

МЕХАНИКА

УДК 539.3

DOI: 10.31429/vestnik-17-3-29-36

О ВЛИЯНИИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФАЗ ГЕТЕРОГЕННОГО
ОСНОВАНИЯ НА КОНТАКТНЫЕ НАПРЯЖЕНИЯ
ПРИ КОЛЕБАНИЯХ ШТАМПА С ТРЕНИЕМ

Беляк О. А., Суворова Т. В.

EFFECT OF INTERACTION OF HETEROGENEOUS BASE PHASES ON CONTACT
STRESSES AT PUNCH OSCILLATIONS WITH FRICTION

O. A. Belyak, T. V. Suvorova

Rostov State Transport University, Rostov-on-Don, Russia
e-mail: o_bels@mail.ru

Abstract. The dynamic contact problem of vibrations of a rigid punch on a semi-infinite heterogeneous foundation, consisting of a viscoelastic skeleton and a viscous fluid, is considered, taking into account friction in the contact area and phase interaction. The microstructure of the base is taken into account in the framework of the model of a heterogeneous medium, which is described by the Biot-Frenkel equations. The boundary value problem using the Fourier transform is reduced to an integral equation of the first kind with a difference kernel. After regularization the integral equation by explicitly identifying the singularity of its kernel, the solution is constructed approximately, while the numerical discretization of the contact area is carried out on the basis of the boundary element method. Approximate solutions are constructed that describe contact pressures and tangential displacements under the punch. The calculations were carried out for an oil-filled composite based on aromatic polyamide phenylone containing an aluminosilicate nanosized additive bentonite. The dependences of the propagation of surface waves with an increase in the viscosity and permeability of the base, the influence on the contact stresses of the oscillation frequency, porosity and permeability of a heterogeneous medium, and fluid viscosity are investigated. At low values, an increase in viscosity and a decrease in the permeability coefficient of the composite reduces the asymmetry of the distribution of contact stresses, and causes the maximum stress in the contact area to move during the oscillation period. At higher frequencies and higher viscosity, the effect of stress stabilization under the punch far from its edges is observed.

Keywords: dynamic contact problem, friction and oscillation in contact domain, interaction liquid and elastic foundation media.

Введение

В связи с широким применением полимерных композиционных материалов, обладающих антифрикционными свойствами, актуальной и практически не исследованной является задача изучения влияния динамических явлений, возникающих при вибрации в такой трибосистеме. Общепринято в качестве математической модели для изучения трибологических процессов использовать контактные задачи для оснований различных физических свойств. Контактные динамические задачи для упругих слоистых оснований исследованы в фундаментальных работах [1, 2], контактные задачи в квазистатической постановке о движении системы штампов по упру-

гим и вязкоупругим основаниям изучались в монографии [3], контактные задачи в квазистатической постановке при учете внутренней микроструктуры основания исследовались в работах [4, 5]. В работах авторов [6, 7] построено решение динамической контактной задачи о колебаниях жесткого штампа на полуограниченном вязкоупругом гетерогенном основании при учете трения в области контакта. При этом микроструктура основания учитывалась как в рамках модели микромеханики [6], так и модели среды Био–Френкеля [7]. Как развитие работы [7] в настоящей статье рассматривается влияние взаимодействия вязкого флюида и вязкоупругой матрицы двухфазного основания на напряженно-деформируемое состояние гетерогенной среды при колебаниях

Беляк Ольга Александровна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики Ростовского государственного университета путей сообщения; e-mail: o_bels@mail.ru.

Суворова Татьяна Виссарионовна, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры высшей математики Ростовского государственного университета путей сообщения; e-mail: suvorova_tv111@mail.ru.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-08-00260-а).

штампа на ее поверхности. Применением преобразования Фурье краевая задача сведена к интегральному уравнению первого рода, для решения которого предложен метод граничных элементов. Исследована зависимость контактных напряжений от частоты колебаний, пористости и проницаемости гетерогенной среды и вязкости флюида.

1. Постановка и решение контактной задачи

Рассмотрим установившийся режим колебаний с частотой ω жесткого штампа с плоским основанием на поверхности гетерогенного полупространства при учете трения в области контакта. Считаем, что штамп и граница полупространства непроницаемы для жидкой фазы. В декартовой системе координат плоская область, занятая гетерогенной средой $|x_1| < \infty$, $x_2 \leq 0$, представляет собой вязкоупругую матрицу, поры которой заполнены вязким флюидом. Колебания штампа шириной $2a$ вызваны приложенной к нему нагрузкой $\mathbf{P} = \{0, Pe^{-i\omega t}\}$. Будем считать, что в области контакта $|x_1| \leq a$ нормальные и касательные напряжения связаны законом Амонтона–Кулона. Для учета внутренней микроструктуры основания используем модель гетерогенной двухфазной среды Био–Френкеля в терминах перемещений [8]:

$$\begin{aligned} N\Delta\mathbf{u} + \nabla((A+N)\nabla\mathbf{u} + Q\nabla\mathbf{v}) + \\ + \omega^2(\rho_{11}\mathbf{u} + \rho_{12}\mathbf{v}) + i\omega b(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0, \\ \nabla(Q\nabla \cdot \mathbf{u} + R\nabla\mathbf{v}) + \\ + \omega^2(\rho_{12}\mathbf{u} + \rho_{22}\mathbf{v}) - i\omega b(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где A , N , Q , R , ρ_{11} , ρ_{12} , ρ_{22} — механические характеристики двухфазной среды [8], e_{ij} , ε_{ij} , $i, j = 1, 2$ — тензоры деформации, соответствующие векторам перемещений твердой фазы $\mathbf{u}\{u_1, u_2\}$ и жидкой фазы $\mathbf{v}\{v_1, v_2\}$, $e = \nabla\mathbf{u}$, $\varepsilon = \nabla\mathbf{v}$, $b = m^2\eta k_o^{-1}$, а η , k_o — динамическая вязкость флюида и проницаемость среды соответственно. Полный тензор напряжений, действующий в пороупругой среде — $\Gamma_{ij} = \sigma_{ij}^s + \delta_{ij}\sigma^f$, $i, j = 1, 2$, $\sigma_{ij}^s = Ae\delta_{ij} + 2Ne_{ij} + Q\varepsilon\delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$ — тензор напряжений, действующий на вязко-упругий скелет, $\sigma^f = Qe + R\varepsilon$ — давления, действующие на жидкость в порах, δ_{ij} — символ Кронекера. Вязкость матрицы композита учтена в рамках модели частотно-независимого внутреннего трения. В этом случае модуль сдвига имеет вид $N \sim N(1 + i\beta)$, где величина β пропорциональна коэффициенту потерь

вязкоупругого материала и может быть определена экспериментально. Вследствие этого присутствует малая комплексная составляющая в коэффициентах уравнения (1.1) N , A , Q , R [9].

Поскольку режим колебаний установившийся, отделим временной множитель и изложение будем вести для безразмерных амплитудных значений соответствующих функций, при этом линейные размеры отнесены к полуширине штампа, а напряжения — к модулю сдвига N матрицы. Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{21}(x_1, 0) = \mu \Gamma_{22}(x_1, 0), \quad |x_1| \leq 1, \\ u_2(x_1, 0) = v_2(x_1, 0) = \delta, \quad |x_1| \leq 1, \\ \Gamma_{22}(x_1, 0) = 0, \quad u_2(x_1, 0) = v_2(x_1, 0), \\ |x_1| > 1, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где δ — заданная осадка штампа, μ — коэффициент трения. Замыкают постановку краевой задачи (1.1)–(1.2) условия излучения волн на бесконечность. Будем разыскивать контактные давления и горизонтальные смещения $u_1(x_1, 0)$ под штампом.

Далее представим перемещения в виде двух скалярных и векторного потенциалов. В результате уравнения (1.1) расщепятся на три волновые уравнения, а потенциалы будут соответствовать трем типам волн, распространяющихся в гетерогенной среде [10]. После применения к соотношениям (1.1)–(1.2) преобразования Фурье по переменной x_1 построим $\mathbf{K}(\alpha, x_2)$, $\mathbf{K}_v(\alpha, x_2)$ — матрицы Грина для перемещений скелета и флюида соответственно [10]. Окончательно, используя обратное преобразование Фурье, получим связь перемещений и напряжений двухфазной среды

$$\begin{aligned} u(x_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Upsilon} K(\alpha, 0) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \\ v(x_1, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Upsilon} K_v(\alpha, 0) \mathbf{Q}(\alpha) e^{-i\alpha x_1} d\alpha, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$Q(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x_1) e^{i\alpha x_1} dx_1,$$

$$q(x_1) = \{\Gamma_{21}(x_1), \Gamma_{22}(x_1)\},$$

где α — параметр преобразования Фурье, а контур Υ выбирается в соответствии с условиями излучения волн на бесконечность. После удовлетворения граничных условий (1.2) в соотношениях (1.3) получаем интегральное уравнение с разностным ядром относительно

неизвестного нормального контактного давления

$$\int_{-1}^1 k(x_1 - \xi) q_2(\xi) d\xi = \delta, \tag{1.4}$$

$$\Gamma_{22}(x_1, 0) = q_2(x_1), \quad |x_1| \leq 1.$$

Ядро интегрального уравнения (1.4) имеет вид

$$k(x_1 - \xi) = \int_{\Upsilon} K(\alpha) e^{i(x_1 - \xi)\alpha} d\alpha, \tag{1.5}$$

$$K(\alpha) = \mu K_{21}(\alpha) + K_{22}(\alpha),$$

где функции $K_{ij}(\alpha)$, $i, j = 1, 2$ — элементы матрицы Грина для гетерогенного полупространства с непроницаемой границей, их краткий вид и свойства описаны в [7, 10]. Приведем асимптотическое поведение этих функций на бесконечности:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_{ii}(\alpha) = \frac{d_{ii}}{|\alpha|},$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_{ij}(\alpha) = \frac{d_{ij}}{\alpha}, \quad i \neq j.$$

Выражение для d_{ij} , $i, j = 1, 2$ зависят от механических характеристик основания и не приводится в виду громоздкости.

Аналитико-численные методы решения интегральных уравнений с разностным ядром развиты в работах школы академика Бабешко В.А. [1, 2]. В настоящей работе численная реализация интегрального уравнения (1.4) с разностным ядром (1.5) выполнена на основе метода граничного элемента [11], причем предварительно выделяется логарифмическая особенность в интегральном уравнении (1.4), ядро которого приобретает следующий вид [7]:

$$k(x_1 - \xi) = I(x_1 - \xi) + K_0(R|x_1 - \xi|)/\pi, \tag{1.6}$$

$$I(x_1 - \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Upsilon} \left(K(\alpha) - \frac{d_{22}}{\sqrt{\alpha^2 + R^2}} \right) \times e^{i(x_1 - \xi)\alpha} d\alpha,$$

$K_0(z)$ — функция Макдональда нулевого порядка [12].

Проведем дискретизацию области контакта, выбрав точки разбиения x_{1i} , $i = \overline{1, N}$, равномерно распределенными с шагом $h = 2/N$ на отрезке $[-1 + h/2, 1 - h/2]$, функция $q_2(x_1)$

постоянна в пределах каждого из элементов разбиения $q_2(x_1)|_{x_{1i} < x < x_{1i+1}} = q_2(x_{1i}) = q_i$, $i = \overline{1, N}$. В качестве узлов выбраны середины соответствующих отрезков разбиения $[x_{1i}; x_{1i+1}]$, $i = \overline{1, N}$. Таким образом, решение интегрального уравнения (1.4) сводится к конечной системе линейных алгебраических уравнений N порядка относительно неизвестных q_i , $i = \overline{1, N}$. Система обладает квазидиагональной матрицей

$$\sum_{m=1}^N r_{mn} q_n = \delta/h; \quad m, n = 1, 2, \dots, N, \tag{1.7}$$

$$r_{mn} = \begin{cases} I(x_{1m} - \xi_n) + d_0 (Erf(z_2) - Erf(z_1))/h, & m \neq n, \\ I(x_{1n} - \xi_n) + 2d_{22} Erf(\sqrt{hR}/2)/h, & m = n, \end{cases}$$

$$d_0 = \frac{\sqrt{2}\pi}{R} d_{22} \text{sign}(x_{1m+1} - \xi_n),$$

$$z_1 = \sqrt{(x_{1m} - \xi_n)R};$$

$$z_2 = \sqrt{(x_{1m+1} - \xi_n)R},$$

где $Erf(z)$ — интеграл вероятности [13]. Интеграл $I(x_{1m} - \xi_n)$ вычисляется интегрированием по контуру Υ в комплексной плоскости. Контур интегрирования выбирается в соответствии с условиями излучения так, чтобы перемещения поверхности гетерогенного полупространства убывали при удалении от вибрирующего штампа. Этот выбор производится после нахождения полюсов и точек ветвления подынтегральных функций в (1.6) и их анализа при стремлении внутреннего трения среды к нулю. Отметим, что для анализа скорости сходимости процесса оценивались элементы невязки для количества разбиений N и $3N$. Измельчение сетки производилось до относительного значения невязки, меньшего чем 10^{-5} .

Горизонтальные смещения под штампом определялись через элементы матрицы Грина среды $K_{11}(\alpha)$, $K_{12}(\alpha)$ и контактные давления

$$u_1(x_1) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^N q_n \int_{\xi_n}^{\xi_{n+1}} \int_{\Upsilon} (\mu K_{11}(\alpha) + K_{12}(\alpha)) \times e^{i\alpha(x_1 - \xi)} d\alpha d\xi, \quad \xi_n \in (-1, 1).$$

Таблица 1. Зависимость волновых чисел ζ_1 , ζ_2 от фрикционного взаимодействия фаз

m	$\eta/k_o \cdot 10^{10} \text{ кгм}^{-3}\text{с}^{-1}$	ζ_1	ζ_2
0.05	0	0,044950 – 0,001094i	–0,134290 – 0,018495i
	0,5	0,044918 – 0,00112i	–1,838010 – 2,420243i
	3,0	0,044918 – 0,001113i	–4,497266 – 5,932086i
	5,5	0,044918 – 0,001113i	–6,088722 – 8,032541i
	8,0	0,044918 – 0,001113i	–7,343001 – 9,687817i
	10,5	0,044918 – 0,001113i	–8,412300 – 11,098913i
	12,0	0,044918 – 0,001113i	–8,993057 – 11,865290i
0.2	0	0,041009 – 0,000344i	–0,070320 – 0,004072i
	0,5	0,042715 – 0,001046i	–3,962442 – 4,451544i
	3,0	0,042715 – 0,001046i	–9,705332 – 10,904571i
	5,5	0,042715 – 0,001046i	–13,141004 – 14,764927i
	8,0	0,042715 – 0,001046i	–15,848612 – 17,807204i
	10,5	0,042715 – 0,001046i	–18,156845 – 20,400733i

2. Результаты численного анализа

Расчеты проводились для маслонаполненного композита на основе ароматического полиамида фенилона ФС-2, содержащего алюмосиликатную наноразмерную добавку бентонит. Такая гетерогенная среда имеет поры, насыщенные вязкой фракцией (цилиндровое или индустриальное масло), кроме этого, содержит глинистые наночастицы. Прилипание глинистых частиц к стенкам пор увеличивает поверхность порового пространства и шероховатость стенок, что, в свою очередь, усиливает вязкую диссипацию вследствие фрикционных сил между матрицей и флюидом. Экспериментальное определение коэффициента взаимодействия фаз, проницаемости такого композита является весьма сложной и трудоемкой, а подчас и недостижимой в современных условиях задач. В работе [14] на основании метода конечных элементов моделировались зависимости коэффициента проницаемости от извилистости пор и формы частиц, образующих упругий скелет. Известны данные для искусственных и природных сред, содержащих глинистые частицы, что коэффициент проницаемости находится в достаточно широком интервале 10^{-14} – 10^{-10} м^2 [14–17]. В соответствии с изложенным выше, проведем исследования для вариации степени взаимодействия фаз, вязкости флюида в порах. Модули объемного сжатия матрицы композита, состоящей из фенилона с добавлением 5 % масс. бентонита [18], в зависимости от пористости были рассчитаны на основе метода самосогласования [19]. При расчетах принято $K_s = 6,52 \text{ ГПа}$, $K_f = 2 \text{ ГПа}$, $N = 2,399 \text{ ГПа}$,

$\rho_s = 1,4 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_f = 0,95 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $K_b(m = 0,05) = 5,59 \text{ ГПа}$, $K_b(m = 0,1) = 4,78 \text{ ГПа}$, $K_b(m = 0,15) = 4,07 \text{ ГПа}$, $K_b(m = 0,2) = 3,44 \text{ ГПа}$, извилистость поровых каналов соответствовала случаю частиц сферической формы [14], $\omega = 50 \text{ Гц}$, $\mu = 0,3$, $\beta = 0,05$. Основное взаимодействие фаз определяется в модели Био параметром b , входящим в определяющие уравнения (1.1), выражение которого показывает его пропорциональность динамической вязкости жидкой фазы, пористости и обратную пропорциональность коэффициенту проницаемости. При этом влияние динамического коэффициента ρ_{12} по сравнению с влиянием параметра b на напряженно-деформируемое состояние среды на несколько порядков меньше. Как показал численный эксперимент, при увеличении параметра b , т.е. при уменьшении коэффициента проницаемости или увеличении вязкости жидкой фазы, изменяется динамика среды. Быстрая продольная волна мало изменяет свою скорость, но при этом ее амплитуда затухает быстрее. Наибольшее изменение при этом приобретает медленная продольная волна, ее скорость намного снижается, а затухание быстро нарастает. Скорости поверхностных волн в гетерогенном полупространстве обратно пропорциональны полюсам ζ_1 , ζ_2 ядра интегрального уравнения (1.4) также изменяются. Их поведение при изменении параметра η/k_o и пористости m иллюстрирует табл. 1.

Таким образом, изменяется характер распространения медленной поверхностной волны, которая является результатом движения жидкой фракции в порах и определяется полюсом, расположенным вблизи волнового чис-

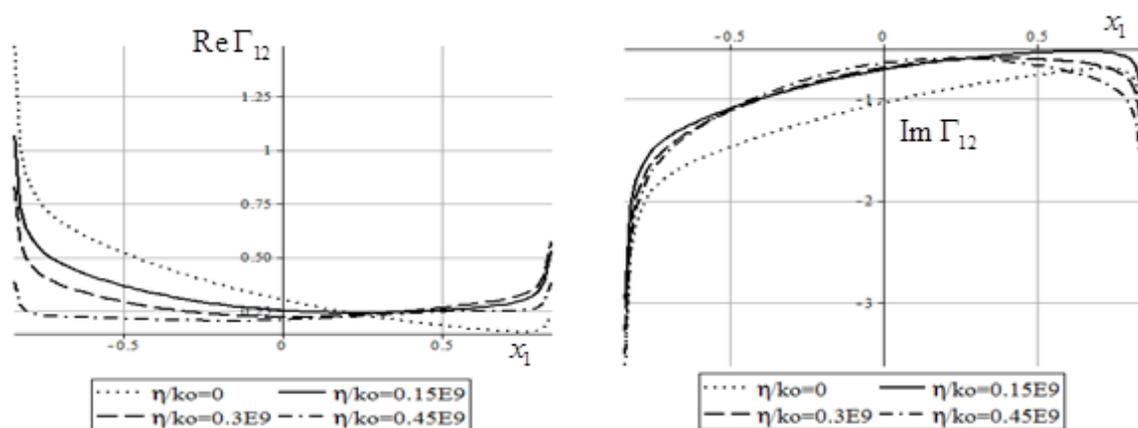


Рис. 1. Распределение действительной (слева) и мнимой (справа) частей касательных напряжений под штампом при изменении вязкости и проницаемости основания

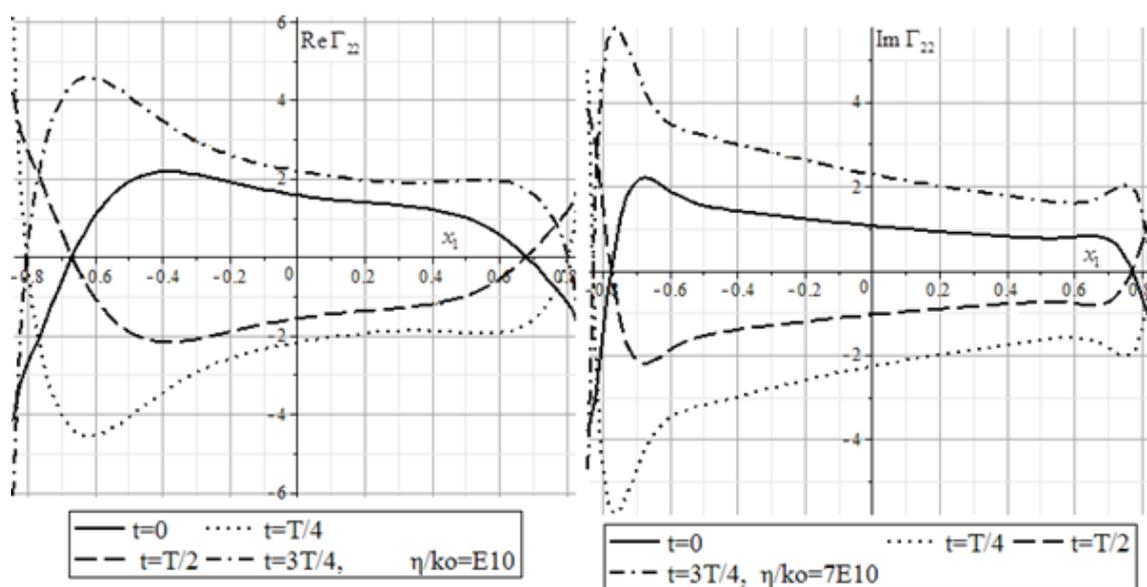


Рис. 2. Изменение нормальных напряжений за период колебаний T , $\omega = 50$ Гц

ла, соответствующего медленной продольной волне. С ростом вязкости флюида и уменьшении коэффициента проницаемости скорость медленной поверхностной волны уменьшается и ее затухание в значительной степени увеличивается. Этот эффект с ростом пористости приобретает все большую выраженность. Скорость быстрой поверхностной волны практически остается неизменной, в небольшой степени увеличивается ее затухание.

Динамические особенности поведения гетерогенной среды при возрастании вязкости флюида в ее порах дают возможность планировать дальнейший численный эксперимент.

Как показали численные эксперименты, распределение касательных и нормальных

напряжений под штампом изменяется с ростом вязкости флюида, заполняющего поры, и уменьшением коэффициента проницаемости составной среды. Это иллюстрирует рис. 1, на котором приведены графики действительной и мнимой частей касательных напряжений.

При малых значениях величины η/k_o увеличение вязкости и убывание коэффициента проницаемости материала уменьшает асимметрию распределения контактных напряжений и вызывает перемещение максимума напряжений в зоне контакта в течение периода, это иллюстрирует рис. 2.

При увеличении частоты колебаний влияние вязкости изменяет распределение напря-

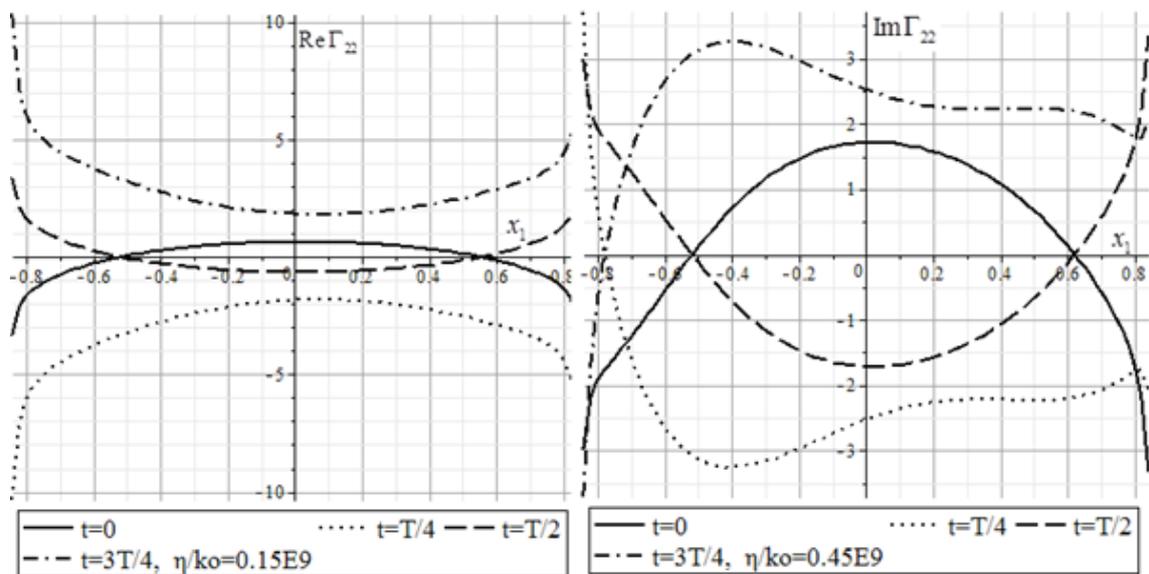


Рис. 3. Изменение нормальных напряжений за период колебаний T , $\omega = 250$ Гц

жений под штампом, что иллюстрирует рис. 3. При дальнейшем возрастании величины η/k_0 наступает стабилизация контактных напряжений, и они практически не изменяются на удалении от краев штампа.

Следует отметить, что при малых частотах и малой вязкости изменения контактных давлений более существенны. При больших частотах и большой вязкости наблюдается эффект стабилизации напряжений под штампом вдали от его краев.

Заключение

Результаты проведенного численного эксперимента показывают, что контактные напряжения и тангенциальные перемещения под штампом для гетерогенного основания зависят не только от коэффициента трения в области контакта, но и существенным образом от частоты колебаний, пористости, проницаемости среды и вязкости флюида. При определении антифрикционных свойств композитного основания необходим учет вязкости жидкости и проницаемости среды, а на основании анализа предложенной в настоящей статье математической модели возникает возможность улучшения трибологических характеристик композита с помощью выбора его проницаемости, вязкости флюида.

Литература

1. Бабешко В.А., Евдокимова О.В., Бабешко О.М. Блочные элементы в контактных за-

дачах с переменным коэффициентом трения // ДАН. 2018. Т. 480. № 5. С. 537–541.

2. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Зинченко Ж.Ф. Динамика неоднородных линейно-упругих сред. М.: Наука, 1989. 344 с.
3. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю., Морозов А.В., Степанов Ф.И. Трение эластомеров. Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2017. 204 с.
4. Суворова Т.В., Беляк О.А. Контактные задачи для пористоупругого композита при наличии сил трения // Прикладная математика и механика. 2020. Т. 84. № 4. С. 522–532.
5. Беляк О.А., Суворова Т.В. Влияние микроструктуры основания на силы трения при движении плоского штампа // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2018. Т. 15. № 3. С. 25–31.
6. Беляк О.А., Суворова Т.В. Учет трения в области контакта при колебаниях жесткого штампа на поверхности полуграниченной среды // Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2019. Т. 16. № 3. С. 33–39.
7. Колесников В.И., Беляк О.А., Колесников И.В., Суворова Т.В. О математической модели для прогнозирования трибологических свойств маслonaполненных композитов при вибрации // ДАН. Физика, техн. науки. 2020. Т. 491. С. 44–47.
8. Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде, Период. сб. переводов иностр. статей. 1963. Вып. 6. № 82. С. 103–134.
9. Chao-Lung Yeh, Wei-Cheng Lo, Chyan-Deng Jan, Chi-Chin Yang. Reflection and refraction

- of obliquely incident elastic waves upon the interface between two porous elastic half-spaces saturated by different fluid mixtures // *Journal of Hydrology*. 2010. Vol. 395. P. 91–102.
10. Колесников В.И., Суворова Т.В. Моделирование динамического поведения системы «верхнее строение железнодорожного пути – слоистая грунтовая среда». М.: ВИНТИ РАН, 2003. 232 с.
 11. Бребия К., Теллес Ж., Вробел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. 524 с.
 12. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1974. Т. 2. 296 с.
 13. Янке Е., Эмде Ф., Лёви Ф. Специальные функции. М.: Наука, 1964. 344 с.
 14. Wu A, Yang B, Xi Y, Jiang H. Pore structure of ore granular media by computerized tomography image processing // *Journal of Central South University of Technology*. 2007. Vol. 14. Iss. 2. P. 220–224.
 15. Куршин А.П. Закономерности изменения проницаемости пористых сред при фильтрационных течениях // *Ученые записки ЦАГИ*. 2008. Т. XXXIX. № 1–2. С. 125–135.
 16. Genuchten M., Pachepsky Y. Hydraulic properties of unsaturated soils // *Encyclopedia of Agrophysics*. 2011. P. 368–376.
 17. Smeulders D. M. J. On wave propagation in saturated and partially saturated porous media. Eindhoven. Technische Universiteit Eindhoven, 1992. 133 p.
 18. Zheng Y., Zaoui A. Mechanical behavior in hydrated Na-montmorillonite clay // *Physica A*. 2018. Vol. 505. P. 582–590.
 19. Belyak O.A., Suvorova T.V. Modeling stress deformed state upon contact with the bodies of two-phase microstructure // *Solid State Phenomena*. 2020. Vol. 299. P. 124–129.
- ### References
1. Babeshko, V.A., Evdokimova, O.V., Babeshko, O.M. Blochnyye elementy v kontaktnykh zadachakh s peremennym koeffitsiyentom treniya [Block elements in contact problems with a variable friction coefficient]. *Doklady akademii nauk* [Doklady Physics], 2018, vol. 63, no. 6, pp. 239–243. DOI: 10.7868/S0869565218050067 (In Russian)
 2. Babeshko, V.A., Glushkov, E.V., Zinchenko, J.F. *Dinamika neodnorodnykh lineyno-uprugikh sred* [Dynamics of heterogeneous linearly elastic media]. Nauka, Moscow, 1989. (In Russian)
 3. Goryacheva, I.G. Makhovskaya, Yu.Yu., Morozov, A.V., Stepanov, F.I. *Treniye elastomerov* [Friction of elastomers]. Institute of Computer Research, Moscow–Izhevsk, 2017. (In Russian)
 4. Suvorova, T.V., Belyak, O.A. Kontaktnye zadachi dlya poristoupругogo kompozita pri nalichii sil treniya [Contact problems for porous composite in the presence of friction forces]. *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied mathematics and mechanics], 2020, vol. 84, no. 4, pp. 522–532. (In Russian)
 5. Belyak, O.A., Suvorova, T.V. Vliyaniye mikrostruktury osnovaniya na sily treniya pri dvizhenii ploskogo shtampa [The influence of the base microstructure on the friction forces during the movement of a flat punch]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2018, vol. 15, no. 3, pp. 25–31. (In Russian)
 6. Belyak O.A., Suvorova T.V. Uchet treniya v oblasti kontakta pri kolebaniyah zhestkogo shtampa na poverhnosti poluogranichennoj sredy [Accounting for the friction in the contact area with oscillation of a rigid punch on surface a semi-infinite medium]. *Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov Chernomorskogo ekonomicheskogo sotrudnichestva* [Ecological Bulletin of Research Centers of the Black Sea Economic Cooperation], 2019, vol. 16, no. 3, pp. 33–39. (In Russian)
 7. Kolesnikov, V.I., Belyak, O.A., Kolesnikov, I.V., Suvorova, T.V. About mathematical model for predictive the tribological properties of oil. *Doklady Physics*, 2020, vol. 65, no. 4, pp. 149–152. DOI: 10.1134/S1028335820040060.
 8. Bio, M.A. Mekhanika deformirovaniya i rasprostraneniya akusticheskikh voln v poristoj srede [Mechanics of deformation and propagation of acoustic waves in a porous medium]. *Period. sb. perevodov inostr. statej* [Period. collection of translations of foreign. articles], 1963, no. 82, iss. 6, pp. 103–134. (In Russian)
 9. Chao-Lung, Yeh, Wei-Cheng, Lo, Chyan-Deng, Jan, Chi-Chin, Yang. Reflection and refraction of obliquely incident elastic waves upon the interface between two porous elastic half-spaces saturated by different fluid mixtures. *Journal of Hydrology*, 2010, vol. 395, pp. 91–102. DOI:10.1016/j.jhydrol.2010.10.018
 10. Kolesnikov, V.I., Suvorova, T.V. *Modelirovanie dinamicheskogo povedeniya sistemy “verhnee stroenie zheleznodorozhnogo puti - sloistaya gruntovaya sreda”* [Modeling the dynamic behavior of the system “railway track superstructure – layered soil medium”]. VINITI RAS, Moscow, 2003. (In Russian)
 11. Brebbia, C.A., Telles, J., Wrobel, L. *Boundary Element Methods – Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, 1984.
 12. Bateman, G., Erdelyi, A. *Higher transcendental functions*. McGraw-Hill Book Company, vol. I–III, 1953.
 13. Janke, E., Emde, F., Lesch, F. *Spetsialnyye funktsii* [Special functions]. Nauka, Moscow, 1964. (In Russian)
 14. Wu, A., Yang, B., Xi, Y., Jiang, H. Pore structure of ore granular media by computerized tomography image processing. *Journal of Central South University of Tech-*

- nology*, 2007, vol. 14, iss. 2, pp. 220–224. DOI:10.1016/j.compscitech.2018.07.038
15. Kurshin, A.P. Zakonomernosti izmeneniya pronicaemosti poristyh sred pri fil'tracionnyh techeniyah [Regularities of the change in the permeability of porous media during filtration flows]. *Uchenye zapiski CAGI* [TsAGI scientific notes], 2008, vol. XXXIX, no. 1–2, pp. 125–135. (In Russian)
 16. Genuchten, M., Pachepsky, Y. Hydraulic properties of unsaturated soils. *Encyclopedia of Agrophysics*, 2011, pp. 368–376. DOI:10.1007/978-90-481-3585-1.69.
 17. Smeulders, D.M.J. *On wave propagation in saturated and partially saturated porous media*. Technische Universiteit Eindhoven, 1992.
 18. Zheng, Y., Zaoui, A. Mechanical behavior in hydrated Na-montmorillonite clay. *Physica A*, 2018, vol. 505, pp. 582–590. DOI: 10.1016/j.physa.2018.03.093.
 19. Belyak, O.A., Suvorova, T.V. Modeling stress deformed state upon contact with the bodies of two-phase microstructure. *Solid State Phenomena*, 2020, vol. 299, pp. 124–129. DOI: 10.4028/www.scientific.net/SSP.299.124

© Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества, 2020

© Беляк О. А., Суворова Т. В., 2020

Статья поступила 31 июля 2020 г.