

## Ф И З И К А

УДК 539.2/.6

DOI: 10.31429/vestnik-17-3-48-55

ОБ ОДНОЙ ЭМПИРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОГО  
ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ

Головина Н. Я.

ON ONE EMPIRICAL MODEL OF NONLINEAR DEFORMATION OF ELASTOPLASTIC  
MATERIALS

N. Y. Golovina

Industrial University of Tyumen, Tyumen, Russia  
e-mail: ntgolovina@rambler.ru

*Abstract.* The idea develops that at different sections of the strain-stress curve, the elastoplastic properties of materials are determined by different deformation mechanisms and are described by different relations between strain and stress. Nonlinear strain-stress model of plastic material without hardening is considered, for which existence of two fundamentally different sections of non-zero length on strain-stress curve is postulated. The first section corresponds to Hooke's linear law. The boundary of the first is the point of the proportionality limit. The plastic deformation section begins behind this point and ends with another characteristic point of the strain-stress curve – the point of ultimate strength. In the second section of the strain-stress curve, the relationship between strain and stress is determined by power law. Using the example of a sample of 30 experimental points of the steel deformation curve, an engineering deformation curve corresponding to the formulated law 20XГР constructed. Experimental data are processed using the standard least squares method. To accelerate the search for extreme point coordinates in a two-dimensional area, the compression operator method is used. The standard deviation for the proposed empirical law from the corresponding sample of experimental points was  $S_0 = 0.02$ . The obtained accuracy allows using the formulated empirical model in practical engineering calculations.

*Keywords:* Ramberg-Osgood law, strain curves of plastic materials, experimental data processing.

## Введение

Одна из первых в мире монографий, где наиболее полно отражена механическая теория пластических деформаций и разрушения твердых тел на тот период времени, была опубликована в 1927 г. А.Л. Надаи [1, 2]. Автор изложил результаты многолетних экспериментальных исследований в области теории упругости и пластичности, проведенных лично и под руководством Л. Прандтля. Труды Надаи послужили основой для дальнейшего развития теории пластичности и, в частности, для математического моделирования упругих и прочностных характеристик материалов. Фундаментальный вклад в создание деформационной теории пластичности внес А.А. Ильюшин [3]. В своей работе он дал математически строгое и экспериментально доказанное описание основных механических свойств металлов за пределами упру-

гости: нелинейность отношений напряжение–деформация, деформационное упрочнение и различие в законах напряжения–растяжения; он также предложил надежные методы для расчета основных элементов конструкции и механизмов [3].

В настоящее время разработан обширный набор математических моделей нелинейного поведения упругопластических материалов. Большинство аналитических исследований основаны на модели Рамберга–Осгуда [4], которую они разработали в 1943 г. Уравнение закона Рамберга–Осгуда было постулировано для описания нелинейной связи деформации и напряжения для материалов, кривые деформации которых имеют только зону пластичности. Рамберг и Осгуд считали, что традиционное описание кривых деформирования металла по двум параметрам (модуль Юнга и условный предел текучести) будет недоста-

Головина Наталья Яковлевна, канд. тех. наук, доцент кафедры «Эксплуатация транспортных и технологических машин» филиала Тюменского промышленного университета в г. Сургуте; e-mail: ntgolovina@rambler.ru.

точным для эффективного проектирования материала вне рамок линейного закона Гука. Эта модель популярна среди ученых, занимающихся моделированием свойств материалов [5–11], а также среди инженеров, решающих задачи проектирования конструкций из пластичных материалов [12–14].

### 1. Классическая модель Рамберга–Осгуда

Классическая модель Рамберга–Осгуда формулируется как трехпараметрическая функция деформации от напряжения

$$\varepsilon = A\sigma + B\sigma^\eta \quad (1.1)$$

где  $\varepsilon = f(\sigma, A, B, \eta)$  — деформация как функция напряжения  $\sigma$  и трех параметров  $A, B, \eta$ , отражающих свойства материала. Отметим, что параметр  $\eta$  — безразмерный, а параметры  $A, B$  имеют размерность.

Используем безразмерную форму записи закона деформирования, удобную при сравнительном анализе достоинств и недостатков моделей деформирования и для сопоставления с экспериментальными данными. Для этого выберем точку абсолютного максимума на экспериментальной и теоретической кривой деформирования и назовем её точкой предела прочности с координатами  $(\varepsilon_c, \sigma_c)$ . Отбросим все точки, лежащие справа от точки предела прочности, как не отражающие свойств неразрушенных материалов. Нормируем напряжения  $\sigma$  на напряжение предела прочности  $\sigma_c$ :

$$\sigma^* = \frac{\sigma}{\sigma_c}, \quad (1.2)$$

а деформации  $\varepsilon$  — на деформацию предела прочности  $\varepsilon_c$ :

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_c}. \quad (1.3)$$

Закон деформирования Рамберга–Осгуда (1.1) в безразмерных переменных приводится к виду

$$\varepsilon^* = A^*\sigma^* + B^*(\sigma^*)^\eta, \quad (1.4)$$

где нормированные параметры связаны с ненормированными соотношениями

$$\begin{aligned} A^* &= \frac{A\sigma_c}{\varepsilon_c}, \\ B^* &= \frac{B}{\varepsilon_c}\sigma_c^\eta. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Теперь все параметры, характеризующие свойства материала, являются безразмерными. Соответственно, все кривые деформирования, включая экспериментальные, для всех материалов имеют две общие точки с безразмерными координатами  $(0;0)$  и  $(1;1)$ .

Тогда, с учетом (1.4), для нормированного предела прочности, т.е. в точке  $(1;1)$ , получим

$$\varepsilon_1^* = A^* + B^* = 1. \quad (1.6)$$

Таким образом, между парой параметров  $A, B$  установлена универсальная связь (1.6)

$$\varepsilon^* = A^*\sigma^* + (1 - A^*)(\sigma^*)^\eta.$$

С учетом связи (1.6) дадим определение касательного модуля для закона Рамберга–Осгуда, как производную напряжения по деформации

$$\begin{aligned} E^* &= \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = \\ &= \frac{1}{\left[A^* + \eta(1 - A^*)(\sigma^*)^{\eta-1}\right]} > 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Из определения касательного модуля следует естественное определение модуля упругости  $E_0^*$  в точке  $(0,0)$

$$E_0^* = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = \frac{1}{A^*}. \quad (1.8)$$

Из определения касательного модуля (1.7) следует естественное определение теоретической прочности

$$E_1^* = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = 0. \quad (1.9)$$

Требование (1.9) является следствием предположения о существовании точки абсолютного максимума у кривой деформирования и вытекающего из него выбора нормировки напряжений и деформаций на их значения в точке абсолютного максимума. Нетрудно убедиться, что требование (1.9) не может быть удовлетворено точно в рамках модели (1.4)–(1.7).

Подводя итоги, можно констатировать:

– классический закон Рамберга–Осгуда несовместим с определением теоретической прочности (1.9);

– классический закон Рамберга–Осгуда определяет касательный модуль как строго монотонно убывающую функцию, что эквивалентно утверждению, что характерная точка

кривой деформирования, предел пропорциональности, совпадает с начальной точкой кривой деформирования, т.е. линейный участок в классическом законе Рамберга–Осгуда отсутствует.

В данной статье будет рассмотрена альтернативная модель деформирования пластичных материалов без упрочнения.

## 2. Модифицированная модель Рамберга–Осгуда

Под «модифицированной моделью Рамберга–Осгуда» будем понимать эмпирическую модель, определяющую напряжение как функцию деформации, по-разному зависящее от деформации на двух участках кривой деформирования. На первом участке  $0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^*$  постулируется строго линейный закон, так как на этом участке не происходит никаких разрывов упругих связей. На втором участке  $\varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1$  постулируется степенной закон, аналогично закону Рамберга–Осгуда, но связывающий не деформацию с напряжением, а наоборот, напряжение с деформацией.

Первый отрезок кривой деформирования — строго линейный, с постоянным модулем упругости

$$E_0^* = \frac{d\sigma^*}{d\varepsilon^*} = \frac{\sigma_e^*}{\varepsilon_e^*}.$$

Второй участок определяет процесс нелинейного процесса деформирования, при котором происходят микроскопические разрывы упругих связей в материале. Для второго участка кривой деформирования становится удобным введение промежуточной переменной

$$0 \leq \left( \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right) \leq 1.$$

Тогда математическое описание кривой деформирования становится следующим:

$$\sigma^* = \begin{cases} E_0^* \varepsilon^*, & 0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^*, \\ E_0^* \varepsilon^* + D \left( \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^\eta, & \varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1, \end{cases}$$

$$(\sigma^*)' = \begin{cases} E_0^*, & 0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^*, \\ E_0^* + D \frac{\eta}{(1 - \varepsilon_e^*)} \left( \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^{\eta-1}, & \varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

$$(\sigma^*)'' = \begin{cases} 0, & 0 \leq \varepsilon^* \leq \varepsilon_e^*, \\ D \frac{\eta(\eta-1)}{(1 - \varepsilon_e^*)^2} \left( \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^{\eta-2}, & \varepsilon_e^* \leq \varepsilon^* \leq 1. \end{cases}$$

Контактные условия на границе линейного и нелинейного участков кривой деформирования

$$\begin{cases} \sigma^*(\varepsilon_e^*) = \sigma_e^*, \\ \sigma^{*'}(\varepsilon_e^*) = E_0^*, \end{cases} \quad (2.2)$$

удовлетворяются тождественно.

Граничные условия на правом конце нелинейного участка кривой деформирования

$$\begin{cases} \sigma^*(\varepsilon_c^*) = 1, \\ \sigma^{*'}(\varepsilon_c^*) = 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Подставляя в них напряжение в соответствии с (2.1), получим

$$\begin{cases} D = -(E_0^* - 1), \\ \eta = \frac{1 - \varepsilon_e^*}{1 - \frac{1}{E_0^*}}. \end{cases} \quad (2.4)$$

В результате кривая деформирования на нелинейном участке кривой деформирования приобретает вид

$$\sigma^* = E_0^* \left[ \varepsilon^* - \frac{(1 - \varepsilon_e^*)}{\eta} \left( \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^\eta \right]. \quad (2.5)$$

Кривая нелинейного модуля упругости на нелинейном участке кривой деформирования приобретает вид

$$(\sigma^*)' = E_0^* \left[ 1 - \left( \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^{\eta-1} \right]. \quad (2.6)$$

На нелинейном участке кривой деформирования соотношение для кривизны приобретает вид

$$(\sigma^*)'' = -\frac{E_0^*}{(\varepsilon_c^* - \varepsilon_e^*)} \times (\eta - 1) \left( \frac{\varepsilon^* - \varepsilon_e^*}{\varepsilon_c^* - \varepsilon_e^*} \right)^{\eta-2}. \quad (2.7)$$

Так как  $(\eta - 1) > 0$ , эта модель на всем участке пластичности обеспечивает автоматически отрицательную кривизну кривой деформирования, т.е. касательный модуль монотонно

убывает (от  $E_0^*$  на левом конце до нуля на правом конце) на всем нелинейном участке кривой деформирования. Обратим внимание на то, что в качестве независимых параметров можно выбрать не только координаты характерной точки на кривой деформирования  $(\varepsilon_e^*; \sigma_e^*)$ , но и любую другую пару из четырех параметров  $\varepsilon_e^*; \sigma_e^*; E_0^*; \eta$ , между которыми установлены две связи, к примеру,

$$\begin{cases} \eta = \frac{1 - \varepsilon_e^*}{1 - \frac{1}{E_0^*}}, \\ \sigma_e^* = E_0^* \varepsilon_e^*. \end{cases} \quad (2.8)$$

Можно заметить, что двухпараметрическая модель (2.5) вырождается в однопараметрическую модель в предельном случае  $\varepsilon_e^* \rightarrow 0$ , когда характерная точка  $(\varepsilon_e^*; \sigma_e^*)$  стремится к точке  $(0;0)$ . В этом случае такой закон представляется применимым исключительно для процессов деформирования, связанных с пластичностью и соответствующей диссипацией энергии, что было отмечено в диссертации Головиной Н.Я. [12].

### 3. Обработка экспериментальных данных

Для проверки работоспособности сформулированной модели были использованы экспериментальные данные для российской стали 20ХГР. Эти данные предоставлены лабораторией сопротивления материалов Тюменского индустриального университета.

В работе используется следующий вариационный принцип: «Из всех кривых, зависящих от  $N$  параметров, наиболее вероятной является кривая, которая обеспечивает минимальное общее квадратичное отклонение от указанной выборки экспериментальных точек».

Пусть даны  $I$  экспериментальные точки с координатами  $(\varepsilon_i; \sigma_i)$ . Определим максимальное значение  $\sigma_c = \max(\sigma_i)$ . Назовем соответствующую точку  $(\varepsilon_c; \sigma_c)$  пределом прочности. Нормируем координаты всех экспериментальных точек соответственно на деформацию предела прочности  $\varepsilon_c$  и напряжение предела прочности  $\sigma_c$ . В результате получим  $I$  экспериментальных точек с нормированными координатами  $(\varepsilon_i^*; \sigma_i^*)$ , причем первая точка будет всегда, для любого материала, иметь координаты  $(0;0)$ , а последняя точка будет всегда, для любого материала, иметь координаты  $(1;1)$ . Тогда отклонение ординаты

теоретической кривой от экспериментальной выражается соотношением

$$\Delta_i = \begin{cases} \sigma_i^* - E_0^* \varepsilon_i^*, & 0 \leq \varepsilon_i^* \leq \varepsilon_e^*; \\ \sigma_i^* - E_0^* \varepsilon_i^* + E_0^* \frac{(1 - \varepsilon_e^*)}{\eta} \left( \frac{\varepsilon_i^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^\eta, & \varepsilon_e^* \leq \varepsilon_i^* \leq 1. \end{cases} \quad (3.1)$$

В качестве целевой функции выберем суммарное квадратичное отклонение  $\Delta$  на всем интервале  $0 \leq \varepsilon_i^* \leq 1$  деформаций

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{i=0}^{i=n} \Delta_i \Delta_i + \sum_{i=n+1}^{i=I} \Delta_i \Delta_i = \\ &= \sum_{i=0}^{i=n} (\sigma_i^* - E_0^* \varepsilon_i^*)^2 + \\ &+ \sum_{i=n+1}^{i=I} \left[ \sigma_i^* - E_0^* \varepsilon_i^* + \right. \\ &\left. + E_0^* \frac{(1 - \varepsilon_e^*)}{\eta} \left( \frac{\varepsilon_i^* - \varepsilon_e^*}{1 - \varepsilon_e^*} \right)^\eta \right]^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $n = n(\varepsilon_e^*)$  — число экспериментальных точек, попавших в интервал физически линейного участка.

Представляется бесперспективным искать аналитическое решение этой задачи и предпочтительней использовать прямые численные методы поиска точки стационарного значения функции двух переменных. Используем для этого следующий алгоритм.

#### Шаг-1

Выберем в качестве координат предела пропорциональности последовательно каждую экспериментальную точку. Номер этой точки является номером  $n$  в пределах суммирования квадратичного отклонения в выражении для  $\Delta$  (3.2). Вычислим суммарное квадратичное отклонение для каждой выбранной за предел пропорциональности экспериментальной точки.

Найдем точку с минимальным  $\Delta$ .

Из табл. 1 видно, что минимальное суммарное квадратичное отклонение соответствует теоретической кривой, для которой третья экспериментальная точка выбрана в качестве предела пропорциональности.

Выделим прямоугольник (рис. 1) с координатами углов  $(\varepsilon_{n-1}^*; \sigma_{n-1}^*)$ ,  $(\varepsilon_{n+1}^*; \sigma_{n-1}^*)$ ,  $(\varepsilon_{n+1}^*; \sigma_{n+1}^*)$ ,  $(\varepsilon_{n-1}^*; \sigma_{n+1}^*)$ .

Таблица 1. Результаты обработки экспериментальных данных с целью определения параметров материала

Номер экспериментальной точки	$n =$	1	2	3	4	5
Нормированная $\varepsilon$ -координата точки предела пропорциональности на теоретической кривой	$\varepsilon_e^* =$	0,0182	0,0273	0,0364	0,0545	0,0727
Нормированная $\sigma$ -координата точки предела пропорциональности на теоретической кривой	$\varsigma_e^* =$	0,5000	0,8500	0,9000	0,9250	0,9350
Нормированный модуль упругости в точке предела пропорциональности	$E_0^* =$	27,5000	31,1666	24,7500	16,9583	12,8562
Физический параметр, отражающий физические свойства материала	$\eta =$	1,0188	1,0049	1,0042	1,0047	1,0054
Физический параметр, отражающий физические свойства материала	$D =$	-26,500	-30,167	-23,750	-15,958	-11,856
Суммарное квадратичное отклонение теоретической кривой от выборки экспериментальных точек	$\Delta =$	1,3631	0,0688	0,0535	0,2770	0,5649

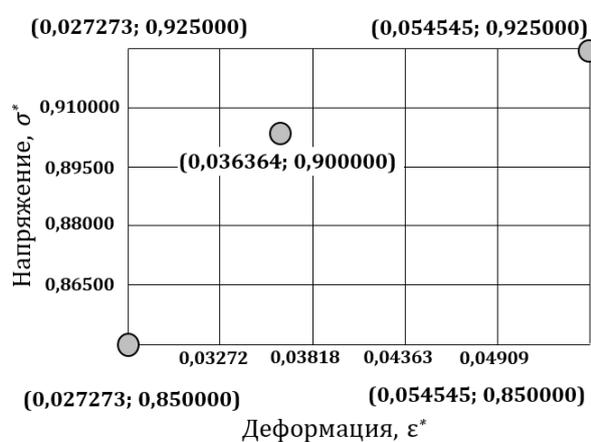


Рис. 1. Генерация сетки точек, которые послужат пределами упругости пробных теоретических кривых деформирования

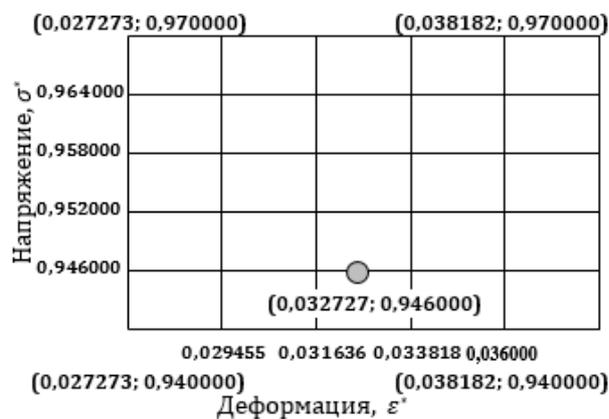


Рис. 2. Сетка узлов во втором приближении, иллюстрирующая «сжимающий оператор» генерации последовательности сеток, содержащих точку стационарности/минимума суммарного квадратичного отклонения

Таблица 2. Координаты угловых точек области, содержащей найденную точку в соответствии с шагом 1

Первое приближение	
$\varepsilon_{n-1}^* =$	0,018182
$\varepsilon_{n+1}^* =$	0,036364
$\varsigma_{n-1}^* =$	0,500000
$\varsigma_{n+1}^* =$	0,900000

Таблица 3. Координаты угловых точек области, содержащей точку теоретической кривой деформирования, являющуюся пределом пропорциональности

$\sigma^*$	$\varepsilon^*$	0,03032	0,03120	0,032072
0,94000		0,01074	0,00976	0,010314
0,94240		0,01086	0,00972	0,010136
0,94480		0,01106	0,00977	0,010051

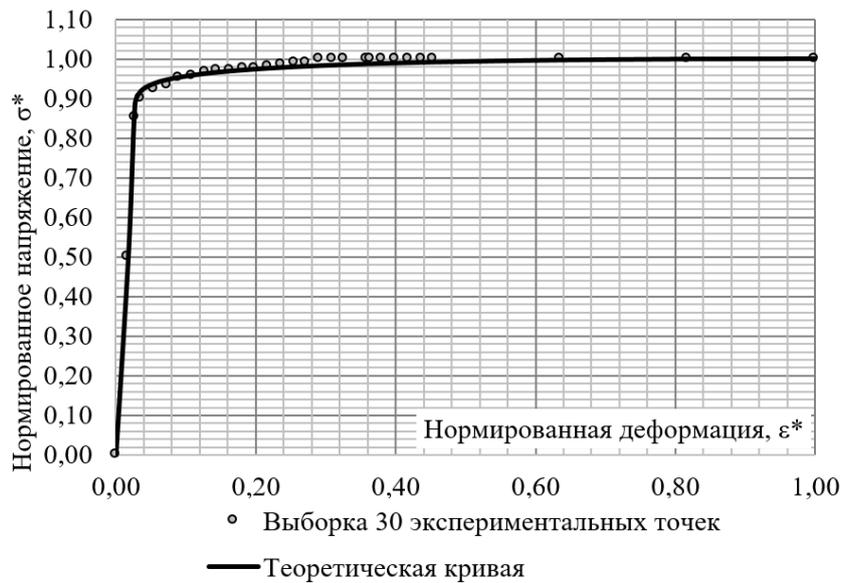


Рис. 3. Кривая деформирования модифицированного закона Рамберга–Осгуда для стали 20ХГР со среднеквадратичным отклонением от выборки из 30 экспериментальных точек, равным 0,018

### Шаг-2

Покроем выделенный прямоугольник прямоугольной сеткой и последовательно выберем в качестве пробного предела упругости каждый узел этой сетки. Вычислим для каждого узла  $\Delta$ . Если окажется, что точка с минимальным  $\Delta$  попадает на границу прямоугольника, наращиваем прямоугольник дополнительной цепочкой узлов так, чтобы в результате точка с минимальным  $\Delta$  лежала внутри прямоугольника. Определим прямоугольник, содержащий внутри себя найденную точку, из соседних (для найденной) точек (рис. 2).

### Шаг-3

Методом итераций, повторяя Шаг-2, стягиваем горизонтальный размер прямоугольника до погрешности измерения деформаций (нормированную на  $\varepsilon_c$ ), а вертикальный — до погрешности измерения напряжений (нормированной на  $\sigma_c$ ). Суммарное квадратичное отклонение в финальном прямоугольнике представлено в табл. 2.

В соответствии с изложенным алгоритмом можно определить координаты точки предела пропорциональности для теоретической модели с точностью до погрешности эксперимента. По координатам найденной точки предела упругости определяются другие, зависимые, параметры модели (табл. 3).

Зная минимальное суммарное квадратичное отклонение  $\Delta$ , можно определить среднеквадратичное отклонение:

$$S_0 = \sqrt{\frac{\Delta}{I-1}} = \sqrt{\frac{0,00972}{29}} = 0,0183.$$

На рис. 3 показана теоретическая кривая с подобранными по экспериментальным данным оптимальными параметрами и выборка экспериментальных точек.

Таким образом, предложенная модель пластичного материала, по крайней мере для стали 20ХГР, дает теоретическую кривую деформирования, которая пригодна как для инженерных расчетов, так и для дальнейшего

теоретического исследования, например, для построения моделей ресурса.

### Выводы

Обсуждены недостатки классического закона Рамберга–Осгуда. Установлено:

– классический закон Рамберга–Осгуда несовместим с определением теоретической прочности (1.9);

– классический закон Рамберга–Осгуда определяет касательный модуль как строго монотонно убывающую функцию, что эквивалентно утверждению, что характерная точка кривой деформирования, предел пропорциональности, совпадает с начальной точкой кривой деформирования, т.е. линейный участок в классическом законе Рамберга–Осгуда отсутствует.

Рассмотрена альтернативная модель пластического материала (2.1). Предложенная модель обладает тем преимуществом перед законом Рамберга–Осгуда, что совместима с определением теоретической прочности (существованием горизонтальной касательной к кривой деформирования). Рассмотренный модифицированный закон дополнительно отличается от закона Рамберга–Осгуда ещё и тем, что постулирует существование строго линейного участка ненулевой длины на кривой деформирования, границей которого является точка предела пропорциональности, за которой начинается участок нелинейного деформирования и заканчивается другой характерной точкой кривой деформирования — точкой предела прочности.

На примере выборки из 30 экспериментальных точек кривой деформирования стали 20ХГР, построены соответствующие модифицированному закону кривые деформирования. Среднеквадратичное отклонение для «модифицированного закона Рамберга–Осгуда»  $S_0 = 0,02$ . Получен работоспособный, непротиворечивый, инструмент для моделирования кривых деформирования для пластичных материалов.

### Литература

1. *Надаи А.* Пластичность и разрушение твердых тел. М.: Изд. иностранной лит., 1954. 648 с.
2. *Надаи А.* Пластичность. Механика пластического состояния вещества. М.: ОНТИ НКТП СССР, 1936. 280 с.

3. *Ильюшин А.А.* Пластичность. Ч.1. Упруго-пластические деформации. М.: Ленинград: Гостехиздат, 1948. 376 с.
4. *Ramberg W., Osgood W.R.* Description of stress-strain curves by three parameters, National Advisory Committee For Aeronautics, Technical Note no 902, Washington DC, 1943.
5. *Belov P.A., Golovina N.Y.* Generalization of the Ramberg–Osgood Model for Elastoplastic Materials // Journal of Materials Engineering and Performance. 2019. Vol. 12. P. 7342–7346. DOI: 10.1007/s11665-019-04422-3
6. *Mendelson A.* Plasticity: Theory, and Application. Malabar: Krieger, 1968. 354 с.
7. *Papirno R.* Goodness-of-Fit of the Ramberg–Osgood Analytic Stress-Strain Curve to Tensile Test Data // Journal of Testing and Evaluation. 1982. Vol. 10. Iss. 6. P. 263–268. DOI: 10.1520/JTE10264J.
8. *Rasmussen K.* Full-range stress-strain curves for stainless steel alloys // Journal of Constructional Steel Research. 2003. Vol. 59. Iss. 1. P. 47–61. DOI: 10.1016/S0143-974X(02)00018-4
9. *Liu C.* Smoothing elastoplastic stress-strain curves obtained by a critical modification of conventional models // International Journal of Solids and Structures. 2003. Vol. 40. Iss. 9. P. 2121–2145.
10. *Quach W., Huang J.* Stress-strain models for light gauge steels // Procedia Engineering. 2011. Vol. 14. P. 288–296.
11. *Zhang Z., Wu W., Chen D., Sun Q., Zhao W.* New Formula Relating the Yield Stress-Strain with the Strength Coefficient and the Strain-Hardening Exponent // Journal of Materials Engineering and Performance. 2004. Vol. 13. P. 509–512. DOI: 10.1361/10599490420070
12. *Головина Н.Я.* Вынужденные колебания гибких металлических трубопроводов машин и агрегатов: Автореф. дисс. ... канд. тех. наук. Тюмень. ТюмГНГУ. 2002. 133 с.
13. *Arrayago I., Real E., Gardner L.* Description of stress-strain curves for stainless steel alloys // Materials and Design, 2015. Vol. 87. P. 540–552. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.08.001
14. *Махутов Н.А.* Сила и безопасность: фундаментальные и прикладные исследования. Новосибирск: Наука, 2008. 522 с.

### References

1. *Nadai, A.* *Plasticity and destruction of solids. Vol. 1.* Izdatel'stvo inostrannoy literatury, Moscow, 1954. (In Russian)
2. *Nadai, A.* *Plastic. Mechanics of the plastic state of matter, Vol. 2,* Joint Scientific and Technical Publishing House (ONTI) NKTP USSR. Main edition of general technical literature, Moscow, 1936. (In Russian)

3. Plyushin, A.A. *Plastic*, Leningrad: OGIz, Moscow, 1948. (In Russian)
4. Ramberg W., Osgood, W.R. *Description of stress-strain curves by three parameters*, National Advisory Committee For Aeronautics, Technical Note No. 902, Washington DC, 1943.
5. Belov, P.A., Golovina, N.Y. Generalization of the Ramberg–Osgood Model for Elastoplastic Materials. *Journal of Materials Engineering and Performance*, 2019. vol. 12. pp. 7342–7346. DOI: 10.1007/s11665-019-04422-3
6. Mendelson, A. *Plasticity: Theory, and Application*. Malabar: Krieger, 1968.
7. Papirno, R. Goodness-of-Fit of the Ramberg–Osgood Analytic Stress-Strain Curve to Tensile Test Data. *J. of Testing and Evaluation*, 1982, vol. 10, iss. 6, pp. 263–268. DOI: 10.1520/JTE10264J.
8. Rasmussen, K. Full-range stress-strain curves for stainless steel alloys. *J. of Constructional Steel Research*, 2003. vol. 59, iss. 1. pp. 47–61. DOI: 10.1016/S0143-974X(02)00018-4
9. Liu, C. Smoothing elastoplastic stress-strain curves obtained by a critical modification of conventional models. *Int. J. of Solids and Structures*, 2003. vol. 40, iss. 9, pp. 2121–2145.
10. Quach, W., Huang, J. Stress-strain models for light gauge steels. *Procedia Engineering*, 2011, vol. 14, pp. 288–296.
11. Zhang Z., Wu, W., Chen, D., Sun, Q., Zhao, W. New formula relating the yield stress-strain with the strength coefficient and the strain-hardening exponent. *J. of Materials Engineering and Performance*, 2004, vol. 13, pp. 509–512. DOI: 10.1361/10599490420070
12. Golovina, N.Ya. *Forced vibrations of flexible metal pipelines of machines and units*, Cand. tech. sci. diss. Tyumen, 2002. (In Russian)
13. Arrayago, I., Real, E., Gardner, L. Description of stress-strain curves for stainless steel alloys. *Materials and Design*, 2015, vol. 87, pp. 540–552. DOI: 10.1016/j.matdes.2015.08.001
14. Makhutov, N.A. *Strength and Safety: Basic and Applied Research*. Nauka, Novosibirsk, 2008. (In Russian)