

МАТЕМАТИКА

УДК 510.67:554

DOI: 10.31429/vestnik-17-3-13-21

РЕАЛИЗАЦИЯ КА-МОДЕЛЕЙ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
НА ТРИАНГУЛЯЦИОННЫХ СЕТКАХ

Домасевич М. А., Рубцов С. Е., Павлова А. В.

IMPLEMENTATION OF CA-MODELS OF PHYSICAL PROCESSES
ON TRIANGULATION GRIDS

M. A. Domasevich, S. E. Rubtsov, A. V. Pavlova

Kuban State University, Krasnodar, Russia
e-mail: pavlova@math.kubsu.ru

Abstract. The application of cellular automata (CA) on triangulation grids is a promising area of research in the world of CA, that can open new possibilities in the modeling of surface processes. In the paper we demonstrate an approach to the construction of triangulation grids that approximate real terrain fragments, presented in the form of a heightmap image in PNG format. The constructed grid can approximate the selected surface with the required accuracy, thereby making it possible to use the features of the modeled object geometry in a mathematical model, the implementation of which is a cellular automaton with given transition rules. For the constructed triangulation grid, it is possible to generate and attach various forms of metadata based on the corresponding maps that match in scale with the elevation map, or are related to it. For example, we can use rainfall maps, forest maps, or various temperature maps to provide the appropriate metadata needed to model the required process. The described approach is applicable for construction of Boolean, integer CA and also cellular automata using the real alphabet on triangulation grids. The paper presents the results of testing for the constructed spatial cellular automata that simulate naive diffusion and liquid spill on the presented model triangulation grid. The developed visualization mechanisms allow us to view the simulated objects from different angles.

Keywords: triangulation grid, height map, cellular automata, cellular automata simulation, diffusion, fluid spill

Введение

В настоящее время клеточные автоматы (КА) имеют достаточно широкие приложения в различных областях: криптография, распознавание и обработка данных, экология, биология, медицина, механика, физика, химия, экономика, социология и т.д. Среди прочих важной областью их использования было и остается моделирование физических процессов [1–7]. При этом клеточными автоматами считаются не только автоматы, построенные на прямоугольном клеточном поле, но и реализованные на более сложных структурах. Применение КА на триангуляционных сетках — новая область исследования в мире клеточных автоматов, сулящая ряд преимуществ,

как, например, более точное моделирование поверхностных процессов.

Интерес к КА как инструменту моделирования продолжает расти. Публикации на тему КА на сегодняшний день весьма многочисленны. Один из подробных отечественных обзоров представлен в [8]. КА нашли широкое применение в экологии при анализе пространственного переноса загрязнений и выпадении их на поверхность. Изучение осаждения примесей и процессов, имеющих диффузионную динамику, на подстилающей поверхности требует включения в модель характеристик рельефа. Аппроксимация поверхности и использование на полученной триангуляционной сетке клеточного автомата, моделирующего та-

Домасевич Михаил Андреевич, студент магистратуры кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: kmm@fpm.kubsu.ru.

Рубцов Сергей Евгеньевич, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: rub_serg@mail.ru.

Павлова Алла Владимировна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры математического моделирования Кубанского государственного университета; e-mail: pavlova@math.kubsu.ru.

Работа выполнена при поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края (19-41-230005).

кие процессы как: паводки, пожары, оползни и др., — также позволит проводить более точное моделирование в связи с возможностью использовать особенности ландшафта.

На сегодняшний день используется много модификаций классических КА и гибридных моделей [9–11 и др.], развиваются также клеточные автоматы на различных полигональных сетках. Использование триангуляционных решеток для КА [6, 7] при моделировании сложных природных процессов — актуальная область исследования на сегодняшний день. Преимущество применения триангуляционных сеток — возможность использования геометрических свойств их элементов при задании правил перехода автомата, что может оказаться полезным при симуляции физических пространственных процессов. Любые другие полигоны при их использовании в подобных моделях повышают вычислительную сложность алгоритмов, что также является аргументом в пользу выбора триангуляционной сетки. Удобство работы с триангуляционными сетками обеспечивается также множеством форматов их хранения.

1. Создание триангуляционных сеток для ландшафтных поверхностей

Несмотря на имеющиеся зарубежные и российские программные продукты (MCell, DDLab, WinALT и др.), универсальной среды проектирования КА в настоящее время не существует. Авторы использовали среду разработки Visual Studio Community, язык программирования — C#. Подготовительным этапом стало создание триангуляционной сетки, для построения которой был выбран способ генерации с использованием карты высот.

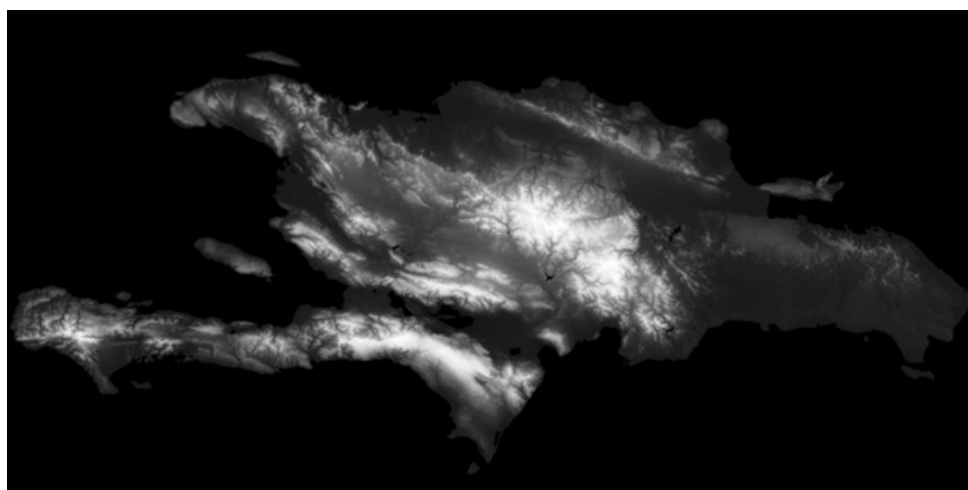
Если моделирование процесса требует учета формы поверхности, предпочтительным является применение триангуляционных сеток в качестве дискретного пространства для построения КА-модели (систем непересекающихся треугольников с вершинами в опорных точках поверхности). Любую поверхность можно смоделировать, используя триангуляционную сетку, аппроксимирующую эту поверхность с необходимой точностью. Следует также принимать во внимание, что современные графические вычислительные устройства оптимизированы для работы с триангуляционными сетками, имеются средства визуализации триангуляционных моделей и удобные механизмы импорта и работы с

триангуляционными моделями поверхностей. Это позволяет увеличить скорость их обработки.

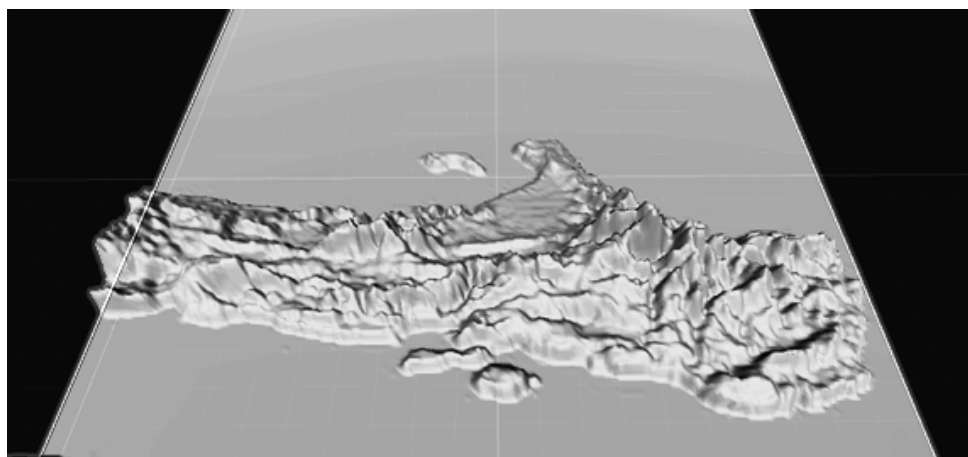
При автоматизированном построении сеток применяются специальные алгоритмы, позволяющие преобразовать различные исходные представления объекта в триангуляционную сетку [12–14]. Исходными данными могут служить как аналитические описания поверхностей (с помощью различных параметризующих функций), так и их изображения. В качестве последнего может быть выбрана карта высот, использование которой позволяет построить трехмерную модель ландшафта в виде триангуляционной решетки. Как правило, карты высот представляют собой картинки, в которых каждая точка представлена градацией серого цвета, обозначающей относительную высоту рельефа в этой точке. Чем пиксель темнее, тем меньше высота в той точке и наоборот.

При построении триангуляционных сеток следует избегать очевидных ошибок: пересечение треугольников между собой, наложение их друг на друга или присутствие в триангуляционных решетках вырожденных треугольников. Наличие дыр в триангуляционных решетках, если того не предусматривает геометрия, также является ошибкой. Кроме того, необходимо корректно задать максимальный размер элементов в целях обеспечения экономии расчетных мощностей при вычислениях [15].

При реализации триангуляционной сетки опорные точки ее находятся в соответствии с точками карты высот. При этом множество точек карты разбивается на подмножества мощности четыре, где каждое подмножество образует квадрат, не содержащий внутри других точек. На каждом шаге работы алгоритма выбираются по четыре пикселя (расположенные в форме квадрата по соседству), для каждого пикселя коэффициент яркости умножается на его модификатор высоты, строятся четыре вершины, между которыми прокладывается ребро (как правило, единообразно для всех элементов решетки), что в итоге дает два треугольника с общим ребром. Прodelывая эти операции для всех четверок пикселей, получаем триангуляционную сетку, соответствующую ландшафту, интерпретированному на карте высот. После чего используется алгоритм определения и установки индексов соседей для каждого треугольника, создающий



а)



б)

Рис. 1. Карта высот (а) и построенная модель в виде триангуляционной сетки (б)

удобный способ навигации по триангуляционной сетке.

В качестве основного формата изображения реальных рельефов местности был выбран формат .PNG, представляющий картинку, сохраненную в градациях серого (рис. 1а). Каждая точка соответствует пункту в плоской системе координат на реальной карте высот, яркость градации цвета этой точки является интерпретируемой информацией о высоте ландшафта в этой точке. Результат работы алгоритма иллюстрирует рис. 1б.

Другой пример исходных данных (карты высот), использованный в представленных далее примерах работы клеточных автоматов, изображен на рис. 2, а результат работы алгоритма триангуляции — на рис. 3.

Для визуализации триангуляционных сеток использован массив вершин, размер ко-

торого кратен трем. Каждый элемент массива представляет собой радиус-вектор вершины в трехмерном пространстве. Тройка идущих подряд элементов описывает один треугольник триангуляционной сетки. Хранение структурных типов данных в упорядоченном таким образом массиве позволяет обрабатывать данные блоками.

Построенная сетка может аппроксимировать выбранную поверхность с необходимой точностью, тем самым позволяя использовать особенности геометрии моделируемого объекта в математической модели, реализацией которой выступает клеточный автомат с заданными правилами перехода. Для построенной триангуляционной сетки можно сгенерировать и прикрепить различные метаданные на основе соответствующих карт, совпадающих по масштабу с картой высот,

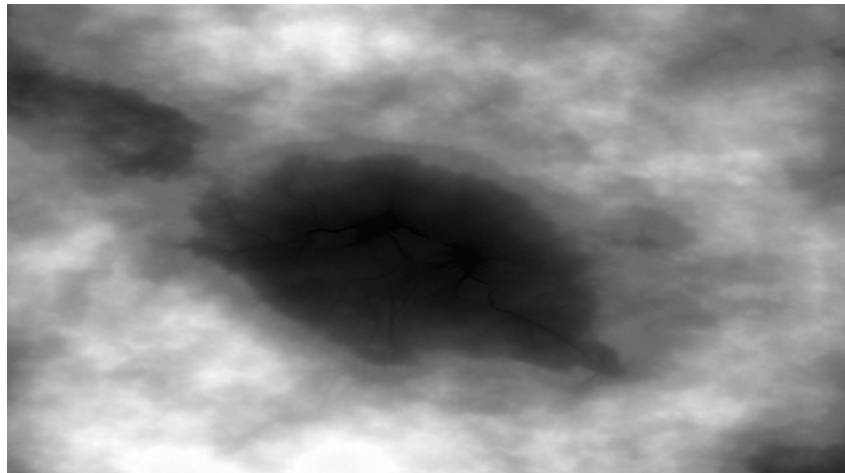


Рис. 2. Карта высот в формате .PNG для генерации сетки

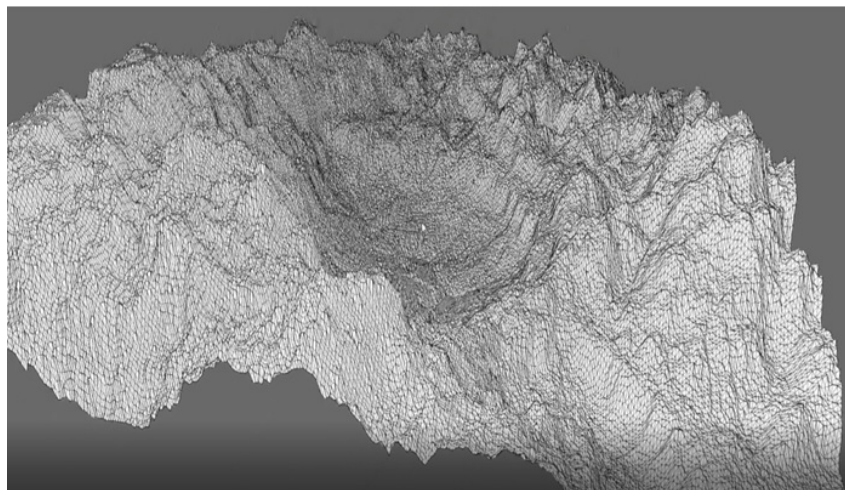


Рис. 3. Триангуляционная сетка ландшафта

либо соотносимых с ней. Например, можно использовать карты осадков, лесов или различные температурные карты, чтобы задать соответствующие метаданные, необходимые при моделировании того или иного процесса.

2. Задание КА на триангуляционной сетке

Для определения КА на триангуляционной сетке вводятся: алфавит состояний A ; M — множество имен клеток $M = \{m_i : i = 1, \dots, N\}$. Пара (a, m) , где $a \in A$, $m \in M$, называется состоянием клетки и обозначается $a(m)$. Клеточный массив — множество клеток $\Omega = \{a(m), m : m \in M\}$.

Каждому треугольнику из триангуляционной сетки соответствует клетка — элементарный автомат (ЭА). Таким образом, всей

триангуляционной сетке соответствует клеточный массив. Шаблон окрестности (соседства) клетки (a, m) задается как множество имен соседних клеток. Так, для триангуляционной сетки две клетки будут считаться соседними, если они имеют общее ребро. Таким образом, у каждого треугольника может быть не более трех соседей.

Правило перехода задает некоторая функция, определяющая новое состояние ЭА в зависимости от состояний ее соседей. Приведенное определение клеточного автомата можно модифицировать в зависимости от потребностей при имитации того или иного процесса. Так, алфавит состояний можно расширить, изменить или определить ему композитную структуру. Можно также задать каждой клетке дополнительные метаданные, такие

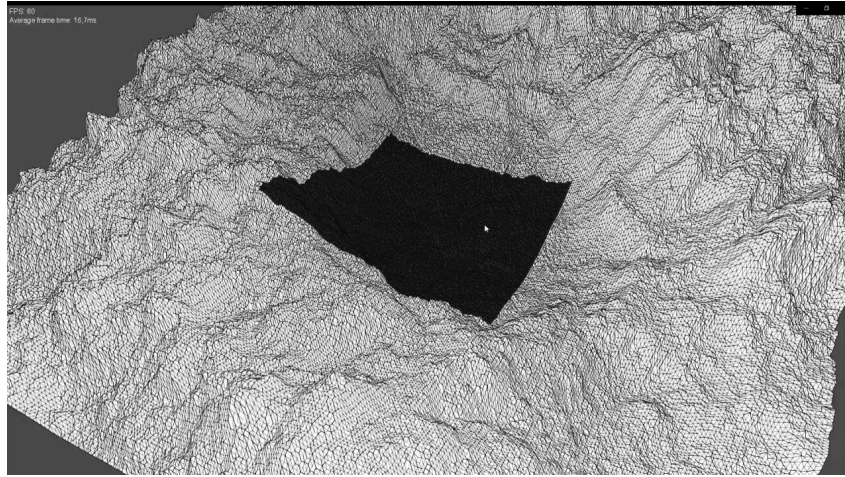


Рис. 4. Исходное тестовое состояние КА наивной диффузии

как геометрические особенности треугольника, которому соответствует эта клетка либо различные нагрузочные метаданные, о которых говорилось ранее.

3. Результаты имитации различных процессов

3.1. Диффузия

Процесс диффузии для однородной среды математически описывается классическим уравнением

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

где $u(x, y, z, t)$ — концентрация вещества в точке с декартовыми координатами x, y, z в момент времени t , D — коэффициент диффузии.

Для клеточно-автоматного описания диффузии в основном используют две модели: модель наивной диффузии и диффузию с окрестностью Марголуса (ТМ-диффузия) [3]. ТМ-диффузия существенно использует прямоугольную сетку и применить ее к триангуляционной не представляется возможным. Наивную же диффузию с небольшими изменениями можно успешно использовать и на треугольных сетках.

Конфигурируя клеточный автомат, моделирующий наивную диффузию на триангуляционной сетке, правило перехода можно выбрать таким же образом, как и на прямоугольной решетке. Но, используя геометрические особенности моделируемого объекта, при моделировании наивной диффузии правило

перехода можно расширить. Например, можно провести балансировку вероятностей, когда соседняя клетка с самым коротким общим ребром выбирается с большей вероятностью, чем с самым длинным. Тогда вероятности выбора соседа будут описываться соотношением

$$\frac{1/\text{length}_j}{\sum_{j=1}^3 1/\text{length}_j},$$

где length_j — длина соответствующего ребра в треугольнике.

КА для имитации наивной диффузии реализует всего два метода: метод инициализации и метод функции эволюции. В конструктор автомата на вход подается карта высот, используя генератор триангуляционных решеток, создается триангуляционная сетка и соответствующие метаданные о треугольниках и их соседях. Функция эволюция реализует асинхронную итерацию для всех ЭА, представленных структурой Triangle в триангуляционной сетке.

Пример исходного состояния КА можно увидеть на рис. 4, а результат его работы после 300 итераций — на рис. 5.

3.2. Разлив жидкости

В качестве другого примера моделируемого процесса можно рассмотреть разлив жидкости по некоторой рельефной поверхности. Созданный клеточный автомат работает в синхронном режиме, при этом функция перехода реализована в два шага. На первом

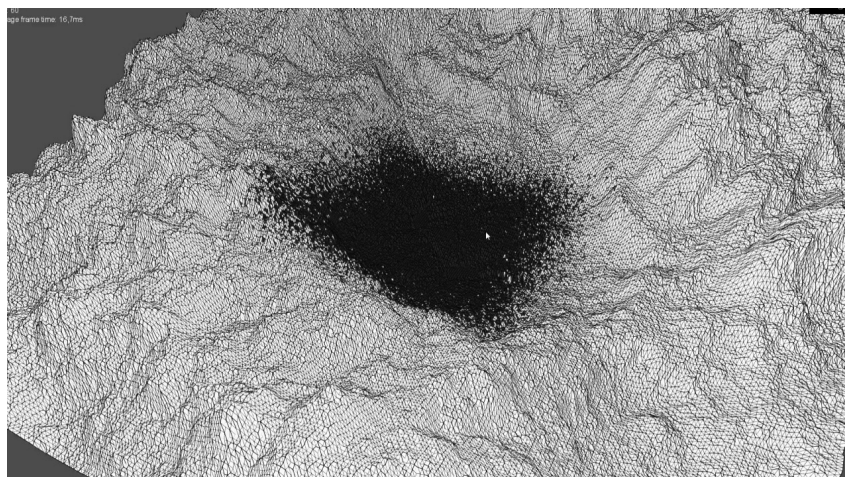


Рис. 5. КА наивной диффузии после 300 итераций

шаге итеративно выполняется функция перехода для всех ЭА. На этом шаге производится вычисление уровня жидкости для текущего треугольника и его соседей. Затем балансирующие суммы объемов жидкости записываются в специальный буфер, общий для этого шага (массив, по размеру соответствующий числу треугольников и имеющий с ним общую индексацию).

Рассмотрим смысл термина «балансирующие суммы» на примере одного ЭА, представленного треугольником, и его соседей. Под балансирующими суммами подразумеваются значения объемов жидкости, каждое из которых соответствует своему треугольнику в рамках этого примера. Эти значения рассчитываются таким образом, что суммарный объем жидкости остается неизменным при расчете изменившегося уровня для каждого отдельного треугольника и его соседей. На каждой итерации вычисляются локальные балансирующие суммы, после чего они складываются с другими, хранящимися в балансирующем буфере.

Таким образом, обеспечивается синхронная работа клеточного автомата: сначала вычисляются изменения ЭА, после чего эти изменения применяются к ним. Использование балансирующего буфера является вторым шагом функции эволюции.

На рис. 6 представлено начальное тестовое состояние клеточного автомата симуляции разлива жидкости. Выбрано равномерное распределение некоторого уровня жидкости по всей заданной триангуляционной сеткой поверхности. Цвет, соответствующий высоте

жидкости для каждого треугольника, окрашивает всю поверхность равномерно.

Рис. 7 иллюстрирует результат работы клеточного автомата после десяти тысяч итераций. По яркости цвета определяется высота уровня жидкости. Очевидно, что симуляция работает реалистично.

Реализован функционал, позволяющий отследить самый высокий уровень воды на модели. В ходе эволюционных итераций автомат приходит к состоянию равновесия, и максимальное значение практически перестает изменяться спустя определенное количество итераций. Так, после десяти тысяч итераций автомат находится в состоянии равновесия.

Заключение

Использование триангуляционных сеток в качестве дискретного пространства для построения клеточно-автоматных моделей является весьма перспективным. Авторами продемонстрирован подход к построению триангуляционных решеток, аппроксимирующих реальные фрагменты рельефа местности. Разработаны алгоритмы генерации триангуляционных сеток на основе карт высот. Это позволяет моделировать и тестировать работу клеточных автоматов на произвольных поверхностях ландшафтного типа. Для построения уникальных клеточных автоматов в рамках конкретных моделей для заданных условий и расчетных областей созданы программные средства генерации триангуляционных сеток по картам высот, в качестве основного формата которых выбран формат .PNG в градациях серого.

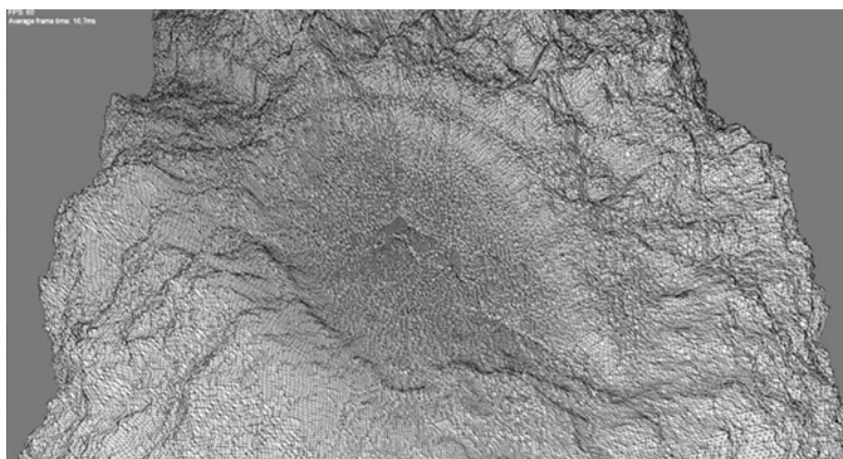


Рис. 6. Исходное тестовое состояние автомата, моделирующего разлив жидкости

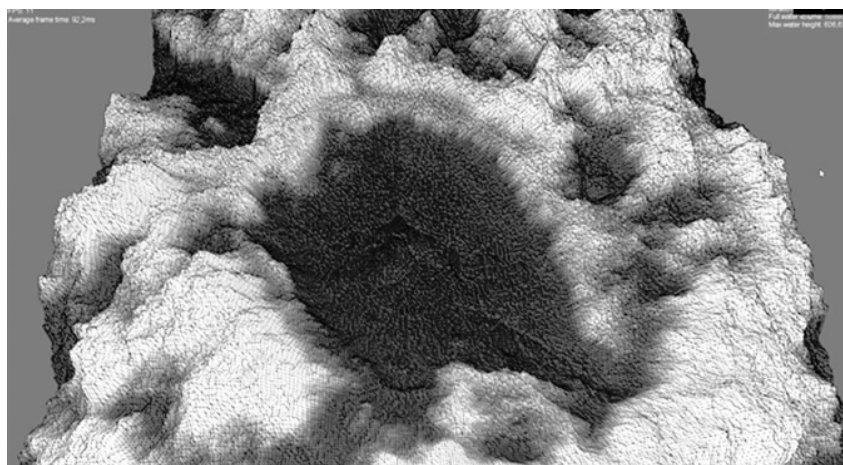


Рис. 7. Состояние автомата после десяти тысяч эволюций

Одной из основных проблем использования КА-моделей реальных процессов является создание клеточных автоматов с заданными свойствами. В работе [16] предлагается возможное решение проблемы определения масштабирующих коэффициентов, позволяющих построить клеточный автомат по физическому описанию явления и интерпретировать результаты работы модели в привычных физических понятиях, путем введения инвариантов КА-моделей — безразмерных характеристик процесса, не зависящих от способа его математического представления. В частности, приведены инварианты коэффициента диффузии для асинхронного КА диффузии (наивная диффузия), подтвержденные вычислительными экспериментами. Для КА разлива жидкости приходится ограничиться качественным сходством с предполагаемым процессом, так как систематического метода

построения КА-моделей по заданным параметрам на сегодняшний день не существует.

Авторами реализованы клеточные автоматы, имитирующие процессы диффузии и разлива жидкости на заданной поверхности ландшафтного типа. Средства визуализации работы КА и сбора статистики позволяют проводить оценку результатов работы моделей. В качестве среды разработки использована Visual Studio Community, язык программирования — C#, основной инструмент графической интерпретации — MonoGame. Для создания интуитивно понятного графического интерфейса приложения, в которое была интегрирована подсистема графической визуализации MonoGame Framework, выбрана система построения клиентских программ Windows — WPF, реализующая технологию разработки графических приложений. Пред-

ложены алгоритмы, позволяющие обзирать моделируемые объекты с разных ракурсов.

Литература

1. Alexandridis A. et al. A cellular automata model for forest fire spread prediction: The case of the wildfire that swept through Spetses Island in 1990 // *Applied Mathematics and Computation*. 2008. Vol. 204, Iss. 1. P. 191–201.
2. Von Neumann J. *Theory of self-reproducing automata*. Urbana: University of Illinois Press, 1966. 302 p.
3. Toffolli T., Margolus N. *Cellular Automata Machines*. USA: MIT Press, 1987. 279 p.
4. Bandman O. Comparative Study of Cellular automata Diffusion Models // *Lecture Notes in Computer Science*. 1999. Vol. 1662. P. 395–399.
5. Bode M. Interaction of Dissipative Solitons: Particle-Like Behavior of Localized structures in a Three-Component Reaction-Diffusion System // *Physica D*. 2002. Vol. 161. P. 45–66.
6. Евсеев А.А., Нечаева О.И. Клеточно-автоматное моделирование диффузионных процессов на триангуляционных сетках // *Прикладная дискретная математика*. 2009. № 4. С. 72–83.
7. Павлова А.В., Рубцов С.Е., Родионов П.Р. Использование клеточно-автоматных моделей в исследовании распространения пожара при разливе нефтепродуктов на поверхности почв // *Защита окружающей среды в нефтегазовом комплексе*. 2020. № 1. С. 54–59.
8. Матюшкин И.В., Заплетина М.А. Обзор по тематике клеточных автоматов на базе современных отечественных публикаций // *Компьютерные исследования и моделирование*. 2019. Т. 11, № 1. С. 9–57.
9. Балж Е.А., Ключкарев П.Г. Исследование характеристик лавинного эффекта обобщенных клеточных автоматов на основе графов малого размера // *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Г. Баумана*. 2016. № 4. С. 92–105.
10. Витвицкий А.А. Клеточные автоматы с динамической структурой для моделирования роста биологических тканей // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2014. Т. 17, № 4. С. 315–327.
11. Аристов А.О. Об элементах квазиклеточных сетей // *Горный информационно-аналитический бюллетень*. 2013. № 11. С. 322–331.
12. Скворцов А.В. Обзор алгоритмов построения триангуляции Делоне // *Вычислительные методы и программирование*. 2002. Т. 3. Вып. 1. С. 14–39.
13. Joe B. Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using local transformations // *Computer Aided Geometric Design*. 1991. Vol. 8. P. 123–142.
14. Lohner R. Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing front method. In: *Proc. of the 26th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Nevada, 1988. 287 p.
15. Dyn N., Lyche T., Schumaker L.L. Optimizing 3d triangulations using discrete curvature analysis / *Mathematical Methods in CAGD*: Oslo, 2000. Nashville, TN: Vanderbilt University Press. 2001. 258 p.
16. Бандман О.Л. Инварианты клеточно-автоматных моделей реакционно-диффузионных процессов // *Прикладная дискретная математика*. 2012. № 3 (17). С. 108–120.

References

1. Alexandridis, A. et al. A cellular automata model for forest fire spread prediction: The case of the wildfire that swept through Spetses Island in 1990. *Applied Mathematics and Computation*, 2008, vol. 204, iss. 1, pp. 191–201.
2. Von Neumann, J. *Theory of self-reproducing automata*. Urbana: University of Illinois Press, 1966. 302 p.
3. Toffolli, T., Margolus, N. *Cellular Automata Machines*. USA: MIT Press, 1987. 279 p.
4. Bandman, O. Comparative Study of Cellular automata Diffusion Models. *Lecture Notes in Computer Science*, 1999, vol. 1662, pp. 395–399.
5. Bode, M. Interaction of Dissipative Solitons: Particle-Like Behavior of Localized structures in a Three-Component Reaction-Diffusion System. *Physica D*, 2002, vol. 161, pp. 45–66.
6. Evseev, A.A., Nechaeva, O.I. Kletochno-avtomatnoe modelirovanie diffuzionnyh processov na triangulyacionnyh setkah [Cellular automaton modeling of diffusion processes on triangulation grids]. *Prikladnaya diskretnaya matematika* [Applied Discrete Mathematics], 2009, no. 4, pp. 72–83. (In Russian)
7. Pavlova, A.V., Rubtsov, S.E., Rodionov, P.R. Ispol'zovanie kletochno-avtomatnyh modelej v issledovanii rasprostraneniya pozhara pri razlive nefteproduktov na poverhnosti pochv [Using of cellular automata models in the study of fire spread during the spill of oil products on the surface of soils]. *Zashchita okruzhayushchej sredy v neftegazovom komplekse* [Environmental Protection in the Oil and Gas Complex], 2020, no. 1, pp. 54–59. (In Russian)
8. Vitvitsky, A.A. Kletochnye avtomaty s dinamicheskoy strukturoj dlya modelirovaniya rosta biologicheskikh tkanej [Cellular automata with dynamic structure to simulate the growth of biological tissues]. *Sibirskij zhurnal vychislitel'noj matematiki* [Siberian Journal of Computational Mathematics], 2014, vol. 17, no. 4, pp. 315–327. (In Russian)

9. Matyushkin, I.V., Zapletina, M.A. Obzor po tematike kletochnyh avtomatov na baze sovremennyh otechestvennyh publikacij [Cellular automata review based on modern domestic publication]. *Komp'yuternye issledovaniya i modelirovanie* [Computer research and modeling], 2019, vol. 11, no. 1, pp. 9–57. (In Russian)
10. Balk, E.A., Klyuchkarev, P.G. Issledovanie harakteristik lavinnogo effekta obobshchennyh kletochnyh avtomatov na osnove grafom malogo razmera [Small diameter Graf-based Investigation of Avalanche Effect Characteristic of Generalized Cellular Automata]. *Nauka i obrazovanie: nauchnoe izdanie MGTU im. N.G. Baumana* [Science and Education of Bauman MGSU], 2016. no. 4, pp. 92–105. (In Russian)
11. Aristov, A.O. Ob elementah kvazikletochnyh setej [About structural elements of quasi cellular nets]. *Gornyy informacionno-analiticheskij byulleten'* [Mining informational and analytical bulletin], 2013, no. 11, pp. 322–331. (In Russian)
12. Skvortsov, A.V. Obzor algoritmov postroeniya triangulyacii Delone [A review of algorithms for constructing Delaunay triangulation]. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye* [Computational methods and programming], 2002, vol. 3, no. 1, pp. 14–39. (In Russian)
13. Joe, B. Construction of three-dimensional Delaunay triangulations using local transformations. *Computer Aided Geometric Design*, 1991, vol. 8, pp. 123–142.
14. Lohner, R. Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing front method. In: *Proc. of the 26th AIAA Aerospace Sciences Meeting*. Nevada, 1988. 287 p.
15. Dyn, N., Lyche, T., Schumaker, L.L. Optimizing 3d triangulations using discrete curvature analysis. *Mathematical Methods in CAGD, Oslo, 2000*. Nashville, TN, Vanderbilt University Press. 2001.
16. Bandman, O.L. Invarianty kletочно-автоматных моделей реакционно-диффузионных процессов [Invariants Cellular Automata models of reaction-diffusion processes]. *Prikladnaja diskretnaja matematika* [Applied discrete mathematics], 2012, no. 3, pp. 108–120. (In Russian)