

$$\boldsymbol{KM} = \{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{A}, \mathrm{K}\}. \qquad (2)$$

Здесь $\boldsymbol{H}$ есть структура гильбертова пространства

$$\boldsymbol{H} = \{\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{C}, \psi + \varphi, a \cdot \varphi, \langle \psi, \varphi \rangle, \|\varphi\|\}, \qquad (3)$$

в котором $\varphi$, $\psi \in \boldsymbol{\Psi}$ — (основное множество-носитель) множество векторов над полем комплексных $\mathbf{C}$ чисел (дополнительное множество) с операциями отображениями: сложения $\psi + \varphi$ векторов, $\boldsymbol{\Psi} \times \boldsymbol{\Psi} \to \boldsymbol{\Psi}$; умножения $a \cdot \varphi$ векторов на числа $a \in \mathbf{C}$ поля,

$\mathbf{C}\times\mathbf{\Psi}\to\mathbf{\Psi}$; скалярным произведением $\langle\psi,\varphi\rangle$ векторов $\mathbf{\Psi}\times\mathbf{\Psi}\to\mathbf{C}$; нормой $\|\varphi\|$ векторов $\mathbf{\Psi}\to\mathbf{C}$, порождаемой скалярным произведением. Системы аксиом ***H*** даны, например в [19,21–23]. На структуре комплексных чисел $\mathbf{C}$ мы не останавливаемся, напомним только, что в ней должна содержаться евклидова норма (абсолютная величина) числа обозначаемая через

$$|a| = |x+yi| = \sqrt{x^2+y^2}, \quad a\in\mathbf{C}. \tag{4}$$

В наборе ***KM*** рассматривается вторая структура ***A***. Структура отображений ***A*** имеет в качестве основного множества $\mathbf{F}$ множество эрмитовых (линейных самосопряжённых) операторов, обозначаемых заглавными латинскими буквами $A,\ B,\ D,\ \ldots$. Структура ***A*** есть набор операторов и операций над ними над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$, аксиомы даны в [6, 20–23].

$$\boldsymbol{A} = \{\mathbf{F}, A+B, a\cdot A, AB, \{A,B\}, U_t\}, \tag{5}$$

где $\mathbf{F}$ — множество эрмитовых операторов с линейными отображениями: $A+B$ сложение операторов $\mathbf{F}\times\mathbf{F}\to\mathbf{F}$; $aA$ — умножения операторов на числа поля $\mathbf{C}\times\mathbf{F}\to\mathbf{F}$; и нелинейные отображения: $AB$ — умножения (суперпозиция) операторов $\mathbf{F}\times\mathbf{F}\to\mathbf{F}$, которая (совместно с $A+B$) подчиняется трём аксиомам ассоциативной алгебры с единицей [6]; $\{A,B\}$ — квантовая скобка Пуассона над операторами (содержащая $\hbar$ — постоянную Планка) $\mathbf{F}\times\mathbf{F}\to\mathbf{F}$, которая (совместно с $AB$) подчиняются двум аксиомам алгебры Ли [6].

Таким образом, структура ***A*** является линейным пространством, ассоциативной алгеброй и алгеброй Ли. Во множестве $\mathbf{F}$ вводится эволюционный унитарный оператор $U_t : \varphi(0)\to\varphi(t)$, порождающий однопараметрическое семейство состояний, описывающий динамику системы $\mathbf{\Psi}\to\mathbf{\Psi}$ с течением времени $t$, который задаётся уравнением Шрёдингера.

Физическая интерпретация математических структур ***KM*** обуславливается семью аксиомами [17] относительно векторов «состояний» $\psi$ и «наблюдаемых» $A$ квантовой системы (структуры):

1) Состояния (первичное понятие) квантовой системы описываются множеством векторов $\psi\in\mathbf{\Psi}$ (бесконечномерной) гильбертовой ***H*** структуры.

Большое значение в ***KM*** имеет разложение элементов гильбертовых пространств в бесконечный ряд (ряд Фурье) по ортонормированной системе базисных векторов. О выборе базисных векторов говорят обычно как о выборе представления. Конечный ряд приближает элементы с некоторой точностью, количеством элементов ряда $n$

$$\psi = \sum_i a_i\varphi_i \approx \sum_{i=0}^{n} a_i\varphi_i, \tag{6}$$

где коэффициенты выражаются через скалярное произведение вектора состояния $\psi$ на базисные вектора ряда $a_i = \langle\psi,\varphi_i\rangle\in\mathbf{C}$. Примеры можно найти, например, в [19] и множестве других учебных изданиях.

2) Наблюдаемым (динамическим переменным) квантовой системы соответствуют элементы $A\in\mathbf{F}$ множества эрмитовых (в частности унитарных) операторов структуры ***A***.

3) Результатами измерений наблюдаемой $A$ в состоянии $\psi_i$ являются собственные значения $a_i$уравнения на собственные значения

$$A\psi_i = a_i\psi_i, \tag{7}$$

где $\psi_i$ — соответствующие собственные вектора состояний с собственными значениями $a_i$.

4) Вероятность $W$ получить в опыте значение $a_i$ при измерении наблюдаемой $A$ в нормированном состоянии $\psi$ даётся квадратом абсолютной величины скалярного произведения

$$W(a_i) = |\langle\psi_i,\psi\rangle|^2\,, \tag{8}$$

здесь $\psi_i$ — нормированный собственный вектор оператора (наблюдаемой) $A$, отвечающий собственному значению $a_i$.

Все то новое, что привносит КМ по сравнению с классической механикой, относится, по существу дела, к статическому описанию структуры первыми четырьмя аксиомами и вызывает по сей день обсуждение её гносеологических истоков, её мировоззренческого влияния, выражающихся в 9 интерпретациях КМ [4], многочисленных обсуждениях «запутанности» квантовых структур. Тогда как динамика структуры практически переносится из классической механики без существенных добавлений и в гносеологическом смысле не вызывает особых дискуссий.

Действительно, в ***KM***, как и в классической, основными динамическими переменными являются координата $x$ и импульс $p$, а все остальные наблюдаемые выражаются через них.

Для формулировки 5 и 6 аксиом ***KM*** органически необходима структура классической механики, поэтому в структуре ***KM*** включается структура классической механики

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{Z}, \mathbf{R}, \mathbf{G}, \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2, a\mathbf{z}_1, \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle, \|\mathbf{z}\|, V_t\}, \quad (9)$$

с 3-х мерным линейным евклидовым пространством $\mathbf{Z}$, элементами $\mathbf{z}$ которого являются: вектора координат $\mathbf{x}$, вектора импульсов $\mathbf{p}$ или сил $\mathbf{F}$, $\mathbf{R}$ — структура (поле) вещественных чисел, с операциями сложения и умножения чисел с хорошо известным конечным списком аксиом. $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}$ образуют линейное векторное пространство над полем вещественных чисел с двумя операциями: сложения $\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2$ двух векторов $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ и умножения $a\mathbf{z}$ вектора на число $\mathbf{Z} \times \mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ с 8 аксиомами и евклидовым скалярным произведением двух векторов $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle$ с четырьмя аксиомами, порождающими норму $\|\mathbf{z}\| = \sqrt{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle}$ с тремя аксиомами. Шестимерные вектора $\mathbf{s} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})^{\mathrm{T}} \in X$ образуют множество $\mathbf{X}$ — фазовое пространство (дополнительное множество). Эволюционный оператор $V_t$, описывающий динамику системы с течением времени $t$ в фазовом пространстве $\mathbf{X}$ состояний, порождает однопараметрическое семейство состояний $\mathbf{X} \to \mathbf{X}$. Эволюционный оператор связан с уравнениями Ньютона, который для одной материальной точки в фазовом пространстве можно записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{s}(0) = \mathbf{s}^0, \quad (10)$$

где $\mathbf{f} = (\mathbf{p}/m, \mathbf{F})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{X}$ — вектор импульса и силы, действующей на материальную точку. Уравнение задаёт аксиому, выражающую второй закон Ньютона. Если ввести функцию Гамильтона в стандартных обозначениях

$$H = \frac{\|\mathbf{p}\|^2}{2m} + V(\mathbf{x}), \quad (11)$$

то эволюция механической системы описывается уравнением Гамильтона

$$\frac{d\mathbf{s}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \overleftarrow{\mathbf{s}}}, \quad s(0) = s^0, \quad (12)$$

где $\dfrac{\partial H}{\partial \overleftarrow{\mathbf{s}}} = \left( \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\mathrm{T}}$ — антисимметричное дифференцирование по векторному аргументу $\mathbf{s}$.

Множество $\mathbf{G} \in \mathbf{K}$ — вещественных, бесконечно дифференцируемых функций $f(\mathbf{s})$, образующих линейное пространство наблюдаемых в структуре $\mathbf{K}$. Наблюдаемые выражаются через координаты и импульсы. Примерами наблюдаемых могут служить координаты вектора $\mathbf{x}$ и импульса $\mathbf{p}$, функция Гамильтона, момент импульса, кинетическая энергия системы, потенциальная энергия, полная энергия и вообще любая функция $g(\mathbf{s})$ от вектора $\mathbf{s}$ координат и импульсов $\mathbf{s} = (\mathbf{x}, \mathbf{p})^{\mathrm{T}} \in \mathbf{X}$.

Показывается, что любая наблюдаемая удовлетворяет дифференциальному уравнению с оператором — скобки Пуассона, с выделенной наблюдаемой $H$ (функцией Гамильтона), которая порождает однопараметрический оператор $U_t$

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \{H, g\}, \quad g(0) = g^0. \quad (13)$$

В частности для $g(p, x)$, явно не зависящей от времени, частная производная будет равна нулю $\dfrac{\partial g}{\partial t} = 0$. Скобка Пуассона в структуре $\mathbf{K}$ для двух наблюдаемых $H$, $g \in \mathbf{G}$ определяется формулой с двумя скалярными произведениями

$$\{H, g\} = \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} \right\rangle, \quad (14)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{p}}, \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ — операторы дифференцирования по векторному аргументу. Скобка Пуассона для координат векторов $x_j$ и $p_k$, очевидно, удовлетворяет перестановочному соотношению

$$\{x_j, p_k\} = \delta_{jk}, \quad (15)$$

где $\delta_{jk}$ — символ Кронекера, в частности для фазовой плоскости $\mathbf{p} = p$, $\mathbf{x} = x$ имеем $\{x, x\} = 0$, $\{p, p\} = 0$, $\{p, x\} = 1$.

Если под вектором $\mathbf{g}$ понимать набор наблюдаемых $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \ldots, g_k)^T$, то (14) можно записать в векторном виде

$$\{H, \mathbf{g}\} = (\{H, g_1\}, \{H, g_1\}, ..., \{H, g_k\})^{\mathrm{T}} \quad (16)$$

и тогда уравнение (13) можно также переписать для векторов в виде

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t} + \{H, \mathbf{g}\}, \quad \mathbf{g}(0) = \mathbf{g}^0. \quad (17)$$

Уравнение (17) представляет собой компактную и симметричную запись всей классической механики. В частности из него следуют уравнения Гамильтона, когда вместо $\mathbf{g}$ подставляется $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \{H, \mathbf{x}\} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}},\\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \{H, \mathbf{p}\} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}.\end{aligned} \tag{18}$$

Отображения $V_t : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, связанные с функцией Гамильтона, сохраняют все линейные операции и операцию скобок Пуассона, тем самым являясь автоморфизмом алгебры наблюдаемых.

Классическим координатам $x_j$радиуса вектора $\mathbf{x}$ и координатам $p_j$ импульса $\mathbf{p}$ в структуре ***КМ*** соответствуют операторы $X_j = x_j$ и $P_j = -\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_j}$, не коммутирующие между собой. Следующие пятая и шестая аксиомы строят ***КМ*** согласно принципу соответствия так, чтобы КМ примыкала к классической настолько тесно, насколько это вообще возможно, не допуская противоречия результатам эксперимента, и на этом пути задаются новые наблюдаемые — квантовая скобка Пуассона $\{A, B\}$ и коммутатор $[A, B] = AB - BA$, связанные простым равенством

$$\{A, B\} = \mathrm{i}\hbar\,[A, B]\,, \tag{19}$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, $\mathrm{i}$ — мнимая единица.

Интересная интерпретация квантовой механики в духе классических представлений сформулирована выдающимся физиком XX столетия Р. Фейманом [4], так называемый «интеграл по путям». В этой интерпретации обобщается классическое понятие траектории. Термин «путь» теперь обозначает траектории некоторого числа частиц (ансамбля), рассматриваемых вместе. Надо заметить, что, несмотря на многочисленные интерпретации КМ (кроме 9 рассмотренных в [4] имеются и другие, менее известные), они все выражаются одна через другую. Аксиомы одной интерпретации могут быть доказаны как теоремы с помощью аксиом другой интерпретации. Дело здесь обстоит аналогично с известными аксиоматическими реализациями Евклидовой геометрии, для которой построены разные системы аксиом (Гильберта, Александрова, Вейля, Погорелова, различные неполные системы для школьного курса геометрии).

Квантовые скобки Пуассона сохраняют все хорошо известные свойства классических скобок: антисимметричность, линейность по каждой переменной, равенство нулю скобки с константой, выполнение тождества Якоби, свойства аналогичного правилу дифференцирования произведения. В пятой аксиоме впервые появляется универсальная квантовая постоянная Планка $\hbar$.

5) Скобки Пуассона $\{X_j, P_k\}$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$\{X_j, \mathbf{P}_k\} = \mathrm{i}\hbar\delta_{jk}\mathrm{I}, \tag{20}$$

где I — единичный оператор.

С помощью данных аксиом уже здесь доказываются теоремы о том, что среднее значение $\langle A\rangle = \overline{A}$ наблюдаемой $A$ в состоянии $\varphi$ даётся формулой

$$\overline{A} = \langle \varphi, A\varphi\rangle\,, \tag{21}$$

где$\langle \varphi, A\varphi\rangle$ — скалярное произведение векторов и вторая теорема о фундаментальном соотношении неопределённостей для средних квадратичных флуктуаций динамических переменных $\|A_1\| \cdot \|A_2\| \geqslant 1/2\hbar$. Эти теоремы имеют далеко идущие последствия для всех выводов ***КМ***.

С помощью основных операторов $X_j$ и $P_j$ вводятся вторичные по отношению к ним понятия наблюдаемых по аналогии с классической механикой:
для радиуса вектора

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z,$$

импульса

$$\mathbf{P} = -\mathrm{i}\hbar\nabla = \mathrm{i}\hbar\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

момента импульса

$$\mathbf{L} = -ih(\mathbf{r} \times \nabla),$$

кинетической энергии

$$\begin{aligned}T = \frac{1}{2m}P^2 = -\frac{h^2}{2m}\Delta = \\ = -\frac{h^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),\end{aligned}$$

полной механической энергии (Гамильтониана или Шрёдингера)

$$H = T + U = -\frac{h^2}{2m}\Delta + U.$$

Здесь $\mathbf{r} \times \nabla$ — векторное произведение, $U$ — оператор потенциальной энергии.

В структуре $\boldsymbol{A}$ операторов, более других, используется оператор $H$ — оператор Шредингера, заданный для каждой физически осмысленной задачи), например для квантового осциллятора равный

$$H = T + U = T + \frac{k}{2}X^2 = \left(P^2 + m\varpi X^2\right)/2m,$$

где $m$ — масса квантового объекта, $\varpi = \sqrt{\frac{k}{m}}$ — циклическая частота, $k$ — коэффициент квазиупругой силы. Некоторые результаты и положения **КМ** известны как математические результаты в гильбертовых пространствах, в которых давно введены понятия: кольцо операторов, операторы проекторы, самосопряжённые, положительные, унитарные операторы [19–23], — и их свойства определяют свойства квантовых систем.

Кругом этих аксиом определяется статика объектов **КМ**, описываемая путём математического решения стационарного уравнения Шрёдингера и получение полного набора всех собственных состояний (векторов) $\varphi_i$ и соответствующих им собственных значений $\lambda_i$оператора Гамильтона.

Для предсказаний динамических характеристик системы с течением времени $t$ по произведённым измерениям их средних значений в момент $t_0$ вводится новая аксиома с эволюционным оператором $U_t\colon \varphi(t) = U_t\varphi(0)$, который связан с уравнением Шредингера с помощью следующей аксиомы.

6) Изменение во времени состояния $\varphi(t)$ описывается дифференциальным уравнением Шредингера [17]

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d\varphi(t)}{dt} = H\varphi(t), \quad \varphi(0) = \varphi^0. \tag{22}$$

Можно доказать теорему, важную для теории измерений: изменение среднего значения наблюдаемой (самосопряжённого оператора), которое в состоянии $\varphi(t)$ определяется соотношением $\overline{A} = \langle\varphi(t), A\varphi(t)\rangle$, будет задаваться уравнением, аналогичным (13), но записанный для операторов

$$\frac{d\overline{A}}{dt} = \overline{\frac{\partial A}{\partial t}} + \overline{\{H, A\}}, \tag{23}$$

где $A$ — эрмитов оператор некоторой динамической переменной (наблюдаемой), зависящей от времени $A(t)$ (если такой зависимости нет, то первое слагаемое в правой части пропадает) и сохраняются все операции $aA$, $A + B, AB, \{A, B\}$ структуры $\boldsymbol{A}$.

Если гамильтониан не зависит от времени, то эволюционный оператор имеет вид $U_t = \exp\left(-i\dfrac{H}{h}t\right)$ и является унитарным. Далее чисто математически, разлагая $U_t$ в ряд Тейлора и принимая во внимание $H\varphi_i = (\lambda_i)\varphi_i$, доказывается связь между стационарным и эволюционным решениями Шредингера

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \exp(-i\frac{\lambda_i}{h}t)\varphi_i, \tag{24}$$

здесь $\varphi_i, \lambda_i$ — собственные вектора и значения оператора $H$, $\alpha_i$ — коэффициенты разложения начального вектора $\varphi(0)$ по собственным векторам оператора $H$.

В структуре $\boldsymbol{A}$ вводится ещё наблюдаемая — оператор спина $S$ [15–18], необходимость которого невозможно вывести из 6 динамической аксиомы.

7) Спиновые состояния квантовой системы описываются оператором спина $S$ и его некоммутирующими проекциями на декартовы оси.

Отметим, что в релятивисткой **КМ** её математическая структура такова, что спин $S$ появляется естественным образом из динамического уравнения Дирака и в дополнительной аксиоме не нуждается.

После формулировки аксиом все основополагающие результаты **КМ** доказываются как теоремы, вытекающие из данных аксиом. Например, соотношение неопределённостей, утверждения теорий **F** представлений (выборе определённого базиса), описания закономерностей одномерных движений и движений в центральном поле простых и сложных атомов, объяснении спектральных серий щелочных металлов, переходы между стационарными состояниями, влияние магнитного поля на уровни энергии, объяснение простого эффекта Зеемана и опытов Штерна и Герлаха, теория периодической системы Менделеева, теории рассеяния и излучения и т.п.

Методы решения квантово-механических задач вырастают из применения данных аксиом к различного рода квантово-физическим задачам: задача механики частицы со спином, задача о состоянии электрона в атоме, квантовая теория простейших молекул, коллективные явления в низкоразмерных структурах и другие важные задачи.

Отметим ограниченность нерелятивистской КМ, которая не даёт объяснения таким задачам, в которых решающим образом проявляет себя сильное ядерное взаимодействие или скорости движения сопоставимые со скоростью света или задач в области элементарных частиц. Новые задачи требуют привлечения новых составных математических структур, относительно которых в теории элементарных частиц до сих пор нет ясности. Вообще говоря, современная математика и физика для объяснения реальности создаёт различные математические структуры с полной аксиоматизацией, начало этому процессу положено в работах Гильберта, заложившего основы формализации геометрии, логики [24] и на этом пути науке XX века и сегодняшнего дня удаётся получать впечатляющие результаты.

## Заключение

В статье показано, что в рамках подхода сформулированного группой Бурбаки, квантовая механика есть составная структура, состоящая из трёх простых математических структур, которые были изучены ещё до создания квантовой механики, с известными списками аксиом: гильбертова пространства комплекснозначных векторов с полем комплексных чисел, пространства линейных самосопряжённых операторов и структуры классической механики. Физическая интерпретация задаётся семью специальными аксиомами, которые определяют своеобразие КМ и задают правила перехода от классических наблюдаемых к квантовым. Работа показывает построение физической теории на основе общего математического подхода и разъясняет предположения, минимально необходимые для развития нерелятивистской квантовой механики аксиоматическим методом.

## Литература

1. *Сериков А.А., Харкянен В.Н.* Одномерная стационарная миграция квантовых частиц // Теоретическая и математическая физика. 1989. Т. 78, № 1. С. 82–88.
2. *Tan W.-C., Inkson J.C.* Magnetization, persistent currents, and their relation in quantum rings and dots // Phys. Rev. B. Vol. 60, 1999. P. 5626–5635. DOI: 10.1103/PhysRevB.60.5626
3. *Маргулис В.А.* Магнитный момент кольца Волкано // Физика твердого тела. 2008. Т. 50. С. 148–153.
4. *Styer D.F., Balkin M.S., Becker K.M., Burns M.R., Dudley C.E., Forth S.T., Gaumer J.S, Kramer M.A., Oertel D.C., Park L.H., Rinkoski M.T., Smith C.T., Wotherspoon T.D.* Nine formulations of quantum mechanics // American Journal of Physics. 2002. Vol. 70. P. 288–297.
5. *Белинский А.В.* Квантовые измерения. М.: БИНОМ. 2008. 183 с.
6. *Neumann J.* Mathematical of Quantum Mechanics. Berlin, 1932. 368 p.
7. *Bourbaki N.* L'Architecture des mathematiques // Les grands courants de la pensée mathématique. 1948. P. 35–37.
8. *Колмогоров А.Н.* Математика — наука и профессия. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. 288 с.
9. *Лебедев К.А.* О методических и научных принципах создания школьного учебника математики серии «МГУ-школе». I. Числовые системы (5–6 классы) // Математическое образование. 2016. № 3(79). С. 3–20.
10. *Лебедев К.А.* Архитектура элементарной математики. Краснодар: КубГУ, 2000. 34 с.
11. *В.Л. ван дер Варден.* Алгебра. М.: Наука. 1976. 647 с.
12. *Лебедев К.А.* Архитектура математики. Топология, алгебра и функциональный анализ. Краснодар: КубГУ, 2001. 18 с.
13. *Макки Дж.* Лекции по математическим основам квантовой механики. М.: Мир, 1965. 130 с.
14. *Фаддеев Л.Д., Якубовский О.А.* Лекции по квантовой механике для студентов-математиков. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980. 200 с.
15. *Ландау П.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989. 767 с.
16. *Левич В.Г., Вдовин Ю.А., Мямлин В.А.* Курс теоретической физики. Т. 2. Квантовая механика, квантовая статистика и физическая кинетика. М.: Наука, 1971. 936 с.
17. *Шпольский Э.В.* Атомная физика. Ч. 2. М.: Мир, 1974. 444 с.
18. *Шифф Л.* Квантовая механика. М.: Наука, 1959. 545 с.
19. *Садовничий В.А.* Теория операторов. М.: Высшая школа, 1999. 368 с.
20. *Гельфанд И.М.* Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971. 271 с.
21. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 1980. 495 с.
22. *Колмогоров А.Н., Фомин С.С.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.:

Наука, 1976. 542 с.
23. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука. 1977. 760 с.
24. *Гильберт Д., Бернайс П.* Основания математики. М.: Наука, 1979. 558 с.

## References

1. Serikov, A.A., Harkyanen, V.N. One-dimensional steady migration of quantum particles. *Theoretical and mathematical physics*, vol. 78, iss. 1. 1989, pp. 82—88.
2. Tan, W.-C., Inkson, J.C. Magnetization, persistent currents, and their relation in quantum rings and dots. *Phys. Rev. B*, vol. 60, 1999, pp. 5626–5635. DOI: 10.1103/PhysRevB.60.5626
3. Margulis, V.A. Magnitnyy moment kol'tsa Volkano [The magnetic moment of the Volcano ring]. *Fizika tverdogo tela* [Solid State Physics], 2008, vol. 50 . pp. 148–153. (In Russian)
4. Styer, D.F., Balkin, M.S., Becker, K.M., Burns, M.R., Dudley, C.E., Forth, S.T., Gaumer, J.S, Kramer, M.A., Oertel, D.C., Park, L.H., Rinkoski, M.T., Smith, C.T., Wotherspoon, T.D. Nine formulations of quantum mechanics. *Am. J. of Phys.*, 2002, vol. 70, pp. 288–297.
5. Belinskiy, A.V. *Kvantovyye izmereniya* [Quantum measurements]. BINOM, Moscow, 2008. (In Russian)
6. Neumann, J. *Mathematical of Quantum Mechanics*, Berlin 1932.
7. Bourbaki, N. L'Architecture des mathematiques. In: *Les grands courants de la pensée mathématique*, 1948, pp. 35–37.
8. Kolmogorov, A.N. *Matematika — nauka i professiya* [Mathematics as a science and a profession]. Nauka. Gl. red. fiz.-mat. lit., Moscow, 1988. (In Russian)
9. Lebedev, K.A. O metodicheskikh i nauchnykh printsipakh sozdaniya shkol'nogo uchebnika matematiki serii "MGU-shkolE". I. Chisloviyye sistemy (5-6 klassy) [On the methodological and scientific principles of creating a school textbook of mathematics series "MSU-school" Pt. I. Numerical systems (grades 5-6)]. *Matematicheskoye obrazovaniye* [Mathematical education], 2016, no. 3(79), pp. 3–20. (In Russian)
10. Lebedev, K.A. *Arkhitektura elementarnoy matematiki* [Architecture of elementary mathematics]. Kuban State University, Krasnodar, 2000. (In Russian)
11. Varden, B.L. *Algebra, vol. 2*, Springer, New York, 1991.
12. Lebedev, K.A. *Arkhitektura matematiki. Topologiya, algebra i funktsional'nyy analiz* [Architecture of elementary mathematics]. Kuban State University, Krasnodar, 2001. (In Russian)
13. Makki, Dzh. *Lektsii po matematicheskim osnovam Kvantovoy mekhaniki* [Lectures on the mathematical foundations of quantum mechanics]. Mir, Moscow, 1965. (In Russian)
14. Faddeyev, L.D., Yakubovskiy, O.A. *Lektsii po kvantovoy mekhanike dlya studentov-matematikov* [Lectures on quantum mechanics for mathematics students]. Izd-vo Leningr. un-ta, Leningrad, 1980. (In Russian)
15. Landau, P.D., Lifshits, Ye.M. *Kvantovaya mekhanika. Nerelyativistskaya teoriya* [Quantum mechanics. Nonrelativistic theory]. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)
16. Levich, V.G., Vdovin, Yu.A., Myamlin, V.A. *Kurs teoreticheskoy fiziki. T. 2. Kvantovaya mekhanika, kvantovaya statistikami fizicheskaya kinetika* [Course of theoretical physics. T.2. Quantum mechanics, quantum statistics, physical kinetics]. Nauka, Moscow, 1971. (In Russian)
17. Shpol'skiy, E.V. *Atomnaya fizika. Ch. 2* [Atomic physics. Part 2]. Mir, Moscow, 1974. (In Russian)
18. Shiff, L. *Kvantovaya mekhanika* [Quantum mechanics]. Nauka, Moscow, 1959. (In Russian)
19. Sadovnichiy, V.A. *Teoriya operatorov* [Theory of operators]. Vysshaya shkola, Moscow, 1999. (In Russian)
20. Gel'fand, I.M. *Lektsii po lineynoy algebre* [Lectures on linear algebra]. Nauka, Moscow, 1971. (In Russian)
21. Trenogin, V.A. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Fizmatlit, Moscow, 1980. (In Russian)
22. Kolmogorov, A.N., Fomin, S.S. *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of function theory and functional analysis]. Nauka, Moscow, 1976. (In Russian)
23. Kantorovich, L.V., Akilov, G.P. *Funktsional'nyy analiz* [Functional analysis]. Nauka, Moscow, 1977. (In Russian)
24. Hilbert, D., Bernays, P. *Grundlagen der Mathematik. II, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 50, Berlin, New York: Springer-Verlag.



Статья поступила 17 марта 2020 г.